# ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

26/10/22

9º Μάθημα

**Πρόταση** β) Έστω $K \subseteq \mathbb{C}$ κυρτό. Τότε το $K$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}$.

**Αποδ.** Έστω $\omega \in K$. Τότε αφού $K$ κυρτό, έχω ότι $\forall\ z \in K$ είναι $[z,\omega] \subseteq K$. Έτσι $K = \bigcup_{z\in K} \underbrace{[z,\omega]}_{\text{συνεκτικό } \forall z}$

Αλλά $\omega \in [z,\omega]\ \forall\ z\in K \Rightarrow \bigcap_{z\in K}[z,\omega] \neq \emptyset$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$\overset{\text{Λήμμα}}{\Rightarrow}$ $K = \bigcup_{z\in K} [z,\omega] =$ συνεκτικό $\subseteq \mathbb{C}$

## Παραδείγματα κυρτών συνόλων

1. Κάθε ανοικτός ή κλειστός δίσκος του $\mathbb{C}$ είναι κυρτό σύνολο
2. Κάθε ημιεπίπεδο (ανοικτό ή κλειστό) είναι κυρτό σύνολο
3. Το εσωτερικό ενός τριγώνου ή ενός παρ/μου είναι κυρτό σύνολο. Το ίδιο ισχύει για το εσωτερικό του τριγώνου (ή παρ/μου) μαζί με το σύνορο.

**Θεώρημα** Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό. Τότε ΤΑΕΙ:

α) Το $U$ είναι συνεκτικό

β) Το $U$ είναι πολυγωνικά συνεκτικό δηλ. $\forall\ z,\omega \in U$
$\exists$ πολυγωνική γραμμή $p$ από το $z$ στο $\omega$ με $p \subseteq U$.

**Ορισμός** Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$. Το $U$ λέγεται τόπος αν είναι ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}$.

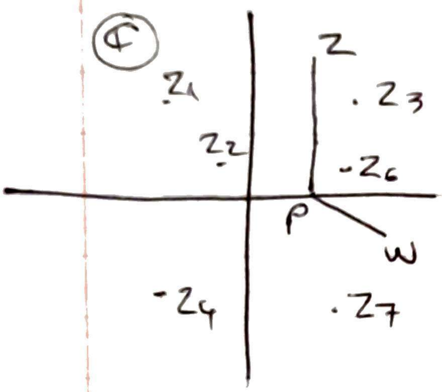
# Παραδείγματα

① Αν $F \subseteq \mathbb{C}$ πεπερασμένο και $\neq \emptyset$, τότε το $\mathbb{C}\setminus F$ είναι ✓ ανοικτό και συνεκτικό σύνολο αλλά όχι κυρτό!

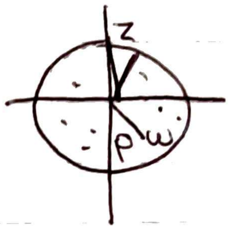
Το ίδιο ισχύει και για το $\Delta(a,r)\setminus F$ $(\forall a \in \mathbb{C}, \forall r>0)$

Δηλ. $\mathbb{C}\setminus F$, $\Delta(a,r)\setminus F$ = μη κυρτοί τόποι.

$\Delta(a,r)\cap F \neq \emptyset \Rightarrow$

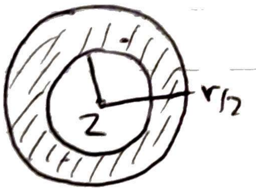



$\mathbb{C}\setminus F$ ανοικτό και συνεκτικό ως πολυγωνικά συνεκτικό

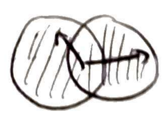



$\Delta(a,R)\setminus F$ το ίδιο

② Αν $z \in \mathbb{C}$ και $0<r_1<r_2$ τότε το δακτύλιος $\Delta(z,r_2)\setminus\overline{\Delta}(z,r_1) = \Delta(z,r_1,r_2)$ είναι ανοικτό και συνεκτικό σύνολο, αλλά όχι κυρτό




③ Αν οι $\Delta(z,r_1), \Delta(w,r_2)$ τέμνονται τότε $\Delta(z,r_1)\cup\Delta(w,r_2)$ είναι τόπος αλλά εν γένει είναι μη κυρτός.



**Θεώρημα** Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό. Τότε:

i) κάθε συνεκτική συνιστώσα του $U$ είναι ανοικτό στο $\mathbb{C}$

ii) Το $U$ έχει αριθμήσιμες το πλήθος συνεκτικές συνιστώσες.

$\overline{\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}} = \mathbb{C}$, $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ = αριθμήσιμο

# Κεφάλαιο 2ο

$f : \underset{\substack{\Downarrow \\ \text{ανοικτό}}}{\Omega} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ θα ορίσουμε την μιγαδική παράγωγο $f'$!

