Βασική Πραγματική και Συναρτησιακή Ανάλυση

2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Ημερομηνία παράδοσης: 25 Ιουνίου 2023

1. Έστω c_{00} ο γραμμικός χώρος των τελικά μηδενικών ακολουθιών.

(α) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει νόρμα $\|\cdot\|$ στον c_{00}, ώστε ο $(c_{00}, \|\cdot\|)$ να είναι χώρος Banach. (Θεωρήστε γνωστό ότι κάθε χώρος με νόρμα πεπερασμένης διάστασης είναι πλήρης.)

(β) Εξετάστε αν υπάρχει μετρική d στον c_{00} ώστε ο (c_{00}, d) να είναι πλήρης μετρικός χώρος.

2. Θεωρούμε τον γραμμικό χώρο $C[0,1]$ των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων στο διάστημα $[0,1]$ με νόρμα την $\|\cdot\|_2$ με $\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$. Αποδείξτε ότι ο $(C[0,1], \|\cdot\|_2)$ δεν είναι χώρος Hilbert.

3. (α) Αποδείξτε ότι ένας χώρος με νόρμα X είναι διαχωρίσιμος αν και μόνο αν υπάρχει αριθμήσιμο υποσύνολο A του X με $\overline{\operatorname{span}(A)} = X$.

(β) Έστω $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ ο χώρος των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων στο κλειστό διάστημα $[0,1]$ με τη supremum νόρμα $\|f\| = \sup\{|f(t)| \mid t \in [0,1]\}$. Θεωρώντας γνωστό το Θεώρημα του Weierstrass που λέει ότι το σύνολο των πολυωνύμων στο $[0,1]$ είναι πυκνό στον $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$, αποδείξτε ότι ο $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ είναι διαχωρίσιμος.

(γ) Αποδείξτε ότι για $1 \le p < \infty$ ο ℓ_p είναι διαχωρίσιμος, αλλά ο ℓ_∞ δεν είναι διαχωρίσιμος.

(δ) Έστω $(C(0,1), \|\cdot\|_\infty)$ ο χώρος των συνεχών και φραγμένων πραγματικών συναρτήσεων στο ανοικτό διάστημα $(0,1)$ με τη supremum νόρμα. Αποδείξτε ότι υπάρχει υπόχωρος του $C(0,1)$ ισομετρικά ισομορφικός με τον ℓ_∞ και συμπεράνατε ότι ο $C(0,1)$ δεν είναι διαχωρίσιμος. (*Υπόδειξη:* Θεωρήστε μια ακολουθία (f_n) στον $C(0,1)$ τέτοια ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty = 1$ και $f_n(t) = 0$ για κάθε $t \notin [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$. Δείξτε ότι ο $T : \ell_\infty \to C(0,1)$ με $T((a(n))) = \sum_{n=1}^\infty a(n) f_n$ είναι ισομετρική εμφύτευση, δηλαδή ισομετρικός ισομορφισμός μεταξύ του ℓ_∞ και του $T(\ell_\infty)$.) Εξηγήστε γιατί το ίδιο επιχείρημα δεν δουλεύει στον $C[0,1]$.

4. (α) Έστω $\varphi : c_0 \to \mathbb{R}$ το γραμμικό συναρτησοειδές με

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x(n) \quad \forall x = (x(n)) \in c_0.$$

Δείξτε ότι το φ είναι φραγμένο, με $\|\varphi\| = 1$, αλλά δεν υπάρχει $x \in B_{c_0}$ με $|\varphi(x)| = \|\varphi\|$.

(β) Έστω $X = (C[-1,1], \|\cdot\|_\infty)$ και $\Psi : X \to \mathbb{R}$ με

$$\Psi(f) = \int_{-1}^{0} f(t)dt - \int_{0}^{1} f(t)dt \quad \forall f \in X.$$

Δείξτε ότι το Ψ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές και βρείτε τη νόρμα του. Στη συνέχεια, δείξτε ότι δεν υπάρχει $f \in B_X$ με $\Psi(f) = \|\Psi\|$.

5. (α) Έστω X χώρος Banach και $f \in X^\star$. Αποδείξτε ότι ο πυρήνας $\mathrm{Ker}f$ είναι κλειστός υπόχωρος του X.

(β) Υποθέτουμε ότι υπάρχει $f \in X^\star$ με $\|f\| = 1$ τέτοιο ώστε, για κάθε $x \in B_X$ να ισχύει $|f(x)| < \|f\|$. Έστω $x_0 \in X$ με $f(x_0) = 1$. Αποδείξτε ότι $\mathrm{dist}(x_0, \mathrm{Ker}f) = 1$, αλλά για κάθε $y \in \mathrm{Ker}f$ ισχύει $\|x_0 - y\| > 1$, δηλαδή δεν υπάρχει βέλτιστη προσέγγιση του x_0 από στοιχείο του $\mathrm{Ker}f$.

6. Έστω H χώρος Hilbert και Y γνήσιος κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H.

(α) Αν $x_0 \in H \setminus Y$, δείξτε ότι

$$\min\{\|x_0 - y\| \ : \ y \in Y\} = \max\{|\langle x_0, z\rangle| \ : \ z \in Y^\perp \ , \ \|z\| = 1\}.$$

(β) Δείξτε ότι υπάρχει $x \in H$ με $\|x\| = 1 = \mathrm{dist}(x, Y)$.

7. Έστω $x = (x(n)) \in \ell_\infty$. Αποδείξτε ότι

$$\mathrm{dist}(x, c_0) = \limsup_n |x(n)|.$$

8. Έστω K κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του c_0. Αποδείξτε ότι το K είναι συμπαγές αν και μόνο αν, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $i_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε, για κάθε $i \geq i_0$ και για κάθε $x = (x(i)) \in K$, να ισχύει $|x(i)| < \varepsilon$.

9. Αποδείξτε ότι, για κάθε $f \in C[0,1]$, ισχύει $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.