Βασική Πραγματική και Συναρτησιακή Ανάλυση

Πρόχειρες Σημειώσεις

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα – 2023

Περιεχόμενα

Μέρος I

Μέτρο και Ολοκλήρωμα Lebesgue

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Μέτρο Lebesgue

1.1 Εισαγωγή

Το βασικό μειονέκτημα του ολοκληρώματος Riemann είναι ότι δεν συμπεριφέρεται αρκετά καλά σε σχέση με τις συγκλίνουσες ακολουθίες συναρτήσεων: Έστω $f_n, f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Αν υποθέσουμε ότι οι f_n είναι Riemann ολοκληρώσιμες και ότι $f_n \to f$ κατά σημείο, δεν μπορούμε πάντα να συμπεράνουμε ότι

$$\int_a^b f_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx \tag{1.1.1}$$

(κάτι που ισχύει αν υποθέσουμε ότι η (f_n) συγκλίνει στην f *ομοιόμορφα*).

Για την ακρίβεια, με την υπόθεση της κατά σημείο σύγκλισης δεν μπορούμε κάν να συμπεράνουμε ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη: αυτό δεν ισχύει γενικά, ακόμα κι αν υποθέσουμε ότι $f_n \nearrow f$.

Παράδειγμα 1.1.1. Θεωρούμε την συνάρτηση του Dirichlet $f = \chi_{\mathbb{Q}} : [0,1] \to \mathbb{R}$. Δηλαδή,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}$$

Εύκολα ελέγχεται ότι η f δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Αν όμως θεωρήσουμε μια αρίθμηση $\{q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots\}$ του $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, και αν ορίσουμε $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{q_1, \ldots, q_n\} \\ 0, & x \notin \{q_1, \ldots, q_n\} \end{cases}$$

τότε $f_n \nearrow f$ στο $[0,1]$ και κάθε f_n είναι Riemann ολοκληρώσιμη, αφού είναι φραγμένη και έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία ασυνέχειας.

Ένα δεύτερο μειονέκτημα του ολοκληρώματος Riemann είναι ότι η κλάση των συναρτήσεων που είναι Riemann ολοκληρώσιμες είναι σχετικά περιορισμένη: μπορούμε να ολοκληρώ- νουμε μόνο φραγμένες συναρτήσεις που ορίζονται σε κλειστά και φραγμένα διαστήματα. Επιπλέον, συναρτήσεις που διαφέρουν από σταθερή συνάρτηση σε ένα μικρό (αριθμήσιμο) σύνολο μπορεί να μην είναι Riemann ολοκληρώσιμες (παράδειγμα, η συνάρτηση του Dirichlet $\chi_{\mathbb{Q}}$).

Όπως θα δούμε στην συνέχεια, μια φραγμένη συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν είναι συνεχής «σχεδόν παντού». Η έννοια αυτή θα οριστεί αυστηρά αργότερα, μπορούμε όμως να δώσουμε κάποια διαισθητική ερμηνεία χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Riemann: Αν η f είναι ολοκληρώσιμη, για λεπτές διαμερίσεις $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ του $[a, b]$ η ποσότητα

$$U(f, P) - L(f, P) = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k) \tag{1.1.2}$$

πρέπει να είναι μικρή. Αυτό σημαίνει ότι η f δεν μπορεί να έχει μεγάλη «ταλάντωση» σε «πολλά σημεία».

Η ιδέα του Lebesgue ήταν να προσεγγίσει το εμβαδόν κάτω από το γράφημα μιας θετικής συνάρτησης ξεκινώντας με διαμερίσεις του πεδίου τιμών και όχι του πεδίου ορισμού της. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f : A \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε, για απλότητα, ότι η f είναι φραγμένη και ότι $f(x) \geqslant 0$ για κάθε $x \in A$, και θέτουμε $m = \inf(f)$, $M = \sup(f)$. Αν

$$\{m = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = M\} \tag{1.1.3}$$

είναι μια διαμέριση του πεδίου τιμών $[m, M]$, το ολοκλήρωμα της f προσεγγίζεται από αθροίσματα της μορφής

$$\sum_{k=0}^{n-1} y_k \cdot \ell(B_k) \tag{1.1.4}$$

όπου $\ell(B_k)$ το «μήκος» του συνόλου

$$B_k = \{x \in A \mid y_k \leq f(x) < y_{k+1}\}. \tag{1.1.5}$$

Για να προχωρήσουμε με αυτόν τον τρόπο, πρέπει βέβαια να ορίσουμε αυστηρά με ποιόν τρόπο «μετράμε» το «μήκος» ενός συνόλου που δεν είναι διάστημα (τα σύνολα B_k μπορεί να είναι αρκετά πολύπλοκα υποσύνολα της πραγματικής ευθείας).

Ο Lebesgue ανέπτυξε μια θεωρία «μέτρου» και ολοκλήρωσης στη διδακτορική του διατριβή, η οποία δημοσιεύτηκε το 1902. Το ολοκλήρωμα Lebesgue επιτυγχάνει τα εξής:

(i) Επεκτείνει το ολοκλήρωμα Riemann σε μια ευρύτερη κλάση συναρτήσεων.

(ii) Συμπεριφέρεται καλύτερα σε σχέση με τα όρια ακολουθιών συναρτήσεων.

(iii) Επιτρέπει να ολοκληρώνουμε πάνω από «περισσότερα» σύνολα, όχι μόνο πάνω από διαστήματα.

1.2 Εξωτερικό μέτρο Lebesgue

Θα θέλαμε να ορίσουμε το «μήκος» κάθε υποσυνόλου A του $\mathbb{R}$, δηλαδή να αντιστοιχίσουμε σε κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ έναν μη αρνητικό αριθμό $\lambda(A)$ (ή το $+\infty$). Είναι λογικό να ζητήσουμε να ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) $\lambda([a, b]) = b - a$.

(ii) $\lambda(A + x) = \lambda(A)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(iii) Αν (A_n) είναι μια ακολουθία ξένων ανά δύο υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, τότε

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) \tag{1.2.1}$$

(αριθμήσιμη προσθετικότητα).

Όπως θα δούμε, η τελευταία ιδιότητα δημιουργεί προβλήματα. Ακόμα κι αν ζητήσουμε την προσθετικότητα μόνο για ενώσεις πεπερασμένων το πλήθος ξένων ανά δύο συνόλων, αποδεικνύεται (αν δεχτούμε το Αξίωμα της Επιλογής) ότι *δεν* υπάρχει τρόπος να ορίσουμε το «μήκος» έτσι ώστε να ισχύουν οι δύο πρώτες ιδιότητες και η

$$\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B) \tag{1.2.2}$$

για όλα τα $A, B \subset \mathbb{R}$ με $A \cap B = \emptyset$. Η στρατηγική που θα ακολουθήσουμε είναι η εξής: αντί να περιορίσουμε τις απαιτήσεις μας, θα περιοριστούμε σε μία κλάση υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ στην οποία μπορεί να οριστεί το μήκος λ έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι (i), (ii) και (iii). Αυτά θα είναι τα «μετρήσιμα» σύνολα. Το ευτύχημα είναι ότι η κλάση αυτή είναι αρκετά μεγάλη.

§1. Ορισμός του εξωτερικού μέτρου Lebesgue

Σε κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ θα αντιστοιχίσουμε έναν αριθμό $\lambda^*(A) \geqslant 0$ ή $+\infty$, το **εξωτερικό μέτρο** του A.

Έστω $I = (a, b)$ ένα φραγμένο ανοικτό διάστημα. Το μήκος του I συμβολίζεται με

$$\ell(I) := b - a. \tag{1.2.3}$$

Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ και (I_n) μια πεπερασμένη ή άπειρη ακολουθία φραγμένων ανοικτών διαστημάτων με την ιδιότητα $A \subseteq \bigcup_n I_n$, λέμε ότι η (I_n) είναι μια **κάλυψη** του A. Αν η (I_n) είναι κάλυψη του A, το άθροισμα $\sum_n \ell(I_n)$ δίνει μια «από πάνω» εκτίμηση για το «μέτρο» του A. Είναι δηλαδή λογικό να ζητήσουμε

$$\lambda^*(A) \leq \sum_n \ell(I_n) \tag{1.2.4}$$

για όλες τις καλύψεις του A. Έτσι, οδηγούμαστε στον εξής ορισμό.

Ορισμός 1.2.1 (εξωτερικό μέτρο Lebesgue). Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Το **εξωτερικό μέτρο** του A είναι το

$$\lambda^*(A) = \inf\left\{ \sum_n \ell(I_n) : (I_n) \ \textit{κάλυψη του } A \right\}. \tag{1.2.5}$$

Παρατηρήσεις 1.2.2. (α) Μπορούμε, αν ορίσουμε $\ell(\emptyset) = 0$ και αν θεωρήσουμε το κενό σύνολο ως «διάστημα», να θεωρούμε ότι οι καλύψεις στον ορισμό είναι πάντα άπειρες αριθμήσιμες. Αν (I_n) είναι μια κάλυψη του A από πεπερασμένα το πλήθος (γνήσια) φραγμένα ανοικτά διαστήματα, την επεκτείνουμε σε «άπειρη» κάλυψη παίρνοντας επιπλέον το κενό σύνολο άπειρες φορές. Για τον λόγο αυτό, θα γράφουμε συνήθως $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ για τις καλύψεις συνόλων, $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n)$ για τις εκτιμήσεις των εξωτερικών μέτρων, και ο ορισμός μας γίνεται

$$\lambda^*(A) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \mid A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \ I_n \text{ ανοικτό διάστημα ή } \emptyset \right\}. \tag{1.2.6}$$

(β) Συμφωνούμε ότι $\inf\{+\infty\} = +\infty$. Άρα, αν συμβεί να έχουμε

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) = +\infty, \tag{1.2.7}$$

τότε $\lambda^*(A) = +\infty$.

(γ) Με την παραπάνω σύμβαση, το εξωτερικό μέτρο ορίζεται καλά για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ και είναι μη αρνητικός αριθμός ή $+\infty$. Πράγματι, κάθε υποσύνολο του $\mathbb{R}$ δέχεται τουλάχιστον μία κάλυψη, την $I_n = (-n, n)$, $n = 1, 2, \ldots$.

§2. Ιδιότητες του εξωτερικού μέτρου Lebesgue

Οι επόμενες Προτάσεις περιγράφουν τις βασικές ιδιότητες του εξωτερικού μέτρου Lebesgue.

Πρόταση 1.2.3. *Αν $A \subseteq B$, τότε $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$.*

Απόδειξη. Αν $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, τότε $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Άρα,

$$\Big\{ \sum_n \ell(I_n) : (I_n) \text{ κάλυψη του } A \Big\} \supseteq \Big\{ \sum_n \ell(I_n) : (I_n) \text{ κάλυψη του } B \Big\}, \tag{1.2.8}$$

απ¨ όπου έπεται ότι $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$. □

Πρόταση 1.2.4. *Αν το A είναι πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο σύνολο, τότε $\lambda^*(A) = 0$.*

Απόδειξη. Έστω $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ θεωρούμε την ακολουθία ανοικτών διαστημάτων

$$I_n = \left(x_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right). \tag{1.2.9}$$

Τότε, $A \subseteq \bigcup_n I_n$ και

$$\sum_n \ell(I_n) = \sum_n \frac{\varepsilon}{2^n} \leq \varepsilon. \tag{1.2.10}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $\lambda^*(A) = 0$. □

Πρόταση 1.2.5. *$\lambda^*(A + x) = \lambda^*(A)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Αν $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, τότε $A + x \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$, όπου $J_n = I_n + x$. Παρατηρήστε ότι $\ell(I + x) = \ell(I) = b - a$ για κάθε ανοικτό διάστημα $I = (a, b)$. Συνεπώς,

$$\lambda^*(A + x) \leq \sum_n \ell(J_n) = \sum_n \ell(I_n). \tag{1.2.11}$$

Παίρνοντας infimum ως προς όλες τις καλύψεις (I_n) του A, συμπεραίνουμε ότι

$$\lambda^*(A + x) \leq \lambda^*(A). \tag{1.2.12}$$

Η αντίστροφη ανισότητα αποδεικνύεται με ανάλογο τρόπο. □

Πρόταση 1.2.6. *$\lambda^*([a, b]) = b - a$.*

Απόδειξη. Για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε $[a,b] \subset I_\varepsilon := (a-\varepsilon, b+\varepsilon)$. Άρα,

$$\lambda^*([a,b]) \leq \ell(I_\varepsilon) = (b-a) + 2\varepsilon. \tag{1.2.13}$$

Συνεπώς, $\lambda^*([a,b]) \leq b-a$.

Για την αντίστροφη ανισότητα πρέπει να δείξουμε ότι αν (I_n) είναι μια καλυψη του $[a,b]$ από ανοικτά διαστήματα, τότε

$$b - a \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n). \tag{1.2.14}$$

Βήμα 1: Έστω ότι $[a,b] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Αφού το $[a,b]$ είναι συμπαγές, από το Θεώρημα Heine-Borel υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη της (I_n): μπορούμε δηλαδή να βρούμε $k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$[a,b] \subset I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_k. \tag{1.2.15}$$

Βήμα 2: Έστω ότι $[a,b] \subset (c_1,d_1) \cup \cdots \cup (c_k,d_k)$. Θα δείξουμε ότι

$$b - a < \sum_{n=1}^{k} (d_n - c_n). \tag{1.2.16}$$

Υπάρχει n_1 ώστε $a \in (c_{n_1}, d_{n_1})$. Αν $d_{n_1} > b$, τότε

$$b - a < d_{n_1} - c_{n_1} \leq \sum_{n=1}^{k} (d_n - c_n). \tag{1.2.17}$$

Αν $d_{n_1} \leq b$, τότε $d_{n_1} \in (a,b]$, άρα υπάρχει n_2 ώστε $d_{n_1} \in (c_{n_2}, d_{n_2})$. Αν $d_{n_2} \leq b$, τότε $d_{n_2} \in (a,b]$, άρα υπάρχει n_3 ώστε $d_{n_2} \in (c_{n_3}, d_{n_3})$. Συνεχίζοντας έτσι, φτάνουμε σε κάποιον δείκτη n_s ώστε $b < d_{n_s}$ (στην χειρότερη περίπτωση εξαντλώντας όλα τα (c_n, d_n): υπάρχει n ώστε $c_n < b < d_n$).

Έχουμε λοιπόν βρεί $n_1, \ldots, n_s$ ώστε $c_{n_1} < a$, $b < d_{n_s}$ και

$$c_{n_2} < d_{n_1} < d_{n_2},\ c_{n_3} < d_{n_2} < d_{n_3},\ \ldots,\ c_{n_s} < d_{n_{s-1}} < d_{n_s}. \tag{1.2.18}$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{k} (d_n - c_n) &\geqslant (d_{n_s} - c_{n_s}) + (d_{n_{s-1}} - c_{n_{s-1}}) + \cdots + (d_{n_2} - c_{n_2}) + (d_{n_1} - c_{n_1}) \\
&\geqslant (d_{n_s} - c_{n_s}) + (c_{n_s} - c_{n_{s-1}}) + \cdots + (c_{n_3} - c_{n_2}) + (c_{n_2} - c_{n_1}) \\
&= d_{n_s} - c_{n_1} \\
&> b - a.
\end{aligned}$$

Από τα Βήματα 1 και 2 προκύπτει ότι

$$b - a < \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \tag{1.2.19}$$

για κάθε κάλυψη (I_n) του $[a,b]$. Άρα, $\lambda^*([a,b]) \geqslant b-a$. □

Παρατήρηση 1.2.7. Από τις Προτάσεις 1.2.4 και 1.2.6 προκύπτει άμεσα ότι κάθε κλειστό διάστημα $[a,b]$ είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο.

Πρόταση 1.2.8. $\lambda^*((a,b)) = b - a$.

Απόδειξη. Για κάθε $0 < \varepsilon < (b-a)/2$ έχουμε $[a+\varepsilon, b-\varepsilon] \subset (a,b) \subset [a,b]$. Από την Πρόταση 1.2.3,

$$(b-a) - 2\varepsilon = \lambda^*([a+\varepsilon, b-\varepsilon]) \leq \lambda^*((a,b)) \leq \lambda^*([a,b]) = b - a. \tag{1.2.20}$$

Αφού η ανισότητα ισχύει για όλα τα «μικρά» $\varepsilon > 0$, βλέπουμε ότι $\lambda^*((a,b)) = b - a$. □

Πρόταση 1.2.9. $\lambda^*((a,+\infty)) = +\infty$.

Απόδειξη. Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ έχουμε $(a,+\infty) \supset (a, a+N)$, άρα

$$\lambda^*((a,+\infty)) \geqslant a + N - a = N. \tag{1.2.21}$$

Άρα, $\lambda^*((a+\infty)) = +\infty$. □

Πρόταση 1.2.10 (αριθμήσιμη υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου). *Για κάθε πεπερασμένη ή άπειρη ακολουθία (A_n) υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ ισχύει*

$$\lambda^*\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \lambda^*(A_n). \tag{1.2.22}$$

Απόδειξη. Αν το δεξιό μέλος της ανισότητας είναι $+\infty$ δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\sum_n \lambda^*(A_n) < +\infty$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κάλυψη (J_s) του $\bigcup_n A_n$ από ανοικτά διαστήματα, ώστε $\sum_s \ell(J_s) < \sum_n \lambda^*(A_n) + \varepsilon$.

Για κάθε n θεωρούμε κάλυψη $(I_n^k)_k$ του A_n με την ιδιότητα

$$\sum_k \ell(I_n^k) < \lambda^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}. \tag{1.2.23}$$

Αν πάρουμε σαν (J_s) την οικογένεια $(I_n^k)_{n,k}$ όλων αυτών των ανοικτών διαστημάτων, τότε

$$\bigcup_n A_n \subset \bigcup_{n,k} I_n^k \tag{1.2.24}$$

και

$$\sum_{n,k} \ell(I_n^k) = \sum_n \sum_k \ell(I_n^k) < \sum_n \left(\lambda^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \sum_n \lambda^*(A_n) + \varepsilon. \tag{1.2.25}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται η (1.2.22). □

1.3 Μετρήσιμα σύνολα

Ο αρχικός μας στόχος ήταν να πετύχουμε την αριθμήσιμη προσθετικότητα του «μέτρου»: θα θέλαμε λοιπόν να ισχύει η

$$\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n) \tag{1.3.1}$$

αν τα A_n είναι ξένα ανά δύο υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Το εξωτερικό μέτρο που ορίσαμε δεν έχει την ιδιότητα της προσθετικότητας: ακόμα κι αν περιοριστούμε στην περίπτωση *δύο* ξένων υποσυνόλων A και B του $[0, 1]$, μπορούμε να δώσουμε παράδειγμα όπου

$$\lambda^*(A \cup B) < \lambda^*(A) + \lambda^*(B). \tag{1.3.2}$$

Η κατασκευή ενός τέτοιου παραδείγματος δεν είναι απλή: χρησιμοποιεί το Αξίωμα της Επιλογής (βλέπε §1.6).