**Ορισμός:** Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό σύνολο, $a \in \Omega$ και $f : \Omega \to \mathbb{C}$ συνάρτηση. Λέμε ότι η $f$ έχει μιγαδική παράγωγο στο $a \in \Omega$ αν το $\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$ υπάρχει στο $\mathbb{C}$.

Το όριο αυτό θα συμβολίζεται με $f'(a)$ και θα λέγεται "η παράγωγος της $f$ στο σημείο $a$".

Αν η $f$ έχει μιγαδική παράγωγο στο $a$, τότε $\exists\ w \in \mathbb{C}$ ώστε $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \underbrace{\delta(\varepsilon, a)}_{\delta} > 0 : z \in \Omega$ και $0 < |z-a| < \delta$

$$\Rightarrow |f(z) - f(a) - w(z-a)| < \varepsilon |z-a|$$

και τότε: $w = f'(a)$

Ισοδύναμα: $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 : \forall\ z \in \Omega \cap \Delta(a, \delta) \setminus \{a\}$ να ισχύει:

$$\frac{|f(z) - f(a) - w(z-a)|}{|z-a|} < \varepsilon$$

! Παρατηρούμε ότι η $f'(a)\ \exists$ αν το $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ υπάρχει στο $\mathbb{C}$.

Μια συνάρτηση $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, όπου $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό σύνολο, λέγεται ολόμορφη αν έχει μιγαδική παράγωγο, σε κάθε $a \in \Omega$.

**Παραδείγματα:**

1) Κάθε σταθερή συνάρτηση $f(z) = c$, $z \in \Omega$ ($c =$ σταθερά) είναι ολόμορφη και μάλιστα $f'(z) = 0\ \forall\ z \in \Omega$.

② Τα μιγαδικά μονώνυμα, δηλ. οι συναρτήσεις $\varphi(z)=z^n$, $z\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}$ είναι ολόμορφες στο $\mathbb{C}$. Πράγματι αν $a\in\mathbb{C}$ και $n\in\mathbb{N}$ τότε:

$$z^n-a^n=(z-a)(z^{n-1}+az^{n-2}+\dots+a^{n-2}z+a^{n-1})$$

Έτσι αν $z\neq a$ τότε $\dfrac{\varphi(z)-\varphi(a)}{z-a}=z^{n-1}+az^{n-2}+\dots+a^{n-1}$

$\longrightarrow n\cdot a^{n-1}$. Έτσι η $\varphi(z)=z^n$ είναι ολόμορφη με $\varphi'(z)=n\cdot z^{n-1}$ $\forall z\in\mathbb{C}$.

③ Η συνάρτηση $f(z)=\bar{z}$, $z\in\mathbb{C}$ δεν έχει μιγαδική παράγωγο σε κανένα σημείο $z\in\mathbb{C}$.

Έστω $a=x_0+iy_0\in\mathbb{C}$.

- Αν $z=x+iy_0$ προσεγγίζουμε το $a$ κινούμενοι παράλληλα με τον πραγμ. άξονα.

Τότε για $z\neq a$ $(x\neq x_0)$ έχω:

$$\frac{f(z)-f(a)}{z-a}=\frac{\bar{z}-\bar{a}}{z-a}=\frac{\overline{z-a}}{z-a}=$$

$$=\frac{\overline{(x+iy_0)-(x_0+iy_0)}}{(x+iy_0)-(x_0+iy_0)}=\frac{\overline{x-x_0}}{x-x_0}=\frac{x-x_0}{x-x_0}=1\xrightarrow[\substack{z\to a\\(x\to x_0)}]{}1$$

- Αν $z=x_0+iy$ για $z\neq a$ $(y\neq y_0)$ έχω:

$$\frac{f(z)-f(a)}{z-a}=\frac{\overline{z-a}}{z-a}=\frac{\overline{(\cancel{x_0}+iy)-(\cancel{x_0}+iy_0)}}{(\cancel{x_0}+iy)-(\cancel{x_0}+iy_0)}=\frac{\overline{i(y-y_0)}}{i(y-y_0)}=$$

$$=-\frac{\cancel{i}\cancel{(y-y_0)}}{\cancel{i}\cancel{(y-y_0)}}=-1\xrightarrow[\substack{z\to a\\(y\to y_0)}]{}-1\neq 1$$

Άρα $\forall a\in\mathbb{C}$ $\nexists$ το $\lim\limits_{z\to a}\dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}$

$z=(x,y)$
$\bar{z}=(x,-y)$

Είναι: $f(z) = f((x,y)) = (x,-y) = \bar{z}$

Αλγεβρικά: $f$ αυτομορφισμός του σώματος $\mathbb{C}$ (ομοιομορφισμός + 1-1 + επί)

Τοπολογικά: $f$ ομοιομορφισμός από το $\mathbb{C}$ στο $\mathbb{C}$
($f$ συνεχής, 1-1, επί $f^{-1} = f =$ συνεχής)

Διαφόριση: $f(x,y) = (x,-y)$ είναι μια $C^{\infty}$-αμφιδιαφόριση από το $\mathbb{R}^2$ στο $\mathbb{R}^2$.

