Βασική Πραγματική και Συναρτησιακή Ανάλυση (2023–24)
18 Ιουνίου 2024

1. (α) (2 μ.) (i) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Αν $\lambda^*(A) = 0$, δείξτε ότι το A είναι μετρήσιμο. Ισχύει το αντίστροφο;
(ii) Αν το $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο, δείξτε ότι $\lambda^*(A) = 0$. Ισχύει το αντίστροφο;
(iii) (Σ ή Λ) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Ισχύει ότι $\lambda^*(A) = 0$ αν και μόνο αν κάθε υποσύνολο $B \subseteq A$ είναι μετρήσιμο.

(β) (1 μ.) (i) Αν το $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι φραγμένο, αποδείξτε ότι $\lambda^*(A) < +\infty$. Ισχύει το αντίστροφο;
(ii) Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\mathrm{int}(A) \neq \varnothing$, αποδείξτε ότι $\lambda^*(A) > 0$. Ισχύει το αντίστροφο;

2. (1 μ.) (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ με $F(t) = \int_{(-\infty,t]} f$ είναι συνεχής και αύξουσα.

(β) (1.5 μ.) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο με $0 < \lambda(A) < +\infty$. Δείξτε ότι υπάρχει $F \subseteq A$ μετρήσιμο με $\lambda(F) = \frac{1}{2}\lambda(A)$, χρησιμοποιώντας το (α) για κατάλληλη συνάρτηση f.

3. (1.5 μ.) (α) Έστω $(f_n)_{n\geqslant 1}$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Δείξτε ότι οι $\sup\limits_{n\geqslant 1} f_n$, $\inf\limits_{n\geqslant 1} f_n$ και $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις.

(1.5 μ.) (β) (i) Δώστε παράδειγμα συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που δεν είναι μετρήσιμη αλλά η f^2 είναι μετρήσιμη.
(ii) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο και $f : A \to \mathbb{R}$ ώστε η f^2 να είναι μετρήσιμη συνάρτηση και το $\{x \in A \mid f(x) > 0\}$ να είναι μετρήσιμο. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

4. (1+1 μ.) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση.

(α) Δείξτε ότι η f απεικονίζει τα F_σ-σύνολα σε F_σ-σύνολα.

(β) Δείξτε ότι η f απεικονίζει τα μετρήσιμα υποσύνολα του $[a, b]$ σε μετρήσιμα σύνολα αν και μόνο αν η f απεικονίζει τα σύνολα μέτρου 0 σε σύνολα μέτρου 0.

5. (1 μ.) (α) Αποδείξτε το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης: Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο, $f_n : E \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \geqslant 1$, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ μετρήσιμες και $g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $|f_n| \leqslant g$ για κάθε $n \geqslant 1$ και ότι $f_n \xrightarrow{\text{σ.π.}} f$. Τότε, $\int_E f_n \xrightarrow{n\to\infty} \int_E f$.

(1.5 μ.) (β) (i) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [0, 1] \to [0, +\infty]$ με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & , \ x \in (0, 1] \\ +\infty & , \ x = 0 \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και υπολογίστε το

$$\int_0^1 f(x)\, d\lambda(x) = \int_{[0,1]} f.$$

(ii) Υπολογίστε το $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1 + n^2x^2}\, d\lambda(x)$.

[*Υπόδειξη:* Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης ή να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα ακριβώς, με πλήρη αιτιολόγηση.]

Καλή Επιτυχία!