Αυτό που θα κάνουμε είναι να περιοριστούμε σε μία κλάση $\mathcal{M}$ υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ έτσι ώστε ο περιορισμός της «συνάρτησης εξωτερικού μέτρου» λ^* στην $\mathcal{M}$ να ικανοποιεί την ιδιότητα της αριθμήσιμης προσθετικότητας. Η $\mathcal{M}$ είναι η κλάση των **Lebesgue μετρήσιμων συνόλων**.

Ορισμός 1.3.1 (Lebesgue μετρήσιμο σύνολο). Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ λέγεται **Lebesgue μετρήσιμο** αν για κάθε $X \subseteq \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lambda^*(X) = \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*(X \cap A^c). \tag{1.3.3}$$

Δηλαδή, ένα σύνολο είναι μετρήσιμο αν «χωρίζει σωστά» – ως προς το εξωτερικό μέτρο – οποιοδήποτε άλλο σύνολο. Η κλάση των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων συμβολίζεται με $\mathcal{M}$. Ο περιορισμός του λ^* στην $\mathcal{M}$ λέγεται **μέτρο Lebesgue**.

Παρατήρηση 1.3.2. Από την $X = (X \cap A) \cup (X \cap A^c)$ και από την υποπροσθετικότητα του λ^*, έχουμε πάντα την ανισότητα

$$\lambda^*(X) \leq \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*(X \cap A^c). \tag{1.3.4}$$

Αυτό λοιπόν που χρειαζόμαστε για να δείξουμε την μετρησιμότητα του A είναι η αντίστροφη ανισότητα

$$\lambda^*(X) \geqslant \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*(X \cap A^c) \tag{1.3.5}$$

για κάθε $X \subseteq \mathbb{R}$.

§1. Βασικές ιδιότητες της κλάσης των μετρήσιμων συνόλων

Οι επόμενες Προτάσεις περιγράφουν τις βασικές ιδιότητες της κλάσης των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων.

Πρόταση 1.3.3. *Αν $\lambda^*(A) = 0$, τότε $A \in \mathcal{M}$.*

Απόδειξη. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$. Τότε, $X \cap A \subseteq A$ άρα $\lambda^*(X \cap A) = 0$. Επίσης, $X \supseteq X \cap A^c$ άρα

$$\lambda^*(X) \geqslant \lambda^*(X \cap A^c) = \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*(X \cap A^c). \tag{1.3.6}$$

Από την Παρατήρηση 1.3.2 έπεται το ζητούμενο. □

Πρόταση 1.3.4. *Το συμπλήρωμα μετρήσιμου συνόλου είναι μετρήσιμο σύνολο: αν $A \in \mathcal{M}$ τότε $A^c = \mathbb{R} \setminus A \in \mathcal{M}$.*

Απόδειξη. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$. Παρατηρήστε ότι

$$\lambda^*(X) \geqslant \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*(X \cap A^c) = \lambda^*(X \cap A^c) + \lambda^*(X \cap (A^c)^c), \tag{1.3.7}$$

όπου η πρώτη ανισότητα ισχύει διότι $A \in \mathcal{M}$ και η ισότητα μετά προκύπτει από το γεγονός ότι $A = (A^c)^c$. Από την Παρατήρηση 1.3.2 έπεται το ζητούμενο. □.

Πρόταση 1.3.5. *Η ένωση δύο μετρήσιμων συνόλων είναι μετρήσιμο σύνολο: αν $A, B \in \mathcal{M}$, τότε $A \cup B \in \mathcal{M}$.*

Απόδειξη. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι

$$X \cap (A \cup B) = X \cap (A \cup (A^c \cap B)) = (X \cap A) \cup (X \cap A^c \cap B) \tag{1.3.8}$$

και, χρησιμοποιώντας την μετρησιμότητα των A και B, έχουμε

$$\begin{aligned}
\lambda^*(X \cap (A \cup B)) + \lambda^*(X \cap (A \cup B)^c) &= \lambda^*((X \cap A) \cup (X \cap A^c \cap B)) \\
&\quad + \lambda^*(X \cap (A \cup B)^c) \\
&\leq \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*((X \cap A^c) \cap B) \\
&\quad + \lambda^*((X \cap A^c) \cap B^c) \\
&= \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*(X \cap A^c) \\
&= \lambda^*(X).
\end{aligned}$$

Από την Παρατήρηση 1.3.2 έπεται ότι το $A \cup B$ είναι μετρήσιμο. □

Πρόταση 1.3.6. *Αν $A, B \in \mathcal{M}$ και $A \cap B = \emptyset$ τότε, για κάθε $X \subseteq \mathbb{R}$,*

$$\lambda^*(X \cap (A \cup B)) = \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*(X \cap B). \tag{1.3.9}$$

Απόδειξη. Αρκεί να υποθέσουμε ότι το ένα από τα δύο σύνολα, ας πούμε το A, είναι μετρήσιμο. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\lambda^*(X \cap (A \cup B)) &= \lambda^*([X \cap (A \cup B)] \cap A) + \lambda^*([X \cap (A \cup B)] \cap A^c) \\
&= \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*(x \cap B),
\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $[X \cap (A \cup B)] \cap A = X \cap A$ και $[X \cap (A \cup B)] \cap A^c = (X \cap A \cap A^c) \cup (X \cap B \cap A^c) = X \cap B$, λόγω της $A \cap B = \emptyset$. □

Πόρισμα 1.3.7. *Αν $A, B \in \mathcal{M}$ και $A \cap B = \emptyset$, τότε*

$$\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(A) + \lambda^*(B). \tag{1.3.10}$$

Απόδειξη. Παίρνουμε $X = \mathbb{R}$ στην Πρόταση 1.3.6. □

Πόρισμα 1.3.8. *Αν $B_1, \ldots, B_m$ είναι ξένα ανά δύο σύνολα στην $\mathcal{M}$ τότε, για κάθε $X \subseteq \mathbb{R}$,*

$$\lambda^*(X \cap (B_1 \cup \cdots \cup B_m)) = \sum_{i=n}^{m} \lambda^*(X \cap B_n). \tag{1.3.11}$$

Απόδειξη. Με επαγωγή ως προς m, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1.3.6. □

Πρόταση 1.3.9. *Η τομή δύο μετρήσιμων συνόλων είναι μετρήσιμο σύνολο: αν $A, B \in \mathcal{M}$, τότε $A \cap B \in \mathcal{M}$.*

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$ και χρησιμοποιούμε τις Προτάσεις 1.3.4 και 1.3.5. □

Πρόταση 1.3.10. *Αν $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία μετρήσιμων συνόλων, τότε η ένωσή τους $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι μετρήσιμο σύνολο.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία συνόλων

$$B_1 = A_1,\ B_2 = A_2 \setminus A_1 = A_2 \cap A_1^c, \dots,\ B_n = A_n \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}), \dots. \tag{1.3.12}$$

Από τις ιδιότητες που έχουμε αποδείξει, κάθε B_n είναι μετρήσιμο σύνολο. Από τον τρόπο ορισμού τους, τα B_n είναι ξένα ανά δύο και

$$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n. \tag{1.3.13}$$

Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$, το $B_1 \cup \cdots \cup B_m$ είναι μετρήσιμο, άρα

$$\begin{aligned}
\lambda^*(X) &= \lambda^*(X \cap (B_1 \cup \cdots \cup B_m)) + \lambda^*(X \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_m)) \\
&= \sum_{n=1}^{m} \lambda^*(X \cap B_n) + \lambda^*(X \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_m)) \\
&\geqslant \sum_{n=1}^{m} \lambda^*(X \cap B_n) + \lambda^*(X \setminus A),
\end{aligned}$$

από το Πόρισμα 1.3.8 και τον εγκλεισμό $X \setminus A \subseteq X \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_m)$. Αφήνοντας το $m \to \infty$, παίρνουμε

$$\lambda^*(X) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(X \cap B_n) + \lambda^*(X \setminus A) \geqslant \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*(X \setminus A), \tag{1.3.14}$$

λόγω της αριθμήσιμης υποπροσθετικότητας του εξωτερικού μέτρου. Άρα, το A είναι μετρήσιμο. □

1.4 Μέτρο Lebesgue

Συνοψίζουμε όσα έχουμε κάνει ως τώρα. Ορίσαμε το εξωτερικό μέτρο $\lambda^*(A)$ για κάθε υποσύνολο A του $\mathbb{R}$. Θεωρήσαμε μια κλάση $\mathcal{M}$ υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, τα οποία ονομάσαμε μετρήσιμα σύνολα. Είδαμε ότι αυτή η κλάση έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) $\mathbb{R} \in \mathcal{M}$.

(ii) $A \in \mathcal{M} \Longrightarrow \mathbb{R} \setminus A \in \mathcal{M}$.

(iii) Αν $A_n \in \mathcal{M}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

Οι ιδιότητες αυτές χαρακτηρίζουν τις **σ-άλγεβρες**:

Ορισμός 1.4.1 (σ-άλγεβρα). Έστω Ω ένα μη κενό σύνολο. Μια κλάση $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του Ω λέγεται σ-άλγεβρα αν

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$.

(ii) Αν $A \in \mathcal{A}$, τότε $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$.

(iii) Αν $A_n \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Με άλλα λόγια, μια κλάση υποσυνόλων του Ω λέγεται σ-άλγεβρα αν είναι «κλειστή ως προς συμπληρώματα και αριθμήσιμες ενώσεις». Έπεται ότι είναι κλειστή και ως προς αριθμήσιμες τομές και διαφορές:

(iv) Αν $A_n \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c \in \mathcal{A}.$$

(v) Αν $A, B \in \mathcal{A}$, τότε $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$.

Παρατήρηση 1.4.2. Ειδικότερα, αν $A_n \in \mathcal{M}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$, και αν $A, B \in \mathcal{M}$, τότε $A \setminus B \in \mathcal{M}$.

Με βάση τον Ορισμό 1.4.1, η κλάση $\mathcal{M}$ των μετρήσιμων συνόλων είναι σ-άλγεβρα. Ορίζουμε $\lambda : \mathcal{M} \to [0, +\infty)$ με $A \mapsto \lambda(A) := \lambda^*(A)$. Δηλαδή, η λ είναι ο περιορισμός της συνολοσυνάρτησης λ^* (του εξωτερικού μέτρου) στην κλάση $\mathcal{M}$. Η συνάρτηση λ ονομάζεται **μέτρο Lebesgue** ή απλά **μέτρο**.

Με την παραπάνω ορολογία, έχουμε δείξει το εξής:

Θεώρημα 1.4.3. *Έστω $\mathcal{M} = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A$ Lebesgue μετρήσιμο$\}$. Η $\mathcal{M}$ είναι σ-άλγεβρα και η συνολοσυνάρτηση $\lambda : \mathcal{M} \to [0, +\infty)$ που ορίζεται μέσω της*

$$A \mapsto \lambda(A) := \lambda^*(A) \tag{1.4.1}$$

είναι **αριθμήσιμα προσθετική** *(ή, σ-προσθετική). Δηλαδή, αν $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία ξένων ανά δύο Lebesgue μετρήσιμων συνόλων ($A_n \in \mathcal{M}$ για κάθε n και $A_n \cap A_m = \emptyset$ αν $n \neq m$), τότε*

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n). \tag{1.4.2}$$

Απόδειξη. Μένει να δείξουμε ότι το μέτρο λ είναι αριθμήσιμα προσθετική συνολοσυνάρτηση. Έστω A_n, $n \in \mathbb{N}$, ξένα ανά δύο μετρήσιμα σύνολα. Από την Πρόταση 1.3.10 το $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι μετρήσιμο.

Χρησιμοποιώντας τη μονοτονία του μέτρου και το Πόρισμα 1.3.7, βλέπουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{m} \lambda(A_n) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n\right) \leq \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \tag{1.4.3}$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$, άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) \leq \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right). \tag{1.4.4}$$

Η αντίστροφη ανισότητα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) \geqslant \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \tag{1.4.5}$$

προκύπτει άμεσα από την αριθμήσιμη υποπροσθετικότητα του (εξωτερικού) μέτρου (Πρόταση 1.2.10). □

Ποιά σύνολα είναι μετρήσιμα; Ήδη γνωρίζουμε ότι τα σύνολα που έχουν εξωτερικό μέτρο 0 (και τα συμπληρώματά τους) ανήκουν στην $\mathcal{M}$. Όπως θα δούμε, η $\mathcal{M}$ είναι αρκετά πλούσια: όλα τα «καλά» - από τοπολογική άποψη - υποσύνολα του $\mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμα.

Πρόταση 1.4.4. *Όλα τα διαστήματα είναι Lebesgue μετρήσιμα.*

Απόδειξη. (α) Θεωρούμε πρώτα διάστημα της μορφής $J = [a, +\infty)$. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\lambda^*(X) \geqslant \lambda^*(X \cap [a, +\infty)) + \lambda^*(X \cap (-\infty, a)). \tag{1.4.6}$$

Σύμφωνα με τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου, αρκεί να δείξουμε ότι αν $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια κάλυψη του X από ανοιχτά διαστήματα, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \geqslant \lambda^*(X \cap [a, +\infty)) + \lambda^*(X \cap (-\infty, a)). \tag{1.4.7}$$

Έστω ότι $X \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, και ας υποθέσουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < +\infty$ (αλλιώς, δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε). Θα δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) + \varepsilon \geqslant \lambda^*(X \cap [a, +\infty)) + \lambda^*(X \cap (-\infty, a)). \tag{1.4.8}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$I'_n = I_n \cap (a, +\infty) \quad , \quad I''_n = I_n \cap (-\infty, a), \tag{1.4.9}$$

και

$$I_0 = \left(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2}\right). \tag{1.4.10}$$

Καθένα από τα I'_n, I''_n είναι ανοικτό διάστημα ή το κενό σύνολο, και (εξηγήστε γιατί)

$$\ell(I_n) = \ell(I'_n) + \ell(I''_n). \tag{1.4.11}$$

Επίσης,

$$X \cap [a, +\infty) \subseteq I_0 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} I'_n \tag{1.4.12}$$

και

$$X \cap (-\infty, a) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I''_n. \tag{1.4.13}$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\lambda^*(X\cap[a,+\infty))+\lambda^*(X\cap(-\infty,a)) &\leq \ell(I_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\ell(I_n')+\sum_{n=1}^{\infty}\ell(I_n'')\\ &= \varepsilon+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ell(I_n')+\ell(I_n'')\right)\\ &= \varepsilon+\sum_{n=1}^{\infty}\ell(I_n).\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι το $J=[a,+\infty)$ είναι μετρήσιμο.

(β) Αν $J=(a,+\infty)$, τότε γράφοντας

$$(a,+\infty)=\bigcup_{n=1}^{\infty}[a+1/n,+\infty)$$

και χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1.3.10 και το (α), βλέπουμε ότι $J\in\mathcal{M}$.

(γ) Τα $(-\infty,a)$ και $(-\infty,a]$ είναι μετρήσιμα ως συμπληρώματα μετρήσιμων συνόλων.

(δ) Εύκολα βλέπουμε ότι διαστήματα της μορφής $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$ και (a,b) είναι μετρήσιμα. Για παράδειγμα,

$$[a,b]=\mathbb{R}\setminus((-\infty,a)\cup(b,+\infty)) \tag{1.4.14}$$

δηλαδή το $[a,b]$ είναι μετρήσιμο ως συμπλήρωμα του μετρήσιμου συνόλου $(-\infty,a)\cup(b,+\infty)$. □

Ορισμός 1.4.5 (Borel σ-άλγεβρα). Η μικρότερη σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ που περιέχει όλα τα διαστήματα λέγεται **σ-άλγεβρα των Borel υποσυνόλων του** $\mathbb{R}$ (ή Borel σ-άλγεβρα) και συμβολίζεται με $\mathcal{B}$. Δηλαδή,

$$\mathcal{B}=\bigcap\{\mathcal{A}\subseteq P(\mathbb{R})\mid \mathcal{A}\ \ \sigma-\textit{άλγεβρα και η }\mathcal{A}\textit{ περιέχει όλα τα διαστήματα}\}. \tag{1.4.15}$$

Από τον ορισμό της Borel σ-άλγεβρας, από το γεγονός ότι η $\mathcal{M}$ είναι σ-άλγεβρα και από την Πρόταση 1.4.4 συμπεραίνουμε ότι κάθε Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι μετρήσιμο:

Πρόταση 1.4.6. $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{M}$. □

Πρόταση 1.4.7. *Κάθε ανοικτό και κάθε κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι σύνολο Borel, άρα είναι μετρήσιμο σύνολο.*

Απόδειξη. Κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμη ένωση ανοιχτών διαστημάτων - και μάλιστα ξένων ανά δύο (γνωστό από την Πραγματική Ανάλυση). Αφού η $\mathcal{B}$ είναι σ-άλγεβρα και περιέχει τα ανοικτά διαστήματα, η $\mathcal{B}$ περιέχει όλα τα ανοικτά, άρα και όλα τα κλειστά, σύνολα. □

Παρατηρήσεις 1.4.8. (α) Η Borel σ-άλγεβρα περιέχει πολύ περισσότερα σύνολα από τα ανοικτά και τα κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Όλες οι αριθμήσιμες τομές ανοικτών συνόλων (τα λεγόμενα **G_δ-σύνολα**) είναι Borel σύνολα, όλες οι αριθμήσιμες ενώσεις κλειστών συνόλων (τα λεγόμενα **F_σ-σύνολα**) είναι Borel σύνολα, και ούτω καθεξής.

(β) Η κλάση $\mathcal{M}$ των μετρήσιμων συνόλων είναι γνήσια μεγαλύτερη από την κλάση $\mathcal{B}$ των Borel συνόλων: υπάρχουν μετρήσιμα σύνολα που δεν είναι Borel. Μπορεί κανείς να δώσει παράδειγμα συνόλου που δεν είναι Borel και έχει εξωτερικό μέτρο 0 (άρα, είναι μετρήσιμο). Θα περιγράψουμε τέτοια παραδείγματα αργότερα.