Η $f$ ενώ έχει πολύ καλές ιδιότητες, δεν έχει πουθενά μιγαδική παράγωγο.

Άρα οι η μιγαδική παραγώγιση και η πραγματική διαφόριση είναι έννοιες διαφορετικές!

! Μιγαδ. Παραγώγιση $\Rightarrow$ διαφορισιμότητα αλλά δεν ισχύει και' ανάγκη το αντίστροφο !

$f = u + iv$ ολόμορφη στο $\Omega \Leftrightarrow$
$\left.\begin{array}{l} f\ \mathbb{R}\text{-διαφορίσιμη στο } \Omega \text{ και} \\ \left.\begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array}\right\} \text{Cauchy-Riemann στο } \Omega \end{array}\right\}$

## Πρόταση: (Παρατήρηση του Καραθεοδωρή)

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $a \in \Omega$ και $f: \Omega \to \mathbb{C}$ συνάρτηση. Τότε η $f$ έχει μιγαδική παράγωγο στο $a \in \Omega$ αν $\exists\ \varphi: \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής στο $a$ ώστε $f(z) - f(a) = \varphi(z)(z-a)$ $z \in \Omega$. Στην περίπτωση αυτή είναι $f'(a) = \varphi(a)$

Αποδ.

"$\Rightarrow$" Ορίζουμε $\varphi(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}, & z \neq a \\ f'(a), & z = a \end{cases}$ και

$\rightsquigarrow$ παρατηρούμε ότι $\lim_{z \to a} \varphi(z) = f'(a) = \varphi(a)$

$\Rightarrow \varphi$ συνεχής στο $a$ και $\forall\ z \in \Omega$:

$f(z) - f(a) = \varphi(z)(z-a)$

"$\Leftarrow$" Παρατηρούμε ότι για $z \neq a$ $(z \in \Omega)$
είναι $\varphi(z) = \dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}$ και από τη συνέχεια της

$\varphi$ στο $a$ έχω ότι: $\underset{\mathbb{C}}{\nearrow}\ \varphi(a) = \lim_{z \to a} \varphi(z) = \lim_{z \to a} \dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}$

$= f'(a)$

Συνεπώς η $f$ έχει μιγαδική παράγωγο στο $a$ και
μάλιστα $f'(a) = \varphi(a)$

**Πόρισμα** Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $f: \Omega \to \mathbb{C}$
συνάρτηση που έχει μιγαδική παράγωγο στο $a$. Τότε
η $f$ είναι συνεχής στο $a$.

Για $z \in \Omega \setminus \{a\}$ είναι $f(z) = f(a) + \varphi(a)(z-a) \xrightarrow[z \to a]{\varphi \text{ συνεχής στο } a}$

$\longrightarrow f(a) + f'(a) \cdot 0 = f(a) \Rightarrow f$ συνεχής στο $a$

**Πρόταση** Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $a \in \Omega$ και $f, g: \Omega \to \mathbb{C}$
συναρτήσεις και $\lambda \in \mathbb{C}$. Αν οι $f, g$ έχουν μιγαδική
παράγωγο στο $a$, τότε:

① Οι $f+g$, $f \cdot g$, $\lambda \cdot f$ έχουν μιγ. παρ. στο $a$ και μάλιστα
$\rightarrow (f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
$\rightarrow (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
$\rightarrow (\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$

② Αν $g(a) \neq 0$ τότε η $\dfrac{f}{g}$ έχει μιγ. παρ. στο $a$ και
$\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$ Ιδιαιτέρως: $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(a) = -\dfrac{g'(a)}{g^2(a)}$

# Παραδείγματα

① Κάθε μιγαδικό πολυώνυμο $P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + z c_1 + c_0$, $c_i \in \mathbb{C}$

Είναι ολόμορφη συνάρτηση στο $\mathbb{C}$ και
$P'(z) = n c_n z^{n-1} + (n-1) c_{n-1} z^{n-2} + \dots + 2 c_2 z + c_1, \ z \in \mathbb{C}$

② Κάθε ρητή συνάρτηση $f = \frac{p}{q}$ ($p, q$ πολυώνυμα με $q \neq 0$) είναι ολόμορφη στο πεδίο ορισμού της, το οποίο είναι το: $\Omega = \mathbb{C} \setminus Z(q)$, όπου
$$Z(q) = \{ z \in \mathbb{C} : q(z) = 0 \}$$
και $\Omega$ = ανοικτό $\subseteq \mathbb{C}$ (υποθέτουμε ότι $(p, q) = 1$)