Μάθημα 35 09/01/2023

Παρατήρηση

1) Το ζεύγος (m, g) του (b) του τελευταίου Θεωρήματος είναι μοναδικό.
(Αν $f: \underline{\Omega} \setminus \{a\} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη, $a \in \underline{\Omega}$ και a πόλος, τότε $\exists\, g: \underline{\Omega} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη με $g(a) \neq 0$ και $m \in \mathbb{N}$:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}, \quad z \in \underline{\Omega} \setminus \{a\} \quad)$$

Έτσι το m θα λέγεται τάξη του πόλου a της f

2) Οι σταθερές $c_1, c_2, \dots, c_n$ του (γ) του τελευταίου Θεωρήματος είναι επίσης μοναδικές αφού προέρχονται από την ανάλυση της g σε δυναμοσειρά κέντρου a.
Μάλιστα έχουμε $a_n = \dfrac{g^{(n)}(a)}{n!}, \; n \geq 0$

άρα $a_{m-\lambda} = c_\lambda = \dfrac{g^{(m-\lambda)}(a)}{(m-\lambda)!}, \; \lambda = 1, 2, \dots, m$

Η ρητή συνάρτηση $q(z) = \dfrac{c_1}{z-a} + \dots + \dfrac{c_m}{(z-a)^m}$ λέγεται κύριο μέρος του πόλου a της f.
(Η f έχει πόλο στο $a \in \underline{\Omega} \iff \exists\, c_1, c_2, \dots, c_m \in \mathbb{C}, \; c_m \neq 0$ και η $f(z) - q(z)$ έχει στο a επουσιώδη ανωμαλία)

3) Από τα προηγούμενα έχουμε

a) Η συνάρτηση f έχει πόλο τάξης m στο a ανν η $\frac{1}{f}$ έχει ρίζα τάξης m στο a.

b) Αν η f έχει μεμονωμένη ανωμαλία στο a, τότε το a είναι πόλος τάξης m για την f ανν το όριο $\lim_{z \to a} (z-a)^m \cdot f(z) = l \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $(l \neq 0)$

Παρατήρηση
Το a είναι ουσιώδης ανωμαλία της f ανν το όριο $\lim_{z \to a} f(z)$ δεν υπάρχει στο $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Υπενθύμιση
Ένα σύνολο $D \subseteq \mathbb{C}$ λέγεται πυκνό στο $\mathbb{C}$ αν $\overline{D} = \mathbb{C}$.
Τα πυκνά υποσύνολα D του $\mathbb{C}$ χαρακτηρίζονται ως εξής:

I) D πυκνό $\subseteq \mathbb{C} \iff D \cap O \neq \emptyset$ $\forall O \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και μη κενό

II) $D \subseteq \mathbb{C}$ πυκνό στο $\mathbb{C} \iff \forall z \in \mathbb{C}$ $\exists (z_n) \subseteq D$ με $z_n \to z$

$\boxed{\text{ΘΕΩΡΗΜΑ}}$ (Casorati – Weierstrass)

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $a \in \Omega$ και $f: \Omega \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη. Τ.Α.Ε.Ι.:

a) Η f έχει στο a ουσιώδη ανωμαλία

b) Για κάθε $\delta > 0$ ώστε $\Delta(a,\delta) \subseteq \Omega$ το σύνολο $f(\Delta(a,\delta) \setminus \{a\})$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{C}$

Απόδειξη

(a) => (b)

Έστω, για άτοπο, ότι για κάποιο $\delta > 0$ ώστε $\Delta(a,\delta) \subseteq \Omega$ το σύνολο $D(\delta) = f(\Delta(a,\delta) \setminus \{a\})$ δεν είναι πυκνό στο $\mathbb{C}$

Από το (Ι) της υπενθύμισης $\exists$ ανοικτός δίσκος $\Delta(w,r) \subseteq \mathbb{C}$ ώστε $D(\delta) \cap \Delta(w,r) = \emptyset$

Επειδή $|f(z) - w| \geq r > 0 \quad \forall z \in \Delta(a,\delta)$ με $z \neq a$, η συνάρτηση $g(z) = \frac{1}{f(z)-w}$, $z \in \Delta(a,\delta) \setminus \{a\}$