(γ) Από την άλλη πλευρά, τα μετρήσιμα σύνολα προσεγγίζονται από Borel σύνολα, με την εξής έννοια:

Πρόταση 1.4.9. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) *Το A είναι μετρήσιμο.*

(ii) *Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό $G \subseteq \mathbb{R}$ με $A \subseteq G$ και $\lambda^*(G \setminus A) < \varepsilon$.*

(iii) *Υπάρχει G_δ-σύνολο B ώστε $A \subseteq B$ και $\lambda^*(B \setminus A) = 0$.*

Απόδειξη. (i) $\Rightarrow$ (ii). Υποθέτουμε ότι το A είναι μετρήσιμο και, αρχικά, ότι $\lambda(A) < +\infty$. Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό του $\lambda(A) = \lambda^*(A)$, υπάρχει ακολουθία ανοικτών διαστημάτων (I_n) ώστε $A \subseteq \bigcup_n I_n$ και

$$\sum_n \lambda(I_n) = \sum_n \ell(I_n) < \lambda(A) + \varepsilon. \tag{1.4.16}$$

Ορίζουμε $G = \bigcup_n I_n$. Το G είναι ανοικτό σύνολο, $A \subseteq G$ και έχουμε

$$\lambda(A) \leq \lambda(G) = \lambda\left(\bigcup_n I_n\right) \leq \sum_n \lambda(I_n) < \lambda(A) + \varepsilon. \tag{1.4.17}$$

Αφού τα A και G είναι μετρήσιμα, έχουμε ότι το $G \setminus A$ είναι μετρήσιμο και

$$\lambda(G) = \lambda(A \cup (G \setminus A)) = \lambda(A) + \lambda(G \setminus A) \tag{1.4.18}$$

από το Πόρισμα 1.3.7. Συνεπώς,

$$\lambda^*(G \setminus A) = \lambda(G \setminus A) = \lambda(G) - \lambda(A) < \varepsilon, \tag{1.4.19}$$

από την (1.4.17).

Έστω τώρα ότι $\lambda(A) = +\infty$. Έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $A_n = A \cap (-n, n)$. Κάθε A_n είναι μετρήσιμο, $\lambda(A_n) < +\infty$ και $A = \bigcup_n A_n$. Με βάση την περίπτωση που εξετάσαμε παραπάνω, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ βρίσκουμε ανοικτό σύνολο G_n ώστε $A_n \subseteq G_n$ και $\lambda(G_n \setminus A_n) < \varepsilon/2^n$. Ορίζουμε $G = \bigcup_n G_n$. Τότε, το G είναι ανοικτό σύνολο, $G = \bigcup_n G_n \supseteq \bigcup_n A_n = A$ και εύκολα ελέγχουμε ότι

$$G \setminus A = \left(\bigcup_n G_n\right) \setminus \left(\bigcup_n A_n\right) \subseteq \bigcup_n (G_n \setminus A_n). \tag{1.4.20}$$

Συνεπώς,

$$\lambda(G \setminus A) \leq \lambda\left(\bigcup_n (G_n \setminus A_n)\right) \leq \sum_n \lambda(G_n \setminus A_n) < \sum_n \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon. \tag{1.4.21}$$

Έτσι, έχουμε αποδείξει το (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Υποθέτοντας το (ii), για κάθε $k \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε ανοικτό $G_k \subseteq \mathbb{R}$ με $A \subseteq G_k$ και $\lambda^*(G_k \setminus A) < 1/k$. Ορίζουμε $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$. Το B είναι G_δ-σύνολο και $A \subseteq B$. Παρατηρούμε ότι

$$\lambda^*(B \setminus A) \leq \lambda^*(G_k \setminus A) < \frac{1}{k} \tag{1.4.22}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$, άρα

$$\lambda^*(B \setminus A) = 0. \tag{1.4.23}$$

Έχουμε λοιπόν αποδείξει το (iii).

Παρατηρήστε επίσης ότι

$$\lambda^*(B) = \lambda^*(A \cup (B \setminus A)) \leq \lambda^*(A) + \lambda^*(B \setminus A) = \lambda^*(A). \tag{1.4.24}$$

Αφού $A \subseteq B$, ισχύει και η αντίστροφη ανισότητα $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$. Συνεπώς, $\lambda^*(B) = \lambda^*(A)$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Υποθέτουμε ότι υπάρχει G_δ-σύνολο B ώστε $A \subseteq B$ και $\lambda^*(B \setminus A) = 0$. Από την Πρόταση 1.3.3 το $B \setminus A$ είναι μετρήσιμο. Το B ανήκει στην Borel σ-άλγεβρα (ως αριθμήσιμη τομή ανοικτών συνόλων). Άρα, το B είναι μετρήσιμο. Γράφοντας

$$A = B \setminus (B \setminus A) \tag{1.4.25}$$

συμπεραίνουμε ότι το A είναι μετρήσιμο. □

Ολοκληρώνουμε αυτήν την παράγραφο με δύο ακόμα ιδιότητες του μέτρου Lebesgue, οι οποίες είναι συνέπειες της αριθμήσιμης προσθετικότητας:

Πρόταση 1.4.10. (i) *Αν (A_n) είναι αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συνόλων και $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, τότε*

$$\lambda(A_n) \to \lambda(A). \tag{1.4.26}$$

(ii) *Αν (B_n) είναι φθίνουσα ακολουθία μετρήσιμων συνόλων με $\lambda(B_1) < +\infty$ και $B := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, τότε*

$$\lambda(B_n) \to \lambda(B). \tag{1.4.27}$$

Απόδειξη: (i) Γράφουμε το A σαν ξένη ένωση:

$$A = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \cup \cdots , \tag{1.4.28}$$

και χρησιμοποιώντας την αριθμήσιμη προσθετικότητα του μέτρου παίρνουμε

$$\begin{aligned} \lambda(A) &= \lambda(A_1) + \lambda(A_2 \setminus A_1) + \cdots + \lambda(A_n \setminus A_{n-1}) + \cdots \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\lambda(A_1) + \lambda(A_2 \setminus A_1) + \cdots + \lambda(A_n \setminus A_{n-1})\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n). \end{aligned}$$

(ii) Παρατηρούμε πρώτα ότι αν $C, D \in \mathcal{M}$ με $D \subset C$ και $\lambda(D) < +\infty$, τότε

$$\lambda(C \setminus D) = \lambda(C) - \lambda(D). \tag{1.4.29}$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $A_n = B_1 \setminus B_n$. Τότε, η (A_n) είναι αύξουσα, οπότε

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (B_1 \setminus B_n)\right) = \lambda\left(B_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lambda(B_1) - \lambda(B), \tag{1.4.30}$$

από το (i). Επίσης,

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = \lim_{n\to\infty} (\lambda(B_1) - \lambda(B_n)) = \lambda(B_1) - \lim_{n\to\infty} \lambda(B_n). \tag{1.4.31}$$

Άρα, $\lambda(B) = \lim_{n\to\infty} \lambda(B_n)$. □

Παρατήρηση 1.4.11. Η υπόθεση $\lambda(B_1) < +\infty$ στο (ii) μπορεί να αντικατασταθεί από την $\lambda(B_k) < +\infty$ για *κάποιο* k (εξηγήστε γιατί). Δεν μπορούμε όμως να την αφαιρέσουμε τελείως: αν $B_n = [n, +\infty)$, τότε $B_n \searrow \emptyset$ αλλά $\lambda(B_n) = +\infty$ για κάθε n ενώ $\lambda(\emptyset) = 0$.

1.5 Το σύνολο του Cantor

§1. Κατασκευή του συνόλου του Cantor

Θεωρούμε το διάστημα $C_0 = [0, 1]$ και το χωρίζουμε σε τρία ίσα διαστήματα. Αφαιρούμε το ανοικτό μεσαίο διάστημα $(1/3, 2/3)$. Ονομάζουμε C_1 το σύνολο που απομένει, δηλαδή

$$C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]. \tag{1.5.1}$$

Το C_1 είναι προφανώς κλειστό σύνολο. Χωρίζουμε καθένα από τα διαστήματα $[0, 1/3]$ και $[2/3, 1]$ σε τρία ίσα διαστήματα και, από καθένα από αυτά, αφαιρούμε το μεσαίο ανοικτό διάστημα. Ονομάζουμε C_2 το κλειστό σύνολο που απομένει, δηλαδή

$$C_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]. \tag{1.5.2}$$

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, κατασκευάζουμε για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ ένα κλειστό σύνολο C_n έτσι ώστε η ακολουθία (C_n) να έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \cdots$.

(ii) Το C_n είναι η ένωση 2^n κλειστών διαστημάτων, καθένα από τα οποία έχει μήκος $1/3^n$.

Το **σύνολο του Cantor** είναι το σύνολο

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n. \tag{1.5.3}$$

Σημείωση. Τα διαστήματα της μορφής $[k/3^n, (k+1)/3^n]$, $n \in \mathbb{N}$, $k = 0, 1, \ldots, 3^n - 1$, ονομάζονται **τριαδικά διαστήματα**.

§2. Ιδιότητες του συνόλου του Cantor

Το C είναι σίγουρα μη κενό, αφού περιέχει τα άκρα όλων των τριαδικών διαστημάτων που απαρτίζουν κάθε C_n (όπως θα δούμε παρακάτω περιέχει και πολλά άλλα σημεία). Επίσης το C είναι κλειστό, αφού η τομή κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο. Επιπλέον, το C έχει τις εξής ιδιότητες:

(1) *Το C είναι τέλειο σύνολο*, δηλαδή είναι κλειστό και κάθε σημείο του C είναι σημείο συσσώρευσης του C.

Απόδειξη. Είδαμε ότι το C είναι κλειστό. Για να δείξουμε ότι κάθε $x \in C$ είναι σημείο συσσώρευσης του C παρατηρούμε ότι για το τυχόν $x \in C$ υπάρχει μοναδική ακολουθία κλειστών τριαδικών διαστημάτων

$I_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, με $x \in I_n(x)$, $I_n(x) \subset C_n$ και $\ell(I_n(x)) = \frac{1}{3^n}$. Οι ακολουθίες $(\alpha_n(x))$ και $(\delta_n(x))$ των αριστερών και δεξιών άκρων των $I_n(x)$ αντίστοιχα περιέχονται στο C, καθεμία από αυτές συγκλίνει στο x, και η μία τουλάχιστον από τις δύο δεν είναι τελικά σταθερή. Άρα, το x είναι σημείο συσσώρευσης του C. □

(2) *Το C έχει εξωτερικό μέτρο ίσο με* 0.

Απόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $C \subset C_n$ και $\lambda^*(C_n) = \frac{2^n}{3^n}$, αφού το C_n είναι ένωση 2^n ξένων ανά δύο κλειστών διαστημάτων, καθένα από τα οποία έχει μήκος $\frac{1}{3^n}$. Άρα,

$$\lambda^*(C) \leq \lambda^*(C_n) = \frac{2^n}{3^n} \tag{1.5.4}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε $\lambda^*(C) = 0$. □

Παρατήρηση. Ειδικότερα, το C δεν περιέχει κανένα διάστημα.

(3) *Το C είναι υπεραριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Από ένα γενικό θεώρημα της Τοπολογίας, κάθε μη κενό τέλειο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο. Αφού δείξαμε ότι το C είναι τέλειο, έπεται ο ισχυρισμός. Θα δώσουμε όμως μια δεύτερη απόδειξη, η οποία μάς δίνει την αφορμή να δούμε μια διαφορετική περιγραφή του συνόλου C που παρουσιάζει γενικότερο ενδιαφέρον.

Μπορούμε να ορίσουμε μία ένα προς ένα και επί απεικόνιση Φ του C στο σύνολο

$$\{0, 2\}^{\mathbb{N}} = \{(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \mid \text{για κάθε } n,\ \alpha_n = 0 \text{ ή } \alpha_n = 2\}. \tag{1.5.5}$$

Το $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ είναι υπεραριθμήσιμο (θυμηθείτε το διαγώνιο επιχείρημα του Cantor). Άρα, το C είναι υπεραριθμήσιμο. Η απεικόνιση Φ ορίζεται ως εξής:

Για κάθε $x \in C$ υπάρχει μοναδική ακολουθία κλειστών διαστημάτων $I_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, ώστε: $I_1(x) \supset I_2(x) \supset \cdots$, και για κάθε n, $x \in I_n(x)$ και το $I_n(x)$ είναι ένα από τα τριαδικά διαστήματα μήκους $\frac{1}{3^n}$ που απαρτίζουν το C_n.

Με βάση αυτήν την ακολουθία διαστημάτων ορίζουμε μια ακολουθία $(\alpha_n^x)_{n=1}^{\infty} \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ ως εξής:

(α) $n = 1$: Θέτουμε $\alpha_1^x = 0$ αν $I_1(x) = [0, 1/3]$ (δηλαδή, αν $x \in [0, 1/3]$) και $\alpha_1^x = 2$ αν $I_1(x) = [2/3, 1]$ (δηλαδή, αν $x \in [2/3, 1]$).

(β) *Επαγωγικό βήμα:* Για κάθε n, αν $I_n(x) = [k/3^n, (k+1)/3^n]$ τότε το $I_{n+1}(x)$ είναι ένα από τα δύο διαστήματα $[k/3^n, (k/3^n) + (1/3^{n+1})]$, $[(k/3^n) + (2/3^{n+1}), (k+1)/3^n]$: εκείνο που περιέχει το x. Θέτουμε $\alpha_{n+1}^x = 0$ αν $I_{n+1}(x)$ είναι το πρώτο διάστημα, και $\alpha_{n+1}^x = 2$ αν $I_{n+1}(x)$ είναι το δεύτερο διάστημα.

Παρατηρούμε ότι αν $x \neq y$, τότε για κάποιο n θα ισχύει $I_n(x) \neq I_n(y)$, αλλιώς θα έπρεπε να έχουμε $|x - y| \leq \frac{1}{3^n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν n_0 είναι ο πρώτος φυσικός για τον οποίο $I_{n_0}(x) \neq I_{n_0}(y)$, τότε από τον ορισμό των α_n^x βλέπουμε ότι $\alpha_{n_0}^x \neq \alpha_{n_0}^y$, άρα οι δύο ακολουθίες $(\alpha_n^x)_{n=1}^{\infty}$ και $(\alpha_n^y)_{n=1}^{\infty}$ είναι διαφορετικές. Αυτό αποδεικνύει ότι η απεικόνιση $\Phi : C \to \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ με $\Phi(x) = (\alpha_n^x)_{n=1}^{\infty}$ είναι ένα προς ένα.

Αντίστροφα, αν $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία από 0 ή 2, η ακολουθία αυτή ορίζει μοναδική ακολουθία τριαδικών διαστημάτων $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ με $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$, ώστε για κάθε n το I_n να είναι ένα από τα τριαδικά διαστήματα μήκους $\frac{1}{3^n}$ που απαρτίζουν το C_n:

(α) $n = 1$: Θέτουμε $I_1 = [0, 1/3]$ αν $\alpha_1 = 0$ ή $I_1 = [2/3, 1]$ αν $\alpha_1 = 2$.

(β) Γενικά, το I_{n+1} ορίζεται να είναι ένα από τα δύο τριαδικά υποδιαστήματα μήκους $\frac{1}{3^{n+1}}$ του I_n που περιέχονται στο C_{n+1}: το αριστερό αν $\alpha_{n+1} = 0$, ή το δεξιό αν $\alpha_{n+1} = 2$.

Αφού τα μήκη των διαστημάτων I_n φθίνουν στο 0, η τομή τους είναι μονοσύνολο: έστω

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n. \tag{1.5.6}$$

(Θυμηθείτε ότι η τομή είναι μη κενή λόγω του θεωρήματος των κιβωτισμένων διαστημάτων). Αφού $I_n \subset C_n$ για κάθε n, είναι φανερό ότι $x \in C$. Επίσης, $I_n(x) = I_n$ για κάθε n, και από τον τρόπο ορισμού των I_n έχουμε

$$(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} = (\alpha_n^x)_{n=1}^{\infty} = \Phi(x). \tag{1.5.7}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η Φ είναι επί του $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$, άρα το C είναι υπεραριθμήσιμο.

Ο τρόπος ορισμού της Φ μάς οδηγεί σε μια άλλη περιγραφή του συνόλου του Cantor.

§3. Τριαδική παράσταση αριθμού

Αν $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία με $a_n \in \{0,1,2\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ συγκλίνει σε έναν αριθμό $x \in [0,1]$. Αν $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ με $a_n \in \{0,1,2\}$ για κάθε n, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ (ή η ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$) λέγεται **τριαδική παράσταση** του x. Γράφουμε $x = (a_1, a_2, \ldots)$ αντί της $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$.

Κάθε αριθμός x στο διάστημα $[0,1]$ έχει τριαδική παράσταση. Η ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ μπορεί να επιλεγεί ως εξής: Χωρίζουμε το $[0,1]$ στα τρία υποδιαστήματα $[0,1/3]$, $(1/3,2/3)$ και $[2/3,1]$. Θέτουμε

$$a_1 = \begin{cases} 0, & x \in [0,1/3] \\ 1, & x \in (1/3,2/3) \\ 2, & x \in [2/3,1] \end{cases}$$

Με αυτόν τον ορισμό, σε κάθε περίπτωση έχουμε

$$\frac{a_1}{3} \leq x \leq \frac{a_1}{3} + \frac{1}{3}. \tag{1.5.8}$$

Ας υποθέσουμε ότι $x \in [0,1/3]$. Χωρίζουμε αυτό το διάστημα στα τρία υποδιαστήματα $[0,1/9]$, $(1/9,2/9)$, $[2/9,1/3]$ και θέτουμε $a_2 = 0, 1$ ή 2 αντίστοιχα αν το x ανήκει στο αριστερό, στο μεσαίο ή στο δεξιό από αυτά τα διαστήματα. Ανάλογα ορίζεται το a_2 όταν $x \in (1/3,2/3)$ ή $x \in [2/3,1]$, έτσι ώστε σε κάθε περίπτωση να έχουμε

$$\frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} \leq x \leq \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{1}{3^2}. \tag{1.5.9}$$

Συνεχίζουμε την επιλογή των a_n με αυτόν τον τρόπο έτσι ώστε για κάθε n να έχουμε

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} \leq x \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} + \frac{1}{3^n}. \tag{1.5.10}$$

Αφού λοιπόν

$$0 \leq x - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} \leq \frac{1}{3^n}, \tag{1.5.11}$$

έπεται ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$ συγκλίνει στον x, δηλαδή

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}. \tag{1.5.12}$$

Παραδείγματα

Ελέγξτε ότι

$$\begin{aligned} 1/8 &= (0,1,0,1,0,1,\ldots) \\ 1/4 &= (2,0,2,0,2,0,\ldots). \end{aligned}$$

Είναι φανερό ότι αν $x \neq y$ τότε η τριαδική παράσταση του x είναι διαφορετική από αυτήν του y, αφού μια σειρά δεν μπορεί να συγκλίνει σε δύο διαφορετικά όρια.

