Βασική Πραγματική και Συναρτησιακή Ανάλυση (2023–24)
17 Σεπτεμβρίου 2024

1. (α) (1 μ.) Έστω (A_n), $n \geqslant 1$ αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι

$$\lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n).$$

(β) (1.5 μ.) Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και $A \subseteq [a,b]$ με $\lambda^*(A) > 0$. Δείξτε ότι υπάρχουν $x, y \in A$ με $x - y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

2. (1 μ.) (α) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο και $f, g : A \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f + g : A \to \mathbb{R}$ είναι επίσης μετρήσιμη.

(β) (1.5 μ.) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση. Δείξτε με ένα παράδειγμα ότι αν η f είναι συνεχής σχεδόν παντού τότε δεν είναι υποχρεωτικά ίση σχεδόν παντού με συνεχή συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbb{R}$. Επίσης, με ένα άλλο παράδειγμα, δείξτε ότι δεν ισχύει ούτε το αντίστροφο (δηλαδή, μια συνάρτηση σχεδόν παντού ίση με συνεχή συνάρτηση δεν είναι απαραίτητα συνεχής σχεδόν παντού).

3. (1.5 μ.) (α) Έστω (A_n) ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \{x \in \mathbb{R} : x \in A_n \text{ για άπειρα } n\}.$$

Δείξτε ότι

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Κατόπιν, δείξτε ότι αν (A_n), $n \geqslant 1$ μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) < \infty$ τότε $\lambda\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0$.

(1 μ.) (β) Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \geqslant 1$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών (ε_n) με $\varepsilon_n \to 0^+$. Υποθέτουμε ότι $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\{x \in \mathbb{R} : f_n(x) \geqslant \varepsilon_n\}) < \infty$. Δείξτε ότι υπάρχει $Z \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(Z) = 0$ ώστε $f_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ για κάθε $x \notin Z$.

4. (1 μ.) (α) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο και $f : A \to \mathbb{R}$ συνάρτηση τέτοια ώστε το σύνολο $\{x \in A : f(x) > q\}$ να είναι μετρήσιμο για κάθε ρητό $q \in \mathbb{Q}$. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

(1.5 μ.) (β) Έστω $f, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $\displaystyle\int |f_n - f| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Δείξτε ότι για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο ισχύει ότι $\displaystyle\int_E f_n \to \int_E f$ και $\displaystyle\int f_n^+ \to \int f^+$.

<u>Υπόδειξη:</u> Αν $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση, εκφράστε την g^+ συναρτήσει της g και της $|g|$.

5. (1.5 μ.) (α) Υπολογίστε με πλήρη αιτιολόγηση το άθροισμα

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi/2} (1 - \sqrt{\sin x})^n \cos x \, dx.$$

(1 μ.) (β) Αποδείξτε ότι $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x}{1 + n^2x^2} \, d\lambda(x) = 0$, όπου $\int_0^1 g(x)\, d\lambda(x)$ το ολοκλήρωμα Lebesgue της $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, είτε μέσω του Θεωρήματος Κυριαρχημένης Σύγκλισης είτε με απευθείας υπολογισμό και αιτιολόγηση.

Καλή Επιτυχία!