είναι καλά ορισμένη και ολόμορφη

Παρατηρούμε ότι η g είναι φραγμένη, αφού

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z)-w|} \leq \frac{1}{r} \quad \forall z \in \Delta(a,\delta) \text{ με } z \neq a$$

Από Θεώρημα του Riemann έπεται ότι το a είναι επουσιώδης ανωμαλία της g

Συνεπώς το όριο $\lim_{z \to a} g(z) = b$ υπάρχει στο b ($b \in \mathbb{C}$)

και έτσι το όριο $\lim_{z \to a} f(z) - w = \lim_{z \to a} \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{b}$ υπάρχει στο $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Αυτό όμως αντιφάσκει με την υπόθεση ότι το a είναι ουσιώδης ανωμαλία της f.

$(b) \Rightarrow (a)$

Η υπόθεση μας τώρα είναι ότι $\forall \delta > 0$ ώστε $\Delta(a,\delta) \subseteq \Omega$, το σύνολο $D(\delta) = f(\Delta(a,\delta) \setminus \{a\})$ είναι πυκνό στο $\mathbb{C}$.

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

$\boxed{A}$ Το όριο $\lim_{z \to a} f(z) = c \in \mathbb{C}$

Τότε για $\varepsilon = 1$ $\exists \delta > 0$ ώστε $D(\delta) \subseteq \Delta(c,1)$

Αυτό όμως αντιφάσκει με τον χαρακτηρισμό των πυκνών συνόλων που δώσαμε πριν.

$\boxed{B}$ Το όριο $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$

Τότε για $\varepsilon = 1$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $D(\delta) \subseteq \mathbb{C} \setminus \Delta(0,1)$

Άτοπο πάλι από χαρακτηρισμό (I) των πυκνών υποσυνόλων του $\mathbb{C}$.

Έτσι το μόνο που μένει είναι ότι το $\lim_{z \to a} f(z)$ δεν υπάρχει στο $\overline{\mathbb{C}}$ και άρα η f έχει στο a ουσιώδη ανωμαλία

$\boxed{\text{Κεφάλαιο 6}}$ (Σειρές Laurent και Θεωρία Ολοκληρωτικών Υπολοίπων)

ΟΡΙΣΜΟΣ Μια σειρά της μορφής

(1) $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n = \dots + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \dots + c_n(z-a)^n + \dots$$

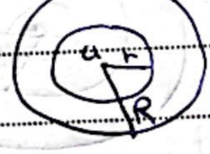
λέγεται <u>σειρά Laurent</u> κέντρου a

Παρατηρούμε ότι $c_{-n} = 0 \ \forall n \geq 1$ τότε η σειρά Laurent ταυτίζεται με δυναμοσειρά

ΟΡΙΣΜΟΣ Ένας <u>δακτύλιος</u> είναι ένα ανοικτό $\subseteq \mathbb{C}$ της μορφής

$$\Delta(a,r,R) = \{ z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R \}$$

όπου $a \in \mathbb{C}$ και $0 \leq r < R \leq +\infty$



Όταν θα λέμε ότι η διπλή σειρά (1) συγκλίνει με κάποια έννοια θα εννοούμε ότι και οι δύο σειρές $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$ συγκλίνουν με αυτήν την έννοια
(πχ. απλή σύγκλιση, απόλυτη ή ομοιόμορφη)
και τότε το άθροισμα της διπλής σειράς είναι σειρά

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \overset{\text{ορσ}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}}$$

Οι σειρές Laurent ορίζαν ολόμορφες συναρτήσεις σε δακτυλίους

ΘΕΩΡΗΜΑ (Laurent)

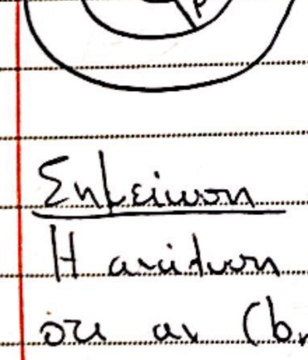
Έστω $f: \Delta(a,r,R) \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση.
Τότε η f αναπτύσσεται σε σειρά Laurent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-a)^n}, \quad z \in \Delta(a,r,R)$$