Υπάρχουν όμως αριθμοί $x \in [0,1]$ που έχουν δύο διαφορετικές τριαδικές παραστάσεις. Για παράδειγμα, αν $x = 1/3$ τότε

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{0}{3^k} \quad \text{και} \quad \frac{1}{3} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{3^k}.$$

(Με τον τρόπο επιλογής της $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ που παρουσιάσαμε παραπάνω, θα βρίσκαμε την δεύτερη παράσταση).

Γενικότερα, ισχύει το εξής: Ο $x \in [0,1]$ έχει δύο διαφορετικές τριαδικές παραστάσεις αν και μόνο αν ο x είναι τριαδικός ρητός: δηλαδή αν $x = k/3^n$ για κάποιον $n \in \mathbb{N}$ και κάποιον $1 \leq k \leq 3^n$ (αφήνεται ως άσκηση).

Το Θεώρημα που ακολουθεί δίνει έναν άλλο τρόπο περιγραφής του συνόλου του Cantor.

Θεώρημα 1.5.1. *Έστω $x \in [0,1]$. Τότε, $x \in C$ αν και μόνο αν ο x έχει μία τριαδική παράσταση η οποία περιέχει μόνο τα ψηφία 0 και 2.* □

Απόδειξη. Έστω $x \in [0,1]$. Αν η ακολουθία (a_n) επιλεγεί με τον τρόπο που παρουσιάσαμε παραπάνω, τότε ισχύει το εξής: $x \in C$ αν και μόνο αν $a_n \neq 1$ για κάθε n. Αυτό αποδεικνύει ότι αν $x \in C$ τότε ο x έχει μία τριαδική παράσταση που περιέχει μόνο τα ψηφία 0 και 2. Η ολοκλήρωση της απόδειξης αφήνεται ως άσκηση. □

1.6 Παράδειγμα μη μετρήσιμου συνόλου

Στην §1.4 ορίσαμε την σ-άλγεβρα $\mathcal{B}$ των Borel υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ και την μεγαλύτερη σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$ των μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Από τους ορισμούς έπονται άμεσα οι εγκλεισμοί

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}). \tag{1.6.1}$$

Το ερώτημα όμως αν αυτοί οι δύο εγκλεισμοί είναι γνήσιοι (δηλαδή, αν υπάρχουν υποσύνολα του $\mathbb{R}$ που δεν είναι μετρήσιμα και αν υπάρχουν μετρήσιμα σύνολα που δεν είναι Borel) δεν είναι καθόλου απλό. Σε αυτήν την παράγραφο θα κατασκευάσουμε παράδειγμα μη μετρήσιμου συνόλου. Η κατασκευή βασίζεται στο «αξίωμα της επιλογής» από την Θεωρία Συνόλων, το οποίο αποδεχόμαστε.

Αξίωμα της Επιλογής: Έστω $\mathcal{X} = \{X_a \mid a \in A\}$ μια μη κενή οικογένεια ξένων, μη κενών υποσυνόλων ενός συνόλου Ω. Τότε, υπάρχει ένα σύνολο E που περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο x_a από κάθε σύνολο

X_a. Δηλαδή, υπάρχει **συνάρτηση επιλογής** $f : A \to \Omega$ με $f(a) \in X_a$ για κάθε $a \in A$.

Σημείωση, Το Αξίωμα της Επιλογής, αν και φαίνεται «αθώο», αποδεικνύεται ανεξάρτητο από τα αξιώματα (Zermelo-Fraenkel) της Θεωρίας Συνόλων.

Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης το **λήμμα του Steinhaus**.

Πρόταση 1.6.1. *Έστω A μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(A) > 0$. Τότε, το «σύνολο διαφορών»*

$$A - A := \{x - y \mid x \in A, y \in A\} \tag{1.6.2}$$

του A περιέχει διάστημα της μορφής $(-t, t)$ για κάποιο $t > 0$.

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 < \lambda(A) < \infty$ (αν $\lambda(A) = \infty$, θεωρούμε $B \subseteq A$ με $0 < \lambda(B) < \infty$, δείχνουμε ότι το $B - B$ περιέχει διάστημα της μορφής $(-t, t)$ για κάποιο $t > 0$, και τότε, $A - A \supseteq B - B \supseteq (-t, t)$).

Έστω λοιπόν A μετρήσιμο σύνολο με $0 < \lambda(A) < \infty$. Για τυχόν $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε ανοικτό σύνολο $G \supseteq A$ ώστε $\lambda(G) < (1+\varepsilon)\lambda(A)$. Μπορούμε να γράψουμε το G σαν αριθμήσιμη ένωση $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ μη επικαλυπτόμενων διαστημάτων. Θέτουμε $A_k = A \cap I_k$. Τότε,

$$\lambda(G) = \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \quad \text{και} \quad \lambda(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k). \tag{1.6.3}$$

Από την $\lambda(G) < (1 + \varepsilon)\lambda(A)$ έπεται ότι: υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\ell(I_k) \leq (1 + \varepsilon)\lambda(A \cap I_k). \tag{1.6.4}$$

Παίρνοντας $\varepsilon = 1/3$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχει διάστημα I ώστε

$$\lambda(A \cap I) \geqslant \frac{3\ell(I)}{4}. \tag{1.6.5}$$

Θέτουμε $t = \frac{\ell(I)}{2}$. Θα δείξουμε ότι

$$(A \cap I) - (A \cap I) \supseteq (-t, t). \tag{1.6.6}$$

Αν αυτό δεν ισχύει, υπάρχει $s \in (-t, t)$ ώστε τα σύνολα $A \cap I$ και $(A \cap I) + s$ να είναι ξένα. Ταυτόχρονα, περιέχονται στο $I \cup (I + s)$, το οποίο είναι διάστημα μήκους $\ell(I) + |s|$. Έπεται ότι

$$2\lambda(A \cap I) = \lambda(A \cap I) + \lambda((A \cap I) + s) \leq \ell(I) + s < \frac{3\ell(I)}{2}, \tag{1.6.7}$$

δηλαδή $\lambda(A \cap I) < \frac{3\ell(I)}{4}$, το οποίο είναι άτοπο. Έπεται ότι $A - A \supseteq (A \cap I) - (A \cap I) \supseteq (-t, t)$. □

Θεώρημα 1.6.2. *Υπάρχει μη μετρήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο $\mathbb{R}$ ως εξής:

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}. \tag{1.6.8}$$

Η $\sim$ χωρίζει το $\mathbb{R}$ σε κλάσεις ισοδυναμίας

$$E_x = \{y \in \mathbb{R} \mid y = x + q \text{ για κάποιον } q \in \mathbb{Q}\}. \tag{1.6.9}$$

Αν συμβολίσουμε με $\mathcal{X} = \{X_a \mid a \in A\}$ την οικογένεια των διαφορετικών κλάσεων ισοδυναμίας, το αξίωμα της επιλογής μας λέει ότι υπάρχει ένα σύνολο $E = \{y_a \mid a \in A\} \subset \mathbb{R}$ το οποίο περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο y_a από κάθε κλάση X_a. Ειδικότερα, αν $a \neq b$ στο A τότε $y_a - y_b \notin \mathbb{Q}$.

Θεωρούμε μια αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $\mathbb{Q}$ και θεωρούμε την ακολουθία συνόλων

$$E_n := E + q_n, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.6.10}$$

Τα σύνολα E_n ικανοποιούν τα εξής:

(i) Αν $n \neq m$ τότε $E_n \cap E_m = \emptyset$. Πράγματι, αν υπήρχαν $y_a, y_b \in E$ ώστε $y_a + q_n = y_b + q_m$, τότε θα είχαμε $0 \neq y_a - y_b = q_m - q_n \in \mathbb{Q}$, το οποίο είναι άτοπο από τον τρόπο ορισμού του E.

(ii) $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Πράγματι, αν $x \in \mathbb{R}$ τότε υπάρχει $a \in A$ ώστε $x \in X_a$. Αυτό σημαίνει ότι $x = y_a + q$ για κάποιον $q \in \mathbb{Q}$. Όμως, τότε υπάρχει $n = n(x) \in \mathbb{N}$ ώστε $q = q_n$, δηλαδή, $x = y_a + q_n \in E_n$.

Ας υποθέσουμε ότι το E είναι μετρήσιμο. Τότε, το $E_n = E + q_n$ είναι μετρήσιμο για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lambda(E_n) = \lambda(E)$. Από τις ιδιότητες των E_n και από την αριθμήσιμη προσθετικότητα του μέτρου, παίρνουμε

$$+\infty = \lambda(\mathbb{R}) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E). \tag{1.6.11}$$

Συνεπώς, $\lambda(E) > 0$. Από το λήμμα του Steinhaus, το $E - E$ περιέχει διάστημα $(-t, t)$ για κάποιον $t > 0$. Όμως αυτό είναι άτοπο, διότι το $E - E$ δεν μπορεί να περιέχει ρητό διαφορετικό από το 0: αν $x \neq y$ στο E τότε ο $x - y$ είναι άρρητος, από τον τρόπο ορισμού του E. Έπεται ότι το E δεν είναι μετρήσιμο σύνολο. □

Παρατήρηση 1.6.3. Με μια παραλλαγή αυτού του επιχειρήματος μπορούμε να δείξουμε ότι κάθε μετρήσιμο $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) > 0$ έχει μη μετρήσιμο υποσύνολο. Χρησιμοποιώντας τα σύνολα E_n που ορίστηκαν στην (1.6.10) γράφουμε

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap E_n), \tag{1.6.12}$$

και υποθέτοντας ότι κάθε $A \cap E_n$ είναι μετρήσιμο καταλήγουμε στην

$$0 < \lambda(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A \cap E_n). \tag{1.6.13}$$

Συνεπώς, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\lambda(A \cap E_n) > 0$ και από το λήμμα του Steinhaus το $A \cap E_n - A \cap E_n$, άρα και το $E_n - E_n$, περιέχει διάστημα $(-t, t)$ για κάποιον $t > 0$. Αυτό οδηγεί σε άτοπο.

Παρατήρηση 1.6.4. Μπορούμε, με παρόμοιο τρόπο, να αποδείξουμε την ύπαρξη μη μετρήσιμου $E \subseteq [0,1]$, αποφεύγοντας την χρήση του λήμματος του Steinhaus. Ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο $[0,1]$ ως εξής:

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}. \tag{1.6.14}$$

Παρατηρήστε ότι, αναγκαστικά, $x - y \in [-1, 1]$. Η $\sim$ χωρίζει το $[0,1]$ σε κλάσεις ισοδυναμίας

$$E_x = \{y \in [0,1] \mid y = x + q \text{ για κάποιον } q \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}\}. \tag{1.6.15}$$

Αν συμβολίσουμε με $\mathcal{X} = \{X_a \mid a \in A\}$ την οικογένεια των διαφορετικών κλάσεων ισοδυναμίας, το αξίωμα της επιλογής μας λέει ότι υπάρχει ένα σύνολο $E = \{y_a \mid a \in A\} \subset [0,1]$ το οποίο περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο y_a από κάθε κλάση X_a. Ειδικότερα, αν $a \neq b$ στο A τότε $y_a - y_b \notin \mathbb{Q}$.

Θεωρούμε μια αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $\mathbb{Q} \cap [-1,1]$ και θεωρούμε την ακολουθία συνόλων

$$E_n := E + q_n, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.6.16}$$

Τα σύνολα E_n ικανοποιούν τα εξής:

(i) $E_n \subseteq [-1,2]$.

(ii) Αν $n \neq m$ τότε $E_n \cap E_m = \emptyset$.

(iii) $[0,1] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Πράγματι, αν $x \in [0,1]$ τότε υπάρχει $a \in A$ ώστε $x \in X_a$. Αυτό σημαίνει ότι $x = y_a + q$ για κάποιον $q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$. Όμως, τότε υπάρχει $n = n(x) \in \mathbb{N}$ ώστε $q = q_n$, δηλαδή, $x = y_a + q_n \in E_n$.

Υποθέτουμε ότι το E είναι μετρήσιμο. Τότε, το $E_n = E + q_n$ είναι μετρήσιμο για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lambda(E_n) = \lambda(E)$. Από τις ιδιότητες των E_n και από τη μονοτονία και την αριθμήσιμη προσθετικότητα του μέτρου, παίρνουμε

$$1 = \lambda([0,1]) \leq \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E) \leq 3, \tag{1.6.17}$$

το οποίο είναι άτοπο αφού το τελευταίο άθροισμα είναι ίσο με 0 (αν $\lambda(E) = 0$) ή με $+\infty$ (αν $\lambda(E) > 0$). Συνεπώς, το E δεν είναι μετρήσιμο σύνολο.

1.7 Ασκήσεις

Ομάδα Α΄

1. (α) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $t \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A + t)$$

(το εξωτερικό μέτρο είναι αναλλοίωτο ως προς μεταφορές).

(β) Αν επιπλέον το A είναι μετρήσιμο, τότε το $A + t$ είναι μετρήσιμο.

2. (α) Έστω A φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\lambda^*(A) < +\infty$.

(β) Έστω ότι το $A \subseteq \mathbb{R}$ έχει τουλάχιστον ένα εσωτερικό σημείο. Δείξτε ότι $\lambda^*(A) > 0$.

3. (α) Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$ και $\lambda^*(B) = 0$, δείξτε ότι $\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(A)$.

(β) Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$ και $\lambda^*(A \triangle B) = 0$, δείξτε ότι $\lambda^*(A) = \lambda^*(B)$ (με $A \triangle B$ συμβολίζουμε την συμμετρική διαφορά $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ των A και B).

4. (α) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $t \in \mathbb{R}$. Συμβολίζουμε με tA το σύνολο $tA = \{tx \mid x \in A\}$. Δείξτε ότι $\lambda^*(tA) = |t|\, \lambda^*(A)$.

(β) Έστω $f : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση Lipschitz με σταθερά C, δηλαδή $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$ για κάθε $x, y \in B$. Δείξτε ότι

$$\lambda^*(f(A)) \leq C\lambda^*(A)$$

για κάθε $A \subseteq B$.

(γ) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) = 0$. Δείξτε ότι το σύνολο $A' = \{x^2 \mid x \in A\}$ έχει επίσης μέτρο $\lambda(A') = 0$.

Υπόδειξη: Εξετάστε πρώτα την περίπτωση όπου $A \subseteq [-M, M]$ για κάποιο $M > 0$.

5. (α) Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ με $0 < \lambda^*(E) < +\infty$ και έστω $0 < \alpha < 1$. Δείξτε ότι υπάρχει ανοικτό διάστημα I με την ιδιότητα

$$\lambda^*(E \cap I) > \alpha\, \ell(I).$$

Υπόδειξη: Υποθέστε το αντίθετο και, για τυχόν $\varepsilon > 0$, θεωρήστε ακολουθία διαστημάτων I_k με $E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ και $\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) < \lambda^*(E) + \varepsilon$.

(β)Έστω A μετρήσιμο σύνολο και έστω $\delta > 0$ ώστε $\lambda(A \cap I) \geqslant \delta\, \ell(I)$ για κάθε ανοιχτό διάστημα. Δείξτε ότι $\lambda(A^c) = 0$.

6. Έστω $\delta > 0$. Δείξτε ότι, για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}$, ισχύει

$$\lambda^*(E) = \inf\left\{\sum_n \ell(I_n) \mid E \subseteq \bigcup_n I_n,\ \text{και } \forall n \in \mathbb{N}\ I_n \text{ ανοικτό διάστημα με } \ell(I_n) < \delta\right\}.$$

7. Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ με

$$\mathrm{dist}(A, B) = \inf\{|x - y| : x \in A, y \in B\} > 0.$$

Δείξτε ότι

$$\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(A) + \lambda^*(B).$$

8. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο σύνολο με $0 < \lambda(A) < +\infty$.

(α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \lambda(A \cap (-\infty, x])$ είναι συνεχής.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμο σύνολο F με $F \subseteq A$ και $\lambda(F) = \lambda(A)/2$.

9. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(i) Το A είναι μετρήσιμο.

(ii) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κλειστό $F \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $F \subseteq A$ και $\lambda^*(A \setminus F) < \varepsilon$.

(iii) Υπάρχει F_σ-σύνολο Γ ώστε $\Gamma \subseteq A$ και $\lambda^*(A \setminus \Gamma) = 0$.

10. Έστω (A_n) ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε τα σύνολα

$$\limsup A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A_n \text{ για άπειρα } n\}$$

και

$$\liminf A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{ υπάρχει } n_0(x) \in \mathbb{N} \text{ ώστε } x \in A_n \text{ για κάθε } n \geqslant n_0(x)\}.$$

Δείξτε ότι

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{και} \quad \liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

11. Έστω (A_n) ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι:

(α) Τα $\limsup A_n$ και $\liminf A_n$ είναι μετρήσιμα σύνολα.

(β) $\lambda(\liminf A_n) \leq \liminf \lambda(A_n)$ και αν $\lambda(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) < +\infty$ τότε

$$\limsup \lambda(A_n) \leq \lambda(\limsup A_n).$$

(γ) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) < +\infty$, τότε $\lambda(\limsup A_n) = 0$.

12. Δείξτε ότι τα ακόλουθα σύνολα είναι σύνολα Borel και βρείτε το μέτρο τους: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $[0,1]\setminus\mathbb{Q}$, $C+1$, $2C$, όπου C το σύνολο του Cantor.

13. Έστω A υπεραριθμήσιμο σύνολο και έστω $\mathcal{X}$ η οικογένεια των υποσυνόλων X του A που ικανοποιούν το εξής: είτε το X ή το $A\setminus X$ είναι αριθμήσιμο. Δείξτε ότι η $\mathcal{X}$ είναι σ-άλγεβρα.

14. Δείξτε ότι ο αριθμός $1/4$ ανήκει στο σύνολο του Cantor.

15. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς:

(i) Αν $A\subseteq\mathbb{R}$ και $\lambda^*(A)=0$, τότε το A είναι πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο σύνολο.

(ii) Αν $A\subseteq\mathbb{R}$ και το A δεν είναι μετρήσιμο, τότε $\lambda^*(A)>0$.

(iii) Αν $A,B\subseteq\mathbb{R}$, $\lambda^*(A)<+\infty$, $B\subseteq A$, το B είναι μετρήσιμο και $\lambda(B)=\lambda^*(A)$, τότε το A είναι μετρήσιμο.

(iv) Έστω $A\subseteq[a,b]$. Τότε, $\lambda^*(A)=0$ αν και μόνο αν υπάρχει κάλυψη του A από μια ακολουθία ανοικτών διαστημάτων (I_n) ώστε $\sum_{n=1}^{\infty}\ell(I_n)<+\infty$ και κάθε $x\in A$ ανήκει σε άπειρα το πλήθος από τα διαστήματα I_n.

(v) Αν $A\subseteq\mathbb{R}$ τότε $\lambda(A)=0$ αν και μόνο αν όλα τα υποσύνολα του A είναι μετρήσιμα.

16. Προηγούμενες απόπειρες για τον ορισμό του μέτρου ενός φραγμένου υποσυνόλου A του $\mathbb{R}$ ήταν παρόμοιες με αυτήν του Lebesgue, με τη διαφορά ότι θεωρούσαν καλύψεις του A από *πεπερασμένο* πλήθος ανοικτών διαστημάτων. Δείξτε ότι αν το $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ περιέχεται σε μια πεπερασμένη ένωση $\bigcup_{k=1}^{n}(a_k,b_k)$, τότε $\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)\geqslant 1$. Επομένως, με έναν τέτοιο ορισμό, το $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ θα είχε «μέτρο» 1.

Ομάδα Β΄

17. Έστω $A\subseteq[a,b]$ με $\lambda(A)>0$. Δείξτε ότι υπάρχουν $x,y\in A$ ώστε $x-y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

18. (α) Αν το A είναι μετρήσιμο και $\lambda(A\triangle B)=0$, τότε το B είναι μετρήσιμο και $\lambda(B)=\lambda(A)$.

(β) Αν τα A,B είναι μετρήσιμα, τότε

$$\lambda(A\cup B)+\lambda(A\cap B)=\lambda(A)+\lambda(B).$$

(γ) Αν τα A,B είναι μετρήσιμα, $A\subseteq B$ και $\lambda(A)=\lambda(B)<+\infty$, τότε $\lambda(B\setminus A)=0$.

(δ) Δώστε παράδειγμα μετρήσιμων συνόλων A,B με $A\subseteq B$ και $\lambda(A)=\lambda(B)$, αλλά $\lambda(B\setminus A)>0$.

19. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Δείξτε ότι το σύνολο

$$A=\{x\in\mathbb{R}\mid \text{η } f \text{ είναι συνεχής στο } x\}$$

είναι σύνολο Borel.

Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα ότι

$$A=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x\in\mathbb{R}\mid \mathrm{diam}[f(x-1/n,x+1/n)]<\frac{1}{k}\right\}.$$

20. Έστω $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων. Δείξτε ότι το σύνολο

$$B=\{x\in\mathbb{R}\mid \lim_{n\to\infty}f_n(x)=+\infty\}$$

είναι σύνολο Borel.

21. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι για κάθε Borel $B\subseteq\mathbb{R}$ το $f^{-1}(B)$ είναι σύνολο Borel.

Υπόδειξη: Θεωρήστε την κλάση $\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid \text{ το } f^{-1}(A) \text{ είναι σύνολο Borel}\}$.

22. Για κάθε $x \in [0,1)$ συμβολίζουμε με $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ την δεκαδική παράσταση του x (αν το x έχει δύο διαφορετικές δεκαδικές παραστάσεις θεωρούμε εκείνη που τελειώνει σε άπειρα μηδενικά). Βρείτε το εξωτερικό μέτρο καθενός από τα σύνολα:

(i) $A_1 = \{x \in [0,1) \mid x_1 \neq 5\}$.

(ii) $A_2 = \{x \in [0,1) \mid x_1 \neq 5 \text{ και } x_2 \neq 5\}$.

(iii) $A = \{x \in [0,1) \mid x_n \neq 5, \text{ για κάθε } n = 1, 2, \ldots\}$.

23. Έστω $\vartheta \in (0,1)$. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία κατασκευής του συνόλου του Cantor με την διαφορά ότι στο n-οστό βήμα αφαιρούμε κεντρικό ανοιχτό διάστημα μήκους $\vartheta/3^n$ από κάθε διάστημα που έχει απομείνει στο $(n-1)$-οστό βήμα. Καταλήγουμε σε ένα σύνολο C_ϑ «τύπου Cantor». Δείξτε ότι:

(α) Το C_ϑ είναι τέλειο και δεν περιέχει ανοιχτά διαστήματα.

(β) Το C_ϑ είναι υπεραριθμήσιμο.

(γ) Το C_ϑ είναι μετρήσιμο και $\lambda(C_\vartheta) = 1 - \vartheta > 0$.

Ομάδα Γ΄

24. Έστω $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια αρίθμηση του $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ ορίζουμε

$$A(\varepsilon) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(q_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^n} \right).$$

Τέλος, θέτουμε $A = \cap_{j=1}^{\infty} A(1/j)$.

(α) Δείξτε ότι $\lambda(A(\varepsilon)) \leq 2\varepsilon$.

(β) Αν $\varepsilon < \frac{1}{2}$ δείξτε ότι το $[0,1] \setminus A(\varepsilon)$ είναι μη κενό.

(γ) Δείξτε ότι $A \subseteq [0,1]$ και $\lambda(A) = 0$.

(δ) Δείξτε ότι $\mathbb{Q} \cap [0,1] \subseteq A$ και ότι το A είναι υπεραριθμήσιμο.

25. Έστω $\{A_n\}$ ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$ με την ιδιότητα

$$\limsup_{n\to\infty} \lambda(A_n) = 1.$$

Δείξτε ότι: για κάθε $0 < \alpha < 1$ υπάρχει υπακολουθία $\{A_{k_n}\}$ της $\{A_n\}$ με

$$\lambda\left(\cap_{n=1}^{\infty} A_{k_n}\right) > \alpha.$$

26. Έστω E ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(E) < \infty$. Έστω $\{A_n\}$ ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του E και έστω $c > 0$ με την ιδιότητα $\lambda(A_n) \geqslant c$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(α) Δείξτε ότι $\lambda(\limsup A_n) > 0$.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{k_n\}$ φυσικών με την ιδιότητα

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n} \neq \emptyset.$$

27. Έστω E ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(E) > 1$. Δείξτε ότι υπάρχουν $x \neq y$ στο E ώστε $x - y \in \mathbb{Z}$.

28. Έστω E ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε το *εσωτερικό μέτρο Lebesgue* του E θέτοντας

$$\lambda_*(E) = \sup\{\lambda(F) : F \subseteq E, F \text{ κλειστό}\}.$$

(α) Δείξτε ότι $\lambda_*(E) \leq \lambda^*(E)$.

(β) Υποθέτουμε ότι $\lambda^*(E) < \infty$. Δείξτε ότι το E είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν $\lambda_*(E) = \lambda^*(E)$.

(γ) Δείξτε ότι αν $\lambda^*(E) = \infty$ τότε η ισοδυναμία στο (β) δεν είναι πάντα σωστή.

29. Για κάθε $A \in \mathcal{M}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$\rho(A, x) = \lim_{t \to 0^+} \frac{\lambda(A \cap (x - t, x + t))}{2t},$$

αν αυτό το όριο υπάρχει. Ο $\rho(A, x)$ είναι η **μετρική πυκνότητα** του A στο σημείο x.

(α) Δείξτε ότι $\rho(\mathbb{Q}, x) = 0$ και $\rho(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Έστω $0 < \alpha < 1$. Κατασκευάστε σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $\rho(A, 0) = \alpha$.

Ομάδα Δ΄

30. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ ξένων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ ώστε

$$\lambda^*\left(\cup_{n=1}^{\infty} E_n\right) < \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(E_n).$$

31. Έστω E και F δύο συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με $E \subset F$ και $\lambda(E) < \lambda(F)$. Δείξτε ότι για κάθε $\alpha \in (\lambda(E), \lambda(F))$ μπορούμε να βρούμε συμπαγές σύνολο K ώστε $E \subset K \subset F$ και $\lambda(K) = \alpha$.

32. Κατασκευάστε ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq [0, 1]$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε διάστημα $J \subseteq [0, 1]$,

$$\lambda(J \cap E) > 0 \quad \text{και} \quad \lambda(J \setminus E) > 0.$$

33. Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(A) > 0$. Δείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το A περιέχει αριθμητική πρόοδο μήκους n.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Μετρήσιμες συναρτήσεις

2.1 Μετρήσιμες συναρτήσεις

Οι συναρτήσεις για τις οποίες θα επιχειρήσουμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue είναι συναρτήσεις με πεδίο ορισμού κάποιο μετρήσιμο υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ και τιμές στην επεκτεταμένη ευθεία $[-\infty, +\infty]$ των πραγματικών αριθμών. Όπως είδαμε στην §1.1, για μια φραγμένη συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ θα θέλαμε να προσεγγίσουμε το $\int_A f$ από αθροίσματα της μορφής

$$\sum_{k=0}^{n-1} y_k \lambda(\{x \in A \mid y_k \leq f(x) < y_{k+1}\}), \tag{2.1.1}$$

όπου $\{y_0 < y_1 < \cdots < y_n\}$ διαμέριση του πεδίου τιμών της f. Απαραίτητη προϋπόθεση για να γίνει κάτι τέτοιο είναι τα σύνολα

$$B_k = \{x \in A : y_k \leq f(x) < y_{k+1}\} \tag{2.1.2}$$

να είναι μετρήσιμα. Είμαστε λοιπόν υποχρεωμένοι να περιοριστούμε στην κλάση εκείνων των συναρτήσεων $f : A \to [-\infty, +\infty]$ για τις οποίες τα σύνολα

$$\{x \in A : a \leq f(x) < b\} \tag{2.1.3}$$

είναι μετρήσιμα. Οι συναρτήσεις αυτές λέγονται **μετρήσιμες**.

Ορισμός 2.1.1 (Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση). Έστω A Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω $f : A \to \mathbb{R}$. Η f λέγεται **Lebesgue μετρήσιμη**, ή απλά **μετρήσιμη**, αν για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο

$$\{x \in A : f(x) > a\} = f^{-1}((a, +\infty)) \tag{2.1.4}$$

είναι μετρήσιμο.

Η επόμενη Πρόταση δείχνει ότι στην θέση των ημιευθειών $(a, +\infty)$ του Ορισμού 2.1.1 θα μπορούσαμε να πάρουμε οποιαδήποτε άλλη κλάση ημιευθειών.

Πρόταση 2.1.2. *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω $f : A \to \mathbb{R}$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) *Η f είναι μετρήσιμη.*

(ii) *Για κάθε* $a \in \mathbb{R}$ *το σύνολο* $\{x \in A : f(x) \geqslant a\} = f^{-1}([a, +\infty))$ *είναι μετρήσιμο.*

(iii) *Για κάθε* $a \in \mathbb{R}$ *το σύνολο* $\{x \in A : f(x) < a\} = f^{-1}((-\infty, a))$ *είναι μετρήσιμο.*

(iv) *Για κάθε* $a \in \mathbb{R}$ *το σύνολο* $\{x \in A : f(x) \leq a\} = f^{-1}((-\infty, a])$ *είναι μετρήσιμο.*

Απόδειξη. (i) $\Rightarrow$ (ii) Παρατηρήστε ότι

$$\{x \in A : f(x) \geqslant a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in A : f(x) > a - \frac{1}{n}\right\}. \tag{2.1.5}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Παρατηρήστε ότι

$$\{x \in A : f(x) < a\} = A \setminus \{x \in A : f(x) \geqslant a\}. \tag{2.1.6}$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Παρατηρήστε ότι

$$\{x \in A : f(x) \leq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in A : f(x) < a + \frac{1}{n}\right\}. \tag{2.1.7}$$

(iv) $\Rightarrow$ (i) Παρατηρήστε ότι

$$\{x \in A : f(x) > a\} = A \setminus \{x \in A : f(x) \leq a\}. \tag{2.1.8}$$

Αφού αριθμήσιμες τομές, αριθμήσιμες ενώσεις και συνολοθεωρητικές διαφορές μετρήσιμων συνόλων είναι μετρήσιμα σύνολα, η ισοδυναμία των (i)-(iv) προκύπτει άμεσα από τις παραπάνω σχέσεις. □

Πρόταση 2.1.3. *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, όλες οι αντίστροφες εικόνες διαστημάτων – μέσω της f – είναι μετρήσιμα σύνολα. Το ίδιο ισχύει για τα σύνολα $\{x \in A : f(x) = a\}$, $a \in \mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Ο ισχυρισμός είναι απλή συνέπεια της Πρότασης 2.1.2. Για παράδειγμα, αν $J = [a, b]$ τότε το σύνολο

$$f^{-1}(J) = \{x \in A : a \leq f(x) \leq b\} = \{x \in A : f(x) \geqslant a\} \cap \{x \in A : f(x) \leq b\} \tag{2.1.9}$$

είναι μετρήσιμο. Τελείως ανάλογα, για κάθε $a \in \mathbb{R}$, το σύνολο

$$\{x \in A : f(x) = a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in A : a - \frac{1}{n} < f(x) < a + \frac{1}{n}\right\} \tag{2.1.10}$$

είναι μετρήσιμο. □

Ορισμός 2.1.4 (Borel μετρήσιμη συνάρτηση). Έστω A σύνολο Borel του $\mathbb{R}$ και έστω $f : A \to \mathbb{R}$. Η f λέγεται **Borel μετρήσιμη** αν, για κάθε $a \in \mathbb{R}$, το σύνολο

$$\{x \in A : f(x) > a\} = f^{-1}((a, +\infty)) \tag{2.1.11}$$

είναι σύνολο Borel. Τα ακριβή ανάλογα των Προτάσεων 2.1.2 και 2.1.3 ισχύουν για τις Borel μετρήσιμες συναρτήσεις (διατυπώστε αντίστοιχες Προτάσεις και αποδείξτε τις).

Παραδείγματα 2.1.5. (α) Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω $f : A \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε, η f είναι μετρήσιμη. Πράγματι, για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x \in A : f(x) > a\}$ είναι ανοικτό στο A, δηλαδή είναι της μορφής $A \cap U$ για κάποιο ανοικτό υποσύνολο U του $\mathbb{R}$. Συνεπώς, είναι μετρήσιμο σύνολο ως τομή δύο μετρήσιμων συνόλων.

(β) Η χαρακτηριστική συνάρτηση $\chi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ενός μετρήσιμου συνόλου A είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Πράγματι, έχουμε

$$\{x \in \mathbb{R} : \chi_A(x) > a\} = \begin{cases} \mathbb{R}, & a < 0 \\ A, & 0 \leq a < 1 \\ \emptyset, & a \geqslant 1, \end{cases} \tag{2.1.12}$$

δηλαδή, μετρήσιμο σύνολο σε κάθε περίπτωση. Ειδικότερα, η συνάρτηση του Dirichlet $\chi_{\mathbb{Q}}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

(γ) Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Κάθε μονότονη συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x \in A : f(x) > a\}$ είναι η τομή του A με μια ημιευθεία, άρα είναι μετρήσιμο.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f είναι αύξουσα. Έστω $a \in \mathbb{R}$. Γράφουμε $T = \{x \in A : f(x) > a\}$ και $t := \inf T$.

(i) Αν $t = -\infty$ τότε $T = A$. Πράγματι, αν $x \in A$ τότε υπάρχει $y \in T$ ώστε $y < x$. Αυτό σημαίνει ότι $y \in A$ και $f(y) > a$, όμως η f είναι αύξουσα και από την $y < x$ έπεται ότι $f(x) \geqslant f(y) > a$, δηλαδή $x \in T$. Άρα, σε αυτήν την περίπτωση το $T = A$ είναι μετρήσιμο.

(ii) Αν $t \in \mathbb{R}$ τότε διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- $t \in T$: Αυτό σημαίνει ότι $t \in A$ και $f(t) > a$. Τότε, ισχύει $T = A \cap [t, +\infty)$. Πράγματι, αν $x \in A$ και $x \geqslant t$ τότε $f(x) \geqslant f(t) > a$, άρα $x \in T$. Αντίστροφα, αν $x \in T$ τότε $x \in A$ και $x \geqslant t$ γιατί ο t είναι κάτω φράγμα του T.

- $t \notin T$: Θα δείξουμε ότι $T = A \cap (t, +\infty)$. Πράγματι, αν $x \in A$ και $x > t$ τότε (χαρακτηρισμός του infimum) υπάρχει $y \in T$ ώστε $t < y < x$ και αυτό μας δίνει την $f(x) \geqslant f(y) > a$, άρα $x \in T$. Αντίστροφα, αν $x \in T$ τότε $x \in A$ και $x > t$ γιατί ο t είναι κάτω φράγμα του T και δεν ανήκει στο T.

Σε κάθε περίπτωση το $T = \{x \in A : f(x) > a\}$ είναι η τομή του A με μια ημιευθεία. □

Πρόταση 2.1.6 (πράξεις μεταξύ μετρήσιμων συναρτήσεων). *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε,*

(i) *Η $f + g$ είναι μετρήσιμη.*

(ii) *Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση λf είναι μετρήσιμη.*

(iii) *Η fg είναι μετρήσιμη.*

(iv) *Αν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$, τότε η $1/f$ είναι μετρήσιμη.*

(v) *Οι συναρτήσεις $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ και $|f|$ είναι μετρήσιμες.*

Απόδειξη. (i) Έστω $a \in \mathbb{R}$. Αν $f(x) + g(x) < a$, τότε $f(x) < a - g(x)$. Άρα, υπάρχει ρητός q ώστε

$$f(x) < q < a - g(x). \tag{2.1.13}$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\{x \in A : f(x) + g(x) < a\} &= \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \{x \in A : f(x) < q \text{ και } g(x) < a - q\} \\ &= \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \left(\{x \in A : f(x) < q\} \cap \{x \in A : g(x) < a - q\}\right),\end{aligned}$$

δηλαδή είναι μετρήσιμο σύνολο.
(ii) Έστω $a \in \mathbb{R}$. Αν $\lambda > 0$, τότε

$$\{x \in A : \lambda f(x) > a\} = \{x \in A : f(x) > a/\lambda\}, \tag{2.1.14}$$

δηλαδή μετρήσιμο σύνολο. Αν $\lambda < 0$, τότε

$$\{x \in A : \lambda f(x) > a\} = \{x \in A : f(x) < a/\lambda\}, \tag{2.1.15}$$

δηλαδή μετρήσιμο σύνολο. Σε κάθε περίπτωση, η λf είναι μετρήσιμη (αν $\lambda = 0$, τότε δεν έχουμε να δείξουμε τίποτα).
(iii) Δείχνουμε πρώτα ότι η f^2 είναι μετρήσιμη. Αν $a < 0$, τότε

$$\{x \in A : f^2(x) > a\} = A, \tag{2.1.16}$$

ενώ αν $a \geqslant 0$, τότε

$$\{x \in A : f(x)^2 > a\} = \{x \in A : f(x) > \sqrt{a}\} \cup \{x \in A : f(x) < -\sqrt{a}\}. \tag{2.1.17}$$

Σε κάθε περίπτωση, το $\{x : f^2(x) > a\}$ είναι μετρήσιμο. Τώρα, η fg είναι μετρήσιμη, διότι

$$fg = \frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4}. \tag{2.1.18}$$

(iv) Αν $a = 0$, τότε $\{x \in A : 1/f(x) > 0\} = \{x \in A : f(x) > 0\}$. Αν $a > 0$, τότε

$$\{x \in A : 1/f(x) > a\} = \{x \in A : 0 < f(x) < 1/a\}. \tag{2.1.19}$$

Τέλος, αν $a < 0$ τότε

$$\{x \in A : 1/f(x) > a\} = \{x \in A : f(x) > 0\} \cup \{x \in A : f(x) < 1/a\}. \tag{2.1.20}$$

Σε κάθε περίπτωση, το σύνολο $\{x \in A : 1/f(x) > a\}$ είναι μετρήσιμο.
(v) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\{x \in A : \max\{f, g\}(x) > a\} = \{x \in A : f(x) > a\} \cup \{x \in A : g(x) > a\} \tag{2.1.21}$$

και

$$\{x \in A : \min\{f,g\}(x) < a\} = \{x \in A : f(x) < a\} \cup \{x \in A : g(x) < a\}. \tag{2.1.22}$$

Άρα, οι $\max\{f,g\}$ και $\min\{f,g\}$ είναι μετρήσιμες. Τέλος, η $|f| = \max\{f,-f\}$ είναι μετρήσιμη. □

Μετρήσιμες συναρτήσεις με τιμές στο $\overline{\mathbb{R}}$

Το επεκτεταμένο σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι το $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty,\infty] = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Επεκτείνουμε την διάταξη του $\mathbb{R}$ στο $\overline{\mathbb{R}}$ ορίζοντας $-\infty < x < +\infty$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επεκτείνουμε την κλάση των διαστημάτων του $\mathbb{R}$ στην κλάση των διαστημάτων του $\overline{\mathbb{R}}$ προσθέτοντας τα (επεκτεταμένα) διαστήματα $[-\infty,a)$, $[-\infty,a]$, $(a,+\infty]$, $[a,+\infty]$ (όπου $a \in \mathbb{R}$) και $[-\infty,+\infty]$, $[-\infty,+\infty)$, $(-\infty,+\infty]$.

Οι ανοικτές περιοχές του $-\infty$ και του $+\infty$ είναι τα σύνολα $[-\infty,a)$ και $(a,+\infty]$ αντίστοιχα. Οι πράξεις του $\mathbb{R}$ επεκτείνονται με τον γνωστό τρόπο στο $\overline{\mathbb{R}}$. Μη επιτρεπτές πράξεις είναι οι $(+\infty)-(+\infty)$, $0\cdot(\pm\infty)$, $(\pm\infty)/0$, $(\pm\infty)/(\pm\infty)$. Οι συναρτήσεις $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$, όπου A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, λέγονται επεκτεταμένες συναρτήσεις.

Θα επεκτείνουμε τον ορισμό της μετρήσιμης συνάρτησης και στην περίπτωση συναρτήσεων με τιμές στο $\overline{\mathbb{R}}$.

Ορισμός 2.1.7. Έστω A Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Η f λέγεται **Lebesgue μετρήσιμη**, ή απλά **μετρήσιμη**, αν για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο

$$\{x \in A : f(x) > a\} = f^{-1}((a,+\infty]) \tag{2.1.23}$$

είναι μετρήσιμο.

Όλες οι Προτάσεις που αποδείξαμε ως τώρα ισχύουν για (επεκτεταμένες) μετρήσιμες συναρτήσεις (για τις πράξεις μεταξύ συναρτήσεων περιοριζόμαστε στο υποσύνολο του πεδίου ορισμού τους στο οποίο οι πράξεις είναι επιτρεπτές). Παρατηρήστε ότι, αν η $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμη, τότε τα σύνολα

$$\{x \in A : f(x) = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in A : f(x) > n\} \tag{2.1.24}$$

και

$$\{x \in A : f(x) = -\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in A : f(x) < -n\} \tag{2.1.25}$$

είναι μετρήσιμα.

Η έννοια του «σχεδόν παντού»

Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Λέμε ότι η $P(x)$ ισχύει **σχεδόν παντού στο** A αν το σύνολο Z των $x \in A$ για τα οποία δεν ισχύει η $P(x)$ έχει μέτρο μηδέν. Η επόμενη Πρόταση δείχνει ότι αν αλλάξουμε τις τιμές μιας μετρήσιμης συνάρτησης σε ένα σύνολο μέτρου μηδέν, τότε προκύπτει μετρήσιμη συνάρτηση.

Πρόταση 2.1.8. *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω $f, g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ συναρτήσεις με $f(x) = g(x)$ σχεδόν παντού στο A. Αν η f είναι μετρήσιμη, τότε η g είναι κι αυτή μετρήσιμη.*

Απόδειξη. Θέτουμε $B = \{x \in A : f(x) = g(x)\}$ και $Z = \{x \in A : f(x) \neq g(x)\}$. Αφού $\lambda(Z) = 0$, το Z είναι μετρήσιμο, άρα και το $B = A \setminus Z$ είναι μετρήσιμο.

Έστω $a \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$\begin{aligned}\{x \in A : g(x) > a\} &= \{x \in B : g(x) > a\} \cup \{x \in Z : g(x) > a\}\\ &= \{x \in B : f(x) > a\} \cup \{x \in Z : g(x) > a\}\\ &= (B \cap \{x \in A : f(x) > a\}) \cup \{x \in Z : g(x) > a\}.\end{aligned}$$

Το $B \cap \{x \in A : f(x) > a\}$ είναι μετρήσιμο διότι το B είναι μετρήσιμο και το $\{x \in A : f(x) > a\}$ είναι μετρήσιμο λόγω της μετρησιμότητας της f. Το $\{x \in Z : g(x) > a\}$ είναι μετρήσιμο ως υποσύνολο συνόλου με μέτρο 0. Άρα, το $\{x \in A : g(x) > a\}$ είναι μετρήσιμο.

Αφού το $a \in \mathbb{R}$ ήταν τυχόν, η g είναι μετρήσιμη. □

Ακολουθίες μετρήσιμων συναρτήσεων

Η επόμενη Πρόταση δείχνει ότι η μετρησιμότητα διατηρείται για το κατά σημείο όριο μιας ακολουθίας μετρήσιμων συναρτήσεων.

Πρόταση 2.1.9. *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω (f_n) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n : A \to [-\infty, +\infty]$. Τότε,*

(i) *Οι συναρτήσεις $\sup_n f_n$ και $\inf_n f_n$ είναι μετρήσιμες.*

(ii) *Αν η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο, τότε η συνάρτηση $f : A \to [-\infty, +\infty]$ με $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ είναι μετρήσιμη.*

Απόδειξη. (i) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι το

$$\{x \in A : \sup_n f_n(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in A : f_n(x) > a\} \tag{2.1.26}$$

είναι μετρήσιμο σύνολο, και το

$$\{x \in A : \inf_n f_n(x) < a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in A : f_n(x) < a\} \tag{2.1.27}$$

είναι μετρήσιμο σύνολο. Άρα, οι $\sup_n f_n$ και $\inf_n f_n$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις.

(ii) Θυμηθείτε ότι, για κάθε ακολουθία (a_n) πραγματικών αριθμών έχουμε

$$\limsup_n a_n = \inf_{m\in\mathbb{N}} \Big(\sup_{k\geqslant m} a_k\Big) \quad \text{και} \quad \liminf_n a_n = \sup_{m\in\mathbb{N}} \Big(\inf_{k\geqslant m} a_k\Big). \tag{2.1.28}$$

Η ακολουθία $b_m = \sup_{k\geqslant m} a_k$ είναι φθίνουσα και συγκλίνει στο $\limsup_n a_n$, ενώ η $\gamma_m = \inf_{k\geqslant m} a_k$ είναι αύξουσα και συγκλίνει στο $\liminf_n a_n$.

Στην περίπτωσή μας, αν θέσουμε

$$g_m(x) = \sup_{k\geqslant m} f_k(x) \quad \text{και} \quad h_m(x) = \inf_{k\geqslant m} f_k(x), \tag{2.1.29}$$

τότε, από το (i), κάθε g_m, h_m είναι μετρήσιμη συνάρτηση, και

$$f(x) = \inf_m g_m(x) = \sup_m h_m(x). \tag{2.1.30}$$

Άρα, πάλι από το (i), η f είναι μετρήσιμη. □

Σημείωση: Η απόδειξη του (ii) δίνει κάτι γενικότερο: Αν (f_n) είναι οποιαδήποτε ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n : A \to [-\infty, +\infty]$, τότε οι συναρτήσεις $\limsup_n f_n$ και $\liminf_n f_n$ που ορίζονται από τις

$$\limsup_n f_n(x) = \inf_{m\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\geqslant m} f_k(x) \right) \quad \text{και} \quad \liminf_n f_n = \sup_{m\in\mathbb{N}} \left(\inf_{k\geqslant m} f_k(x) \right), \tag{2.1.31}$$

είναι μετρήσιμες. □

Κλείνουμε αυτήν την Παράγραφο με ένα ακόμα τυπικό παράδειγμα Πρότασης που δείχνει ότι τα σύνολα μέτρου 0 είναι αμελητέα σε σχέση με την μετρησιμότητα.

Πρόταση 2.1.10. *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω $f : A \to [-\infty, +\infty]$. Αν $f_n : A \to [-\infty, +\infty]$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις και $f_n(x) \to f(x)$ σχεδόν παντού στο A, τότε η f είναι μετρήσιμη.*

Απόδειξη. Έστω $B = \{x \in A : f_n(x) \to f(x)\}$. Αν $Z = A \setminus B$, τότε $\lambda(Z) = 0$ και το B είναι μετρήσιμο.

Έστω $a \in \mathbb{R}$. Τότε, το $\{x \in B : f(x) > a\}$ είναι μετρήσιμο από την Πρόταση 2.1.9 γιατί $f_n \to f$ στο B, και το $\{x \in Z : f(x) > a\}$ είναι μετρήσιμο ως υποσύνολο του Z (το οποίο έχει μέτρο 0). Άρα, το

$$\{x \in A : f(x) > a\} = \{x \in B : f(x) > a\} \cup \{x \in Z : f(x) > a\} \tag{2.1.32}$$

είναι μετρήσιμο. Αφού το $a \in \mathbb{R}$ ήταν τυχόν, η g είναι μετρήσιμη. □

2.2 Η συνάρτηση Cantor–Lebesgue

Θεωρούμε τα σύνολα C_n που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή του συνόλου C του Cantor. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε συνάρτηση $f_n : [0,1] \to [0,1]$ ως εξής. Αν $J_1^n, \ldots, J_{2^n-1}^n$ είναι τα διαδοχικά ανοικτά διαστήματα που σχηματίζουν το $[0,1] \setminus C_n$, ορίζουμε $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$, $f_n(x) = \frac{k}{2^n}$ για κάθε x στο J_k^n, και επεκτείνουμε γραμμικά σε καθένα από τα κλειστά διαστήματα που σχηματίζουν το C_n ώστε να προκύψει συνεχής συνάρτηση.

Για παράδειγμα, έχουμε $C_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$. Η f_1 είναι σταθερή και ίση με $1/2$ στο $(1/3,2/3)$, γραμμική στο $[0,1/3]$ με $f(0) = 0$ και $f(1/3) = 1/2$, γραμμική στο $[2/3,1]$ με $f(2/3) = 1/2$ και $f(1) = 1$. Στο δεύτερο βήμα, το $[0,1] \setminus C_2$ αποτελείται από τρία ξένα ανοικτά διαστήματα: στο $(1/9,2/9)$ η f_2 είναι σταθερή και ίση με $1/4$, στο $(1/3,2/3)$ η f_2 είναι σταθερή και ίση με $1/2$, στο $(7/9,8/9)$ η f_2 είναι σταθερή και ίση με $3/4$, ενώ σε καθένα από τα τέσσερα κλειστά διαστήματα του C_2 την επεκτείνουμε γραμμικά σε συνεχή συνάρτηση, ορίζοντας πάλι $f_2(0) = 0$ και $f_2(1) = 1$.

Πρόταση 2.2.1 (συνάρτηση Cantor-Lebesgue). *Η ακολουθία $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση $f : [0,1] \to [0,1]$. Η f είναι αύξουσα και επί του $[0,1]$. Η εικόνα του C μέσω της f είναι το $[0,1]$, δηλαδή $\lambda(f(C)) = [0,1]$.*

Απόδειξη. Από την κατασκευή της η ακολουθία $\{f_n\}$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Κάθε f_n είναι αύξουσα, συνεχής συνάρτηση με $f_n(0) = 0$ και $f_n(1) = 1$.

(ii) Αν J_k^n είναι κάποιο από τα ανοικτά διαστήματα που αφαιρούμε στο n-οστό βήμα της κατασκευής του C, τότε η f_n είναι σταθερή στο J_k^n, και

$$f_n \equiv f_{n+1} \equiv f_{n+2} \equiv \cdots$$

στο J_k^n.

(iii) Ισχύει

$$\|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{2^n}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Από την τρίτη ιδιότητα ελέγχουμε εύκολα ότι η $\{f_n\}$ είναι βασική ακολουθία στον $C[0,1]$: αν $m > n$ τότε

$$\|f_m - f_n\|_\infty \leq \sum_{k=n}^{m-1} \|f_{k+1} - f_k\|_\infty \leq \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \to 0 \tag{2.2.1}$$

όταν $m, n \to \infty$. Ο $C[0,1]$ είναι πλήρης ως προς την $\|\cdot\|_\infty$, άρα υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα.

Προφανώς, $f_n \to f$ κατά σημείο στο $[0,1]$. Αφού κάθε f_n είναι αύξουσα συνάρτηση με $f_n(0) = 0$ και $f_n(1) = 1$, έπεται ότι η f είναι κι αυτή αύξουσα, συνεχής συνάρτηση με $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$. Ειδικότερα, η f είναι επί του $[0,1]$.

Τέλος, $f(C) = [0,1]$. Πράγματι, από την δεύτερη ιδιότητα της $\{f_n\}$ βλέπουμε ότι η f είναι σταθερή σε κάθε ανοικτό διάστημα J του συμπληρώματος του C, και μάλιστα αυτή η σταθερή τιμή παίρνεται και στα άκρα του J τα οποία ανήκουν στο C. Αφού η f είναι επί του $[0,1]$, κάθε $y \in [0,1]$ είναι ίσο με $f(x)$ για κάποιο $x \in C$. Από την $f(C) = [0,1]$ είναι φανερό ότι $\lambda(f(C)) = 1$. □

Σημείωση. Παρατηρήστε ότι $\lambda([0,1] \setminus C) = 1$ και $f'(x) = 0$ για κάθε $x \notin C$. Πράγματι, αν $x \notin C$ τότε το x ανήκει σε κάποιο ανοικτό διάστημα J στο οποίο η f είναι σταθερή. Συνεπώς, η f είναι παραγωγίσιμη στο x και $f'(x) = 0$. Με άλλα λόγια, η f' είναι σχεδόν παντού ίση με μηδέν, παρόλο που η f είναι αύξουσα και απεικονίζει το $[0,1]$ επί του $[0,1]$.

Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση Cantor–Lebesgue, μπορούμε να αποδείξουμε την ύπαρξη μετρήσιμων συνόλων τα οποία δεν είναι σύνολα Borel. Θα χρειαστούμε το εξής Λήμμα.

Λήμμα 2.2.2. *Έστω A σύνολο Borel στο $\mathbb{R}$ και έστω $f : A \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε, για κάθε Borel σύνολο $B \subseteq \mathbb{R}$, το $f^{-1}(B) = \{x \in A : f(x) \in B\}$ είναι σύνολο Borel.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{A} = \{B \subseteq \mathbb{R} : \text{το } f^{-1}(B) \text{ είναι σύνολο Borel}\}.$$

Αν B είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τότε το $f^{-1}(B)$ είναι ανοικτό στο A, διότι η f είναι συνεχής. Αφού το A είναι σύνολο Borel, έπεται ότι το $f^{-1}(B)$ είναι σύνολο Borel (εξηγήστε γιατί).

Εύκολα ελέγχουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα – οι λεπτομέρειες αφήνονται ως άσκηση. Αφού η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα και περιέχει τα ανοικτά σύνολα, συμπεραίνουμε ότι η Borel σ-άλγεβρα $\mathcal{B}$ περιέχεται στην $\mathcal{A}$. Από τον ορισμό της $\mathcal{A}$ έπεται ότι η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(B)$ κάθε Borel συνόλου $B \subseteq \mathbb{R}$ είναι σύνολο Borel. □

Πρόταση 2.2.3. *Υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του συνόλου του Cantor, το οποίο δεν είναι σύνολο Borel.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την συνάρτηση $g : [0,1] \to [0,2]$ με $g(x) = f(x) + x$, όπου f η συνάρτηση Cantor–Lebesgue. Η g είναι γνησίως αύξουσα, συνεχής και επί (το ίδιο και η g^{-1}).

Το σύνολο $g(C)$ είναι μετρήσιμο και $\lambda(g(C)) = 1$. Πράγματι, το $g(C)$ είναι κλειστό ως συνεχής εικόνα του συμπαγούς συνόλου C, άρα είναι μετρήσιμο. Επίσης, η g απεικονίζει κάθε ανοικτό διάστημα J του $[0,1] \setminus C$ στο $\{f(J)\} + J$, δηλαδή σε διάστημα ίσου μήκους. Άρα $\lambda(g([0,1] \setminus C)) = \sum \lambda(J) = 1$. Έπεται ότι $\lambda(g(C)) = 1$.

Αφού το $g(C)$ έχει θετικό μέτρο, υπάρχει μη μετρήσιμο υποσύνολο M του $g(C)$. Τότε, το $K = g^{-1}(M)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο διότι είναι υποσύνολο του C το οποίο έχει μηδενικό μέτρο. Όμως, το K δεν είναι σύνολο Borel: αν ήταν, από το Λήμμα 2.2.2 το $M = (g^{-1})^{-1}(K)$ θα ήταν σύνολο Borel ως αντίστροφη εικόνα συνόλου Borel μέσω συνεχούς συνάρτησης. Συνεπώς, το M θα ήταν Lebesgue μετρήσιμο. □

2.3 Προσέγγιση μετρήσιμων συναρτήσεων από απλές συναρτήσεις

Ορισμός 2.3.1 (απλή συνάρτηση). Μια συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λέγεται απλή αν είναι πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός χαρακτηριστικών συναρτήσεων μετρήσιμων συνόλων (θα μπορούσαμε να αφαιρέσουμε την υπόθεση ότι τα σύνολα είναι μετρήσιμα, και να μιλάμε για απλές *μετρήσιμες* συναρτήσεις στην περίπτωση που αυτή η υπόθεση ικανοποιείται). Δηλαδή, η φ είναι **απλή συνάρτηση** αν

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{A_i} \tag{2.3.1}$$

για κάποιον $n \in \mathbb{N}$, κάποιους πραγματικούς αριθμούς $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ και κάποια μετρήσιμα σύνολα $A_1, \ldots, A_n$.

Παρατηρήστε ότι δεν απαιτούμε από τα σύνολα A_i να είναι ξένα, ούτε από τους αριθμούς λ_i να είναι διακεκριμένοι. Δεν είναι όμως δύσκολο να διαπιστώσετε ότι μια συνάρτηση φ είναι απλή αν και μόνο αν παίρνει πεπερασμένες το πλήθος διακεκριμένες πραγματικές τιμές (μία από αυτές μπορεί να ισούται με 0). Πράγματι, το σύνολο των τιμών της συνάρτησης φ στην (2.3.1) περιέχεται στο

$$\left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i : \emptyset \neq I \subseteq \{1, \ldots, n\} \right\} \cup \{0\} \tag{2.3.2}$$

(εξηγήστε γιατί). Αν λοιπόν $\{t_1, \ldots, t_m\}$ είναι το σύνολο τιμών της φ και αν ορίσουμε

$$E_i = \{\varphi = t_i\} = \{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) = t_i\}, \tag{2.3.3}$$

τότε τα σύνολα E_i είναι ξένα και μετρήσιμα, η ένωσή τους μας δίνει το $\mathbb{R}$, και

$$\varphi = \sum_{i=1}^{m} t_i \chi_{E_i}. \tag{2.3.4}$$

Η αναπαράσταση (2.3.4) της φ είναι μονοσήμαντα ορισμένη (από την φ) και λέγεται **κανονική αναπαράσταση** της φ.

Το βασικό αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου δείχνει ότι κάθε μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση είναι κατά σημείο όριο μιας αύξουσας ακολουθίας απλών μετρήσιμων συναρτήσεων.

Θεώρημα 2.3.2. *Έστω A μετρήσιμο σύνολο και έστω $f : A \to [0,\infty]$ μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Υπάρχει αύξουσα ακολουθία (φ_n) μη αρνητικών απλών μετρήσιμων συναρτήσεων $0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \cdots \leq f$*

ώστε

$$\varphi_n(x) \nearrow f(x) \tag{2.3.5}$$

για κάθε $x \in A$. Η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε κάθε υποσύνολο του A στο οποίο η f είναι φραγμένη.

Απόδειξη. Για κάθε $n = 1, 2, \dots$ ορίζουμε $C_n = \{x \in A : f(x) \geqslant 2^n\}$ και

$$B_{n,k} = \left\{ x \in A : \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} \right\}, \quad k = 0, 1, \dots, 2^{2n} - 1. \tag{2.3.6}$$

Χωρίζουμε δηλαδή το $[0, 2^n]$ σε 2^{2n} διαστήματα μήκους 2^{-n} και θεωρούμε τις αντίστροφες εικόνες τους μέσω της f. Αφού η f είναι μετρήσιμη, τα σύνολα C_n και $B_{n,k}$ είναι μετρήσιμα. Τώρα, ορίζουμε μια απλή μετρήσιμη συνάρτηση φ_n ως εξής:

$$\varphi_n = 2^n \chi_{C_n} + \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} \frac{k}{2^n} \chi_{B_{n,k}}. \tag{2.3.7}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι κάθε φ_n ικανοποιεί τα εξής:

(i) $0 \leq \varphi_n \leq f$ και η φ_n μηδενίζεται έξω από το A.

(ii) $0 \leq f - \varphi_n \leq 2^{-n}$ στο σύνολο $A \setminus C_n = \{x \in A : f(x) < 2^n\}$.

(iii) $\varphi_n(x) = 2^n$ αν $f(x) = \infty$.

Από τα (ii) και (iii) συμπεραίνουμε ότι $\varphi_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in A$. Πράγματι, αν $f(x) = \infty$ τότε

$$\varphi_n(x) = 2^n \to \infty = f(x). \tag{2.3.8}$$

Αν $f(x) < \infty$, τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $f(x) < 2^{n_0} \leq 2^n$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Τότε, $0 \leq f(x) - \varphi_n(x) < 2^{-n}$ για κάθε $n \geqslant n_0$, άρα $\varphi_n(x) \to f(x)$. Παρόμοιος συλλογισμός δείχνει ότι $\varphi_n \to f$ ομοιόμορφα σε κάθε σύνολο της μορφής $\{x \in A : f(x) \leq M\}$, $M > 0$.

Μένει να δείξουμε ότι η (φ_n) είναι αύξουσα. Η βασική παρατήρηση είναι ότι

$$\begin{aligned} B_{n,k} &= \{x \in A : k/2^n \leq f(x) < (k+1)/2^n\} \\ &= \left\{ x \in A : \frac{2k}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k+1}{2^{n+1}} \right\} \cup \left\{ x \in A : \frac{2k+1}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k+2}{2^{n+1}} \right\} \\ &= B_{n+1,2k} \cup B_{n+1,2k+1}. \end{aligned}$$

Αν $x \in B_{n+1,2k}$, τότε $\varphi_n(x) = k/2^n = (2k)/2^{n+1} = \varphi_{n+1}(x)$, ενώ αν $x \in B_{n+1,2k+1}$, τότε $\varphi_n(x) = k/2^n < (2k+1)/2^{n+1} = \varphi_{n+1}(x)$. Τέλος, αν $x \in C_n$ έχουμε $\varphi_n(x) = 2^n \leq \varphi_{n+1}(x)$ (εξηγήστε την τελευταία ανισότητα: θα χρειαστεί να χωρίσετε το C_n στα $B_{n+1,2^{2n+1}}, B_{n+1,2^{2n+1}+1}, \dots, B_{n+1,2^{2(n+1)}-1}$ και C_{n+1}).

Σε κάθε περίπτωση $\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$, δηλαδή $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$. □

Έστω $f : A \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.3.2 για τις f^+ και f^- χωριστά, παίρνουμε το εξής.

Πόρισμα 2.3.3. *Έστω $f : A \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υπάρχει ακολουθία (φ_n) απλών μετρήσιμων συναρτήσεων $\varphi_n : A \to \mathbb{R}$ με*

$$0 \leq |\varphi_1| \leq |\varphi_2| \leq \cdots \leq |f| \tag{2.3.9}$$

και $\varphi_n(x) \to f(x)$ *για κάθε* $x \in A$. *Η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε κάθε υποσύνολο του* A *στο οποίο η* f *είναι φραγμένη.*

Απόδειξη. Υπάρχουν αύξουσες ακολουθίες (ψ_n) και (ζ_n) μη αρνητικών απλών μετρήσιμων συναρτήσεων ώστε $\psi_n(x) \to f^+(x)$ και $\zeta_n(x) \to f^-(x)$ για κάθε $x \in A$. Τότε, αν ορίσουμε $\varphi_n = \psi_n - \zeta_n$, έχουμε $\varphi_n(x) \to f^+(x) - f^-(x) = f(x)$ για κάθε $x \in A$.

Οι f^+ και f^- είναι φραγμένες σε κάθε υποσύνολο B του A στο οποίο η f είναι φραγμένη. Συνεπώς, $\psi_n \to f^+$ και $\zeta_n \to f^-$ ομοιόμορφα στο B, απ¨ όπου έπεται ότι $\varphi_n \to f$ ομοιόμορφα στο B.

Παρατηρήστε επίσης ότι: αν $C = \{f < 0\}$ τότε $\psi_n \equiv 0$ στο C και $\zeta_n \equiv 0$ στο $A \setminus C$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς,

$$|\varphi_n| = \psi_n + \zeta_n \leq f^+ + f^- = |f|. \tag{2.3.10}$$

Από την σχέση αυτή και από το γεγονός ότι οι (ψ_n) και (ζ_n) είναι αύξουσες ακολουθίες συναρτήσεων, έπεται επίσης ότι

$$|\varphi_n| = \psi_n + \zeta_n \leq \psi_{n+1} + \zeta_{n+1} = |\varphi_{n+1}|. \tag{2.3.11}$$

Από τις (2.3.10) και (2.3.11) έπεται η (2.3.9). □

Παρατηρήστε ότι στην κατασκευή που κάναμε για την απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.2, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι η f είναι μετρήσιμη μόνο για να εξασφαλίσουμε ότι τα C_n, $B_{n,k}$ είναι μετρήσιμα σύνολα, δηλαδή για να συμπεράνουμε ότι οι απλές συναρτήσεις φ_n είναι μετρήσιμες. Η σύγκλιση των φ_n στην f ισχύει τελείως γενικά.

Συνδυάζοντας το Θεώρημα 2.3.2 με την Πρόταση 2.1.9 παίρνουμε τον εξής χαρακτηρισμό των μετρήσιμων συναρτήσεων.

Θεώρημα 2.3.4. *Έστω* A *μετρήσιμο σύνολο και έστω* $f : A \to [-\infty, +\infty]$. *Η* f *είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν είναι κατά σημείο όριο μιάς ακολουθίας απλών μετρήσιμων συναρτήσεων.* □

2.4 Οι τρεις «αρχές του Littlewood»

Οι τρεις «αρχές του Littlewood» διατυπώνονται με κάπως «έντονο τρόπο» ως εξής:

(i) Κάθε σύνολο είναι σχεδόν ίσο με μια πεπερασμένη ένωση διαστημάτων.

(ii) Κάθε συνάρτηση είναι σχεδόν συνεχής.

(iii) Κάθε ακολουθία συναρτήσεων που συγκλίνει κατά σημείο, συγκλίνει σχεδόν ομοιόμορφα.

Φυσικά, πρέπει να δώσει κανείς την ακριβή διατύπωση αυτών των ισχυρισμών (αλλιώς, είναι προφανώς λανθασμένοι). Τα σύνολα και οι συναρτήσεις στα οποία αναφερόμαστε πρέπει να είναι μετρήσιμα και το τι εννοούμε λέγοντας «σχεδόν» πρέπει να γίνει σαφές. Η χρησιμότητα όμως αυτών των προτάσεων είναι μεγάλη.

Θεώρημα 2.4.1 (μετρήσιμα σύνολα). *Έστω* A *μετρήσιμο υποσύνολο του* $\mathbb{R}$ *με* $\lambda(A) < +\infty$. *Για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχουν διαστήματα* $I_1, \dots, I_k$ *ώστε το σύνολο* $E = I_1 \cup \cdots \cup I_k$ *να ικανοποιεί την* $\lambda(E \triangle A) < \varepsilon$.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό του (εξωτερικού) μέτρου, υπάρχει ακολουθία (I_n) διαστημάτων ώστε $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) < \lambda(A) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.4.1}$$

Αφού η σειρά των $\lambda(I_n)$ συγκλίνει, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \lambda(I_n) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.4.2}$$

Ορίζουμε $E = I_1 \cup \cdots \cup I_k$. Παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned} \lambda(E \setminus A) &\leq \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \setminus A\right) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) - \lambda(A) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) - \lambda(A) < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

και

$$A \setminus E = A \setminus (I_1 \cup \cdots \cup I_k) \subseteq \bigcup_{n=k+1}^{\infty} I_n,$$

άρα

$$\lambda(A \setminus E) \leq \lambda\left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} I_n\right) \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \lambda(I_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Έπεται ότι

$$\lambda(A \triangle E) = \lambda(A \setminus E) + \lambda(E \setminus A) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \tag{2.4.3}$$

δηλαδή το ζητούμενο. □

Θεώρημα 2.4.2 (θεώρημα Egorov). *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(A) < +\infty$ και έστω (f_k) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_k : A \to \mathbb{R}$ η οποία συγκλίνει κατά σημείο στην μετρήσιμη συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ σχεδόν παντού στο A. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κλειστό σύνολο $F_\varepsilon \subseteq A$ ώστε $\lambda(A \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$ και $f_k \to f$ ομοιόμορφα στο F_ε.*

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f_k \to f$ παντού στο A (εξηγήστε γιατί). Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε το σύνολο

$$A_{n,m} = \left\{x \in A : |f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{n} \text{ για κάθε } k \geqslant m\right\} = \bigcap_{k=m}^{\infty} \{|f_k - f| < 1/n\}. \tag{2.4.4}$$

Σταθεροποιούμε $n \in \mathbb{N}$. Παρατηρήστε ότι

$$A_{n,m+1} = \bigcap_{k=m+1}^{\infty} \{|f_k - f| < 1/n\} \supseteq \bigcap_{k=m}^{\infty} \{|f_k - f| < 1/n\} = A_{n,m} \tag{2.4.5}$$

δηλαδή, η ακολουθία $(A_{n,m})_{m=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα. Παρατηρήστε επίσης ότι, για κάθε $x \in A$ υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $|f_k(x) - f(x)| < 1/n$ για κάθε $k \geqslant m$, διότι $f_k(x) \to f(x)$. Συνεπώς, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in A_{n,m}$.

Αυτό αποδεικνύει ότι

$$A = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{n,m}. \tag{2.4.6}$$

Συνεπώς, $\lambda(A_{n,m}) \to \lambda(A)$. Άρα, μπορούμε να βρούμε $m_n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\lambda(A) < \lambda(A_{n,m_n}) + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}. \tag{2.4.7}$$

Ορίζουμε

$$U_\varepsilon = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{n,m_n}. \tag{2.4.8}$$

Τότε, $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο U_ε. Αυτό αιτιολογείται ως εξής: έστω $\delta > 0$. Μπορούμε να βρούμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $1/n < \delta$. Τότε, για κάθε $k \geqslant m_n$ και για κάθε $x \in U_\varepsilon$ έχουμε $x \in A_{n,m_n}$, άρα

$$|f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{n} < \delta. \tag{2.4.9}$$

Δηλαδή, $\|(f_k - f)\,|_{U_\varepsilon}\,\|_\infty < \delta$ για κάθε $k \geqslant m_n$.

Επίσης, από την (2.4.7) βλέπουμε ότι

$$\lambda(A \setminus U_\varepsilon) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A \setminus A_{n,m_n})\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A \setminus A_{n,m_n}) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.4.10}$$

Το U_ε είναι μετρήσιμο, όχι απαραίτητα κλειστό, σύνολο. Μπορούμε λοιπόν να βρούμε κλειστό σύνολο $F_\varepsilon \subseteq U_\varepsilon$ ώστε $\lambda(U_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$. Τότε,

$$\lambda(A \setminus F_\varepsilon) = \lambda(A \setminus U_\varepsilon) + \lambda(U_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \tag{2.4.11}$$

και από το γεγονός ότι $f_k \to f$ ομοιόμορφα στο U_ε είναι φανερό ότι $f_k \to f$ ομοιόμορφα στο F_ε. □

Παρατήρηση 2.4.3. Η υπόθεση ότι $\lambda(A) < +\infty$ είναι απαραίτητη. Αν θεωρήσουμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_k = \chi_{[k,\infty)}$, τότε $f_k(x) \to 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όμως, για κάθε μετρήσιμο $C \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(C) < +\infty$ ισχύει $\|f_k\,|_{\mathbb{R}\setminus C}\,\|_\infty = 1$. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούμε να έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση της (f_k) στην μηδενική συνάρτηση σε κάποιο σύνολο F_ε για το οποίο $\lambda(\mathbb{R} \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$. Εξηγήστε τις λεπτομέρειες.

Θεώρημα 2.4.4 (θεώρημα Luzin). *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(A) < +\infty$ και έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κλειστό σύνολο $F_\varepsilon \subseteq A$ ώστε $\lambda(A \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$ και η $f\,|_{F_\varepsilon}$ να είναι συνεχής συνάρτηση.*

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα τον ισχυρισμό του Θεωρήματος στην περίπτωση που η f είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση $f = \chi_E$ κάποιου μετρήσιμου υποσυνόλου του A. Έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε V κλειστό υποσύνολο του A και G ανοικτό στο A ώστε $V \subseteq E \subseteq G$ και $\lambda(G \setminus F) < \varepsilon/2$. Θεωρούμε τον περιορισμό της f στο $F_1 = V \cup (A \setminus G)$. Τα $V, A \setminus G$ είναι κλειστά στο A και έχουμε $f \equiv 1$ στο V και $f \equiv 0$ στο $A \setminus G$. Μπορούμε τότε να ελέγξουμε ότι η $f|_{F_1}$ είναι συνεχής (εξηγήστε το, για παράδειγμα, με την αρχή της μεταφοράς). Κατόπιν, μπορούμε να βρούμε κλειστό $F \subseteq F_1$ με $\lambda(F_1 \setminus F) < \varepsilon/2$. Τότε, $\lambda(A \setminus F) < \varepsilon$ και η $f|_F$ είναι συνεχής.

Απο τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις υποσυνόλων του A μπορούμε τώρα να περάσουμε σε συναρτήσεις της μορφής

$$\varphi = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \chi_{E_i}, \tag{2.4.12}$$

όπου $\lambda_i \in \mathbb{R}$ και E_i μετρήσιμα υποσύνολα του A (εξηγήστε τις λεπτομέρειες).

Έστω τώρα $f : A \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Από το Θεώρημα 2.3.2 υπάρχει ακολουθία (φ_n) συναρτήσεων της μορφής (2.4.12) ώστε $\varphi_n \to f$ στο A. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $A_n \subseteq A$ με $\lambda(A \setminus A_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+3}}$ ώστε η $\varphi_n|_{A_n}$ να είναι συνεχής. Επίσης, από το θεώρημα του Egorov μπορούμε να βρούμε $B \subseteq A$ με $\lambda(A \setminus B) < \varepsilon/4$ ώστε $\varphi_n \to f$ ομοιόμορφα στο B. Ορίζουμε

$$U_\varepsilon = B \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right). \tag{2.4.13}$$

Τότε,

$$\lambda(A \setminus U_\varepsilon) \leq \lambda(A \setminus B) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A \setminus A_n) < \frac{\varepsilon}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+3}} = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.4.14}$$

Επίσης, όλες οι $\varphi_n|_{U_\varepsilon}$ είναι συνεχείς (διότι $U_\varepsilon \subseteq A_n$ για κάθε n) και $\varphi_n|_{U_\varepsilon} \to f|_{U_\varepsilon}$ ομοιόμορφα (διότι $U_\varepsilon \subseteq B$). Έπεται ότι η $f|_{U_\varepsilon}$ είναι συνεχής.

Το U_ε είναι μετρήσιμο, όχι απαραίτητα κλειστό, σύνολο. Μπορούμε λοιπόν να βρούμε κλειστό σύνολο $F_\varepsilon \subseteq U_\varepsilon$ ώστε $\lambda(U_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$. Τότε,

$$\lambda(A \setminus F_\varepsilon) = \lambda(A \setminus U_\varepsilon) + \lambda(U_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \tag{2.4.15}$$

και από το γεγονός ότι η $f|_{U_\varepsilon}$ είναι συνεχής είναι φανερό ότι η $f|_{F_\varepsilon}$ είναι συνεχής. □

2.5 Ασκήσεις

Ομάδα Α΄

1. Έστω A μετρήσιμο σύνολο και έστω $f : E \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι, για κάθε $a \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση $f_a : A \to [-\infty, +\infty]$ με

$$f_a(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } f(x) \leq a \\ \\ a, & \text{αν} f(x) > a \end{cases}$$

είναι μετρήσιμη.

2. Αν η $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη, τότε η f' είναι μετρήσιμη.

Υπόδειξη: Γράψτε την f' σαν όριο μιας ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων.

3. (α) Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) = 0$, δείξτε ότι κάθε συνάρτηση $f : A \to [-\infty, +\infty]$ είναι μετρήσιμη.

(β) Έστω A, B μετρήσιμα σύνολα με $\lambda(B) = 0$ και έστω $f : A \cup B \to [-\infty, +\infty]$ μια συνάρτηση της οποίας ο περιορισμός $f|_A$ στο A είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

(γ) Αν το $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμο σύνολο και η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής σχεδόν παντού στο A, δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

4. (α) Δώστε παράδειγμα μη μετρήσιμης συνάρτησης f με την ιδιότητα η f^2 να είναι μετρήσιμη.

(β) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο και έστω $f : A \to \mathbb{R}$. Αν η f^2 είναι μετρήσιμη και το σύνολο $\{x \in A : f(x) > 0\}$ είναι μετρήσιμο, δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

5. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο και $f_n : A \to [-\infty, +\infty]$, $n \in \mathbb{N}$, ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Δείξτε ότι το σύνολο

$$L = \{x \in A \mid \text{ η ακολουθία } (f_n(x))_{n=1}^{\infty} \text{ συγκλίνει } \}$$

είναι μετρήσιμο.

6. Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω $f : A \to [-\infty, +\infty]$ συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: Για κάθε $q \in \mathbb{Q}$, το σύνολο $\{x \in A : f(x) > q\}$ είναι μετρήσιμο. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

7. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι αν το B είναι σύνολο Borel, τότε το $f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in B\}$ είναι μετρήσιμο.

Υπόδειξη: Η κλάση $\{E \subseteq \mathbb{R} \mid \text{ το } f^{-1}(E) \text{ είναι μετρήσιμο}\}$ είναι σ-άλγεβρα και περιέχει τα ανοιχτά σύνολα.

Ομάδα Β΄

8. (α) Δείξτε ότι αν η $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και η $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη, τότε η $h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη.

(β) Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση Cantor–Lebesgue βρείτε μια συνεχή συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και μια Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε η $h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ να μην είναι Lebesgue μετρήσιμη.

9. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση.

(α) Δείξτε ότι η f απεικονίζει F_σ-σύνολα σε F_σ-σύνολα.

(β) Δείξτε ότι η f απεικονίζει μετρήσιμα σύνολα σε μετρήσιμα σύνολα αν και μόνο αν για κάθε $A \subset [a, b]$ με $\lambda(A) = 0$ ισχύει $\lambda(f(A)) = 0$.

10. Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(A) < \infty$ και έστω $f : A \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $\omega_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$\omega_f(t) = \lambda(\{x \in A : f(x) > t\}).$$

(α) Δείξτε ότι η ω_f είναι φθίνουσα και συνεχής από δεξιά. Σε ποιά σημεία είναι ασυνεχής;

(β) Αν οι $f_k, f : A \to \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμες και $f_k \uparrow f$, δείξτε ότι $\omega_{f_k} \uparrow \omega_f$.

11. Έστω E μη μετρήσιμο υποσύνολο του $(0, 1)$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x\chi_E(x)$. Δείξτε ότι η f δεν είναι μετρήσιμη, αλλά για κάθε $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ το σύνολο $\{x : f(x) = \alpha\}$ είναι μετρήσιμο.

Μπορείτε να βρείτε μη μετρήσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x : g(x) = \alpha\}$ να είναι μετρήσιμο;

12. Σωστό ή λάθος; Αν η f είναι μετρήσιμη στο $(a, b - \varepsilon)$ για κάθε $0 < \varepsilon < b - a$, τότε η f είναι μετρήσιμη στο (a, b).

13. Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση. Δείξτε ότι η $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη.

14. Έστω (φ_n) ακολουθία απλών μετρήσιμων συναρτήσεων $\varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αν $\varphi_n \to f$ ομοιόμορφα, δείξτε ότι η f είναι φραγμένη.

Ομάδα Γ΄

15. (α) Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις και έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι: αν $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\{x : f_n(x) > \alpha\}) < \infty$, τότε υπάρχει $Z \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(Z) = 0$ ώστε $\limsup_{n\to\infty} f_n(x) \leq \alpha$ για κάθε $x \notin Z$.

(β) Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις και έστω $\varepsilon_n \to 0^+$. Δείξτε ότι: αν $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\{x : f_n(x) > \varepsilon_n\}) < \infty$, τότε υπάρχει $Z \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(Z) = 0$ ώστε $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \notin Z$.

16. Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (α_n) θετικών πραγματικών αριθμών και υπάρχει $Z \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(Z) = 0$ ώστε $\lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x)}{\alpha_n} = 0$ για κάθε $x \notin Z$.

Υπόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $\beta_n > 0$ ώστε $\lambda(\{x : |f_n(x)| > \beta_n\}) < 1/2^n$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Ολοκλήρωμα Lebesgue

Σε αυτήν την παράγραφο θα ορίσουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue. Οι ιδιότητες που θα θέλαμε να ικανοποιεί είναι οι εξής:

(i) Αν το A είναι μετρήσιμο, τότε $\int \chi_A = \lambda(A)$, όπου χ_A είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του A.

(ii) Το ολοκλήρωμα είναι γραμμικό: αν f, g είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις (ορισμένες στο ίδιο σύνολο) και $t, s \in \mathbb{R}$, τότε

$$\int (tf + sg) = t \int f + s \int g.$$

(iii) Το ολοκλήρωμα είναι «θετικό»: αν η f είναι ολοκληρώσιμη και $f \geqslant 0$, τότε $\int f \geqslant 0$. Αφού απαιτούμε και την γραμμικότητα, η θετικότητα είναι ισοδύναμη με την μονοτονία: αν οι f, g είναι ολοκληρώσιμες (ορισμένες στο ίδιο σύνολο) και $f \geqslant g$, τότε $\int f \geqslant \int g$.

(iv) Το ολοκλήρωμα ορίζεται για μια ευρεία κλάση συναρτήσεων. Οι φραγμένες Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις είναι Lebesgue ολοκληρώσιμες, και τα δύο ολοκληρώματα συμπίπτουν.

Ο ορισμός του ολοκληρώματος Lebesgue δίνεται σε τρία βήματα. Τελείως σχηματικά, η διαδικασία που θα ακολουθήσουμε είναι η εξής:

(i) Στην §3.1 ορίζουμε το ολοκλήρωμα για κάποιες απλές μετρήσιμες συναρτήσεις, τους γραμμικούς συνδυασμούς χαρακτηριστικών συναρτήσεων μετρήσιμων συνόλων με πεπερασμένο μέτρο. Ο ορισμός είναι προφανής από τις ιδιότητες (i) και (ii) που απαιτούμε για το ολοκλήρωμα.

(ii) Στην §3.2 δίνουμε τον ορισμό του $\int f$ για κάθε μετρήσιμη $f \geqslant 0$. Η απαίτηση της μονοτονίας και το γεγονός ότι κάθε μετρήσιμη μη αρνητική συνάρτηση είναι το όριο μιας αύξουσας ακολουθίας απλών μετρήσιμων συναρτήσεων υποδεικνύουν ότι το $\int f$ θα μπορούσε να οριστεί ως το supremum των ολοκληρωμάτων $\int \varphi$ πάνω από όλες τις απλές, μη αρνητικές, ολοκληρώσιμες $\varphi \leq f$.

(iii) Στην §3.3 δίνουμε τον γενικό ορισμό: $\int f = \int f^+ - \int f^-$, αν το δεξιό μέλος έχει νόημα. Ο ορισμός αυτός επιβάλλεται από την απαίτηση της γραμμικότητας.

Στην πορεία, θα αποδείξουμε τις βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος Lebesgue. Ιδιαίτερα μας ενδιαφέρουν οι καλές ιδιότητες του ολοκληρώματος Lebesgue σε σχέση με τις συγκλίνουσες ακολουθίες ολοκληρώσιμων συναρτήσεων (θεώρημα μονότονης σύγκλισης και θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης).

Το ολοκλήρωμα Lebesgue ορίζεται καλά για κάθε φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση που είναι ορισμένη σε κλειστό διάστημα. Ειδικότερα, οι Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες κατά Lebesgue. Στην §3.4 συγκρίνουμε τα δύο ολοκληρώματα.

3.1 Ολοκλήρωμα Lebesgue για απλές μετρήσιμες συναρτήσεις

Ορισμός 3.1.1. Έστω $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ απλή μετρήσιμη συνάρτηση. Λέμε ότι η φ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη αν το σύνολο

$$\{\varphi \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) \neq 0\}$$

έχει πεπερασμένο μέτρο. Αυτό σημαίνει ότι η κανονική αναπαράσταση της φ είναι

$$\varphi = \sum_{i=0}^{n} t_i \chi_{A_i}, \tag{3.1.1}$$

όπου $t_0 = 0$ και $A_0 = \{\varphi = 0\}$, οι t_i είναι διακεκριμένοι, τα A_i είναι ξένα και μετρήσιμα, και $\lambda(A_i) < +\infty$ αν $i \neq 0$ (αναγκαστικά, $\lambda(A_0) = \infty$). Το ολοκλήρωμα της φ ορίζεται από την

$$\int \varphi = \sum_{i=1}^{n} t_i \lambda(A_i). \tag{3.1.2}$$

Αν υιοθετήσουμε την σύμβαση $0 \cdot \infty = 0$, μπορούμε να γράψουμε

$$\int \varphi = \sum_{i=0}^{n} t_i \lambda(A_i) = \sum_{t \in \mathbb{R}} t\, \lambda(\{\varphi = t\}). \tag{3.1.3}$$

Λήμμα 3.1.2. *Έστω φ ολοκληρώσιμη απλή συνάρτηση και έστω $\varphi = \sum_{i=1}^{n} b_i \chi_{E_i}$ τυχούσα αναπαράσταση της φ ώστε τα E_i να είναι ξένα και μετρήσιμα. Τότε,*

$$\int \varphi = \sum_{i=1}^{n} b_i \lambda(E_i). \tag{3.1.4}$$

Απόδειξη. Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ θέτουμε $J_t = \{i \leq n : b_i = t\}$. Τότε,

$$\{\varphi = t\} = \bigcup_{i \in J_t} E_i \tag{3.1.5}$$

και

$$t\, \lambda(\{\varphi = t\}) = \sum_{i \in J_t} b_i \lambda(E_i). \tag{3.1.6}$$

Άρα,

$$\int \varphi = \sum_{t \in \mathbb{R}} t\, \lambda(\{\varphi = t\}) = \sum_{t \in \mathbb{R}} \sum_{i \in J_t} b_i \lambda(E_i) = \sum_{i \in \cup_t J_t} b_i \lambda(E_i) = \sum_{i=1}^{n} b_i \lambda(E_i). \tag{3.1.7}$$

Δηλαδή, ισχύει η (3.1.4). □

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.1.2 μπορούμε να δείξουμε ότι το ολοκλήρωμα είναι γραμμικό και μονότονο (στην κλάση των απλών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων).

Πρόταση 3.1.3. *Έστω φ και ψ απλές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις.*

(i) *Αν $t, s \in \mathbb{R}$, τότε $\int (t\varphi + s\psi) = t\int \varphi + s\int \psi$.*

(ii) *Αν $\varphi \geqslant \psi$, τότε $\int \varphi \geqslant \int \psi$.*

Απόδειξη. (i) Θεωρούμε τις κανονικές μορφές

$$\varphi = \sum_{i=0}^{n} a_i \chi_{A_i} \quad \text{και} \quad \psi = \sum_{j=0}^{k} b_j \chi_{B_j}, \tag{3.1.8}$$

των φ και ψ (οι a_i είναι διακεκριμένοι, τα A_i ξένα μετρήσιμα με ένωση το $\mathbb{R}$, $a_0 = 0$ και $\lambda(A_i) < \infty$ αν $i \neq 0$ – αντίστοιχες ιδιότητες έχουν τα b_j, B_j). Παρατηρούμε ότι, από την $\bigcup_{i=0}^{n} A_i = \bigcup_{j=0}^{k} B_j = \mathbb{R}$ έπεται ότι

$$\mathbb{R} = \bigcup_{i=0}^{n} \bigcup_{j=0}^{k} (A_i \cap B_j). \tag{3.1.9}$$

Τα $A_i \cap B_j$ είναι ξένα, μετρήσιμα, και έχουν πεπερασμένο μέτρο (με την εξαίρεση του $A_0 \cap B_0$). Επίσης,

$$\varphi = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} a_i \chi_{A_i \cap B_j} \ , \quad \psi = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} b_j \chi_{A_i \cap B_j} \tag{3.1.10}$$

και

$$t\varphi + s\psi = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} (ta_i + sb_j) \chi_{A_i \cap B_j}. \tag{3.1.11}$$

Από το Λήμμα 3.1.2 παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\int (t\varphi + s\psi) &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} (ta_i + sb_j) \lambda(A_i \cap B_j) \\
&= t \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} a_i \lambda(A_i \cap B_j) + s \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} b_j \lambda(A_i \cap B_j) \\
&= t \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0}^{k} \lambda(A_i \cap B_j) + s \sum_{j=0}^{k} b_j \sum_{i=0}^{n} \lambda(A_i \cap B_j) \\
&= t \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda(A_i) + s \sum_{j=0}^{k} b_j \lambda(B_j) \\
&= t \int \varphi + s \int \psi.
\end{aligned}$$

(ii) Αν $\varphi \geqslant \psi$, τότε η $\varphi - \psi$ είναι απλή ολοκληρώσιμη συνάρτηση με μη αρνητικές τιμές. Από το (i),

$$\int \varphi - \int \psi = \int (\varphi - \psi) \geqslant 0. \tag{3.1.12}$$

Η τελευταία ανισότητα είναι προφανής από την (3.1.2), αφού $\varphi - \psi \geqslant 0$. $\square$

Πόρισμα 3.1.4. *Έστω $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$ και $E_1,\dots,E_n$ – όχι αναγκαστικά ξένα – μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με $\lambda(E_i)<\infty$, $i=1,\dots,n$. Τότε,*

$$\int\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{E_i}\right)=\sum_{i=1}^{n}a_i\lambda(E_i). \tag{3.1.13}$$

Απόδειξη. Κάθε χ_{E_i} είναι απλή και ολοκληρώσιμη, διότι $\lambda(E_i)<\infty$. Το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα από την γραμμικότητα του ολοκληρώματος για απλές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. □

Ορισμός 3.1.5. Έστω φ απλή ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Για κάθε μετρήσιμο υποσύνολο E του $\mathbb{R}$ ορίζουμε

$$\int_E\varphi:=\int\varphi\chi_E. \tag{3.1.14}$$

Η $\varphi\chi_E$ είναι απλή και ολοκληρώσιμη: αν $\varphi=\sum a_i\chi_{A_i}$, τότε $\varphi\chi_E=\sum a_i\chi_{A_i}\chi_E=\sum a_i\chi_{A_i\cap E}$ και τα σύνολα $A_i\cap E$ έχουν πεπερασμένο μέτρο, διότι τα σύνολα A_i έχουν πεπερασμένο μέτρο. Συνεπώς, το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος της (3.1.14) ορίζεται καλά.

Στην περίπτωση που $E=[a,b]$, θα χρησιμοποιούμε και τον συμβολισμό

$$\int_a^b\varphi:=\int_{[a,b]}\varphi. \tag{3.1.15}$$

Γενικά, θα αποφεύγουμε τον συμβολισμό $\int_a^b\varphi(x)dx$ για το ολοκλήρωμα Lebesgue (ώστε να μην υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης με το ολοκλήρωμα Riemann).

Παρατήρηση 3.1.6. Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο με μια απλή παρατήρηση. Η συνάρτηση του Dirichlet $\chi_{\mathbb{Q}}:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι απλή και ολοκληρώσιμη (το $\mathbb{Q}$ είναι μετρήσιμο). Έχουμε

$$\int_a^b\chi_{\mathbb{Q}}=0 \tag{3.1.16}$$

για κάθε κλειστό διάστημα $[a,b]$. Θυμηθείτε ότι η $\chi_{\mathbb{Q}}$ δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

3.2 Ολοκλήρωμα Lebesgue για μη αρνητικές συναρτήσεις

Ορισμός 3.2.1. Έστω $f:\mathbb{R}\to[0,\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε το **ολοκλήρωμα Lebesgue** της f ως εξής:

$$\int f=\sup\left\{\int\varphi \mid 0\le\varphi\le f,\varphi\ \text{απλή ολοκληρώσιμη}\right\}. \tag{3.2.1}$$

Η ποσότητα αυτή είναι καλά ορισμένη (η μηδενική συνάρτηση είναι απλή ολοκληρώσιμη και $0\le f$), μη αρνητική και μπορεί να πάρει την τιμή $+\infty$. Θα λέμε ότι η f είναι **Lebesgue ολοκληρώσιμη** αν $\int f<+\infty$.

Παρατηρήσεις 3.2.2. (α) Το πρώτο πράγμα που πρέπει να εξασφαλίσουμε είναι ότι ο νέος ορισμός του ολοκληρώματος συμφωνεί με τον ορισμό του ολοκληρώματος της §3.1 στην περίπτωση των μη αρνητικών απλών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Δηλαδή ