Βασική Πραγματική και Συναρτησιακή Ανάλυση

1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Ημερομηνία παράδοσης: 7 Μαΐου 2023

1. Έστω (A_n) ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε τα σύνολα

$$\limsup A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A_n \text{ για άπειρα } n\}$$

και

$$\liminf A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{ υπάρχει } n_0(x) \in \mathbb{N} \text{ ώστε } x \in A_n \text{ για κάθε } n \geqslant n_0(x)\}.$$

(α) Δείξτε ότι

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{και} \quad \liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

(β) Αν B, C υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $A_n = B$, αν n περιττός και $A_n = C$, αν n άρτιος, βρείτε τα $\limsup A_n$ και $\liminf A_n$.

(γ) Έστω (A_n) ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ με $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) < +\infty$. Δείξτε ότι $\lambda(\limsup A_n) = 0$.

(δ) Δείξτε ότι, για οποιεσδήποτε ακολουθίες (A_n), (B_n) υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, ισχύει

$$(\limsup A_n) \cap (\liminf B_n) \subseteq \limsup(A_n \cap B_n).$$

(ε) Αν, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $A_n, B_n \subseteq [0,1]$ μετρήσιμα και ισχύει $\lambda(\limsup A_n) = 1$ και $\lambda(\liminf B_n) = 1$, δείξτε ότι $\lambda\left(\limsup(A_n \cap B_n)\right) = 1$.

2. (α) Έστω $0 < \varepsilon < 1$. Βρείτε ένα σύνολο $U \subseteq [0,1]$ ανοικτό και πυκνό στο $[0,1]$ με $\lambda(U) < \varepsilon$. Παρατηρήστε ότι $\lambda(\mathrm{bd}(U)) > 1 - \varepsilon$.

(β) Βρείτε μια ακολουθία (F_n) κλειστών υποσυνόλων του $[0,1]$ με $F_n^\circ = \emptyset$ για κάθε n και $\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = 1$.

3. Έστω C το σύνολο του Cantor. Αποδείξτε ότι:

(α) Το $C \cap \mathbb{Q}$ είναι πυκνό στο C.

(β) $C = 1 - C$.

(γ) $C + C = [0,2]$ και $C - C = [-1,1]$.

4. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση Cantor - Lebesgue. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^1 f = \frac{1}{2}.$$

5. Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι το σύνολο

$$D = \{x \in (a,b) \mid \text{η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } x\}$$

είναι σύνολο Borel.

6. Έστω $f : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

(α) Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (φ_n) απλών μετρήσιμων συναρτήσεων με $\varphi_n \to f$ σχεδόν παντού και $|\varphi_n| \leq |f|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) Δείξτε ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει απλή ολοκληρώσιμη συνάρτηση φ με $\int |f - \varphi| < \varepsilon$.

7. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο και $f, f_n : E \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, μετρήσιμες συναρτήσεις. Λέμε ότι η ακολουθία (f_n) συγκλίνει *κατά μέτρο* στη συνάρτηση f στο E, αν, για κάθε $\varepsilon > 0$, ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(\{x \in E \ : \ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

(α) Δείξτε ότι η ακολουθία (f_n) συγκλίνει κατά μέτρο στη συνάρτηση f, αν και μόνο αν, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε, για κάθε $n \geq n_0$, να ισχύει

$$\lambda(\{x \in E \ : \ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) < \varepsilon.$$

Στη συνέχεια συγκρίνουμε τη σύγκλιση κατά μέτρο με την κατά σημείο (σχεδόν παντού) σύγκλιση.

(β) Βρείτε μια ακολουθία συναρτήσεων (f_n) στο $\mathbb{R}$, με $f_n \to 0$ κατά σημείο, αλλά $\lambda(\{x \in \mathbb{R} \ : \ |f_n(x)| \geq \frac{1}{2}\}) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(γ) Βρείτε μια ακολουθία συναρτήσεων (g_n) στο $[0, 1]$ με $g_n \to 0$ κατά μέτρο, αλλά η ακολουθία $(g_n(x))$ δεν τείνει στο 0, για κανένα $x \in [0, 1]$. (*Υπόδειξη:* Για κατάλληλη αρίθμηση (I_n) των δυαδικών διαστημάτων του $[0, 1]$, θεωρήστε την ακολουθία $g_n = \chi_{I_n}$.)

(δ) Δείξτε ότι αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο σύνολο E, τότε $f_n \to f$ κατά μέτρο στο E. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Egorov αποδείξτε ότι σε σύνολο πεπερασμένου μέτρου η κατά σημείο (σχεδόν παντού) σύγκλιση συνεπάγεται τη σύγκλιση κατά μέτρο, δηλαδή: Αν $\lambda(D) < \infty$ και $f_n, f : D \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) \to f(x)$ σχεδόν για κάθε $x \in D$, τότε $f_n \to f$ κατά μέτρο.

(ε) Αν το $E \subseteq \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμο και $f_n : E \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, είναι μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων που συγκλίνει κατά μέτρο σε μια μετρήσιμη συνάρτηση f, δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία (f_{k_n}) της (f_n) η οποία συγκλίνει στην f σχεδόν παντού στο E. (*Υπόδειξη:* Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έστω $k_n \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $\lambda(\{x \in E \ : \ |f_{k_n}(x) - f(x)| \geq \frac{1}{2^n}\}) < \frac{1}{2^n}$ και, για $n \geq 2$, $k_n > k_{n-1}$. Έστω $A_n = \{x \in E \ : \ |f_{k_n}(x) - f(x)| \geq \frac{1}{2^n}\}$ και $A = \limsup A_n$. Δείξτε ότι $\lambda(A) = 0$ και, για κάθε $x \in E \setminus A$, $f_{k_n}(x) \to f(x)$.)