Ώστε:

a) Οι δύο σειρές συγκλίνουν απόλυτα για κάθε $z \in \Delta(a,r,R)$ και ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του δακτυλίου $\Delta(a,r,R)$

b) Η ακολουθία των συντελεστών $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι μοναδική και αν $r<\rho<R$



$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,\rho)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta$$, για κάθε $n=0,\pm1,\pm2,$

Σημείωση

Η ανάπτυξη είναι μοναδική υπό την ακόλουθη έννοια ότι αν $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι μια ακολουθία μιγαδικών ώστε η σειρά $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-a)^n$ συγκλίνει απλά στο μιγαδικό $f(z)$ $\forall z \in \Delta(a,r,R)$ τότε $b_n = a_n$ $\forall n \in \mathbb{Z}$

Σειρές Laurent και Μεμονωμένες Ανωμαλίες

Αν το $a \in \mathbb{C}$ και $r=0$, $R>0$ τότε
$\Delta(a,r,R) = \Delta(a,R) \setminus \{a\}$

ΠΟΡΙΣΜΑ

Έστω $f: \Delta(a,0,R) \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση με ανάπτυγμα Laurent $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-a)^n}$ με $0<|z-a|<R$. Τότε ισχύουν:

a) Η f έχει επουσιώδη ανωμαλία στο a αν και μόνο αν $a_{-n} = 0$ $\forall n \geq 1$

b) Η f έχει πόλο τάξης m στο a αν και μόνο αν $a_{-m} \neq 0$ και $a_{-n} = 0$ $\forall$ $n > m$

γ) Η f έχει ουσιώδη ανωμαλία στο a αν και μόνο $\exists$ $M \subseteq \mathbb{N}$ άπειρο ώστε $a_{-n} \neq 0$ $\forall n \in M$
δηλαδή το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : a_{-n} \neq 0\}$ είναι άπειρο

Απόδειξη

a) ($\Rightarrow$) Αν a επουσιώδης ανωμαλία της f και $0<\rho<R$ τότε από Θ. Laurent έχουμε $\forall n \in \mathbb{N}$

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,\rho)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{-n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,\rho)} f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1} d\zeta = 0$$

εφόσον η $g(\zeta) = f(\zeta)(\zeta - a)^{n-1}$ είναι ολόμορφη στο δίσκο $\Delta(a,R)$ και $C(a,\rho) \subseteq \Delta(a,R)$

($\Leftarrow$) Προφανές, αφού τότε $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$, $0<|z-a|<R$
Έτσι αρκεί να θέσουμε $f(a) = a_0$

b) ($\Rightarrow$)
Επειδή η f έχει πόλο τάξης m στο a, από το Θεώρημα χαρακτηρισμού των πόλων έχουμε
$f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-a)^m}$, $z \in \Delta(a,0,R)$, όπου $g : \Delta(a,R) \to \mathbb{C}$
ολόμορφη με $g(a) \neq 0$ και $m \in \mathbb{N}$

Έτσι πάλι από το Θ. Laurent υπολογίζουμε
για $0<\rho<R$

$$a_{-m} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,\rho)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{-m+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,\rho)} \frac{g(\zeta)}{(\zeta-a)^m} \cdot \frac{1}{(\zeta-a)^{-m+1}} d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,\rho)} \frac{g(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta \xrightarrow[\text{Cauchy}]{\text{Τύπος}} \underbrace{\delta_{C(a,\rho)}(a)}_{1} \cdot g(a) = g(a) \neq 0$$

Ανάλογα υπολογίζουμε ότι το $a_{-n} = 0 \ \forall n > m$
Γιατί, για $n>m$

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,\rho)} \frac{g(\zeta)}{(\zeta-a)^{m-n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,\rho)} g(z)(\zeta-a)^{\overbrace{n-m-1}^{>0}} d\zeta =$$

$$= 1 \cdot g(a) \cdot (a-a)^{\overbrace{n-m-1}^{>0}} = 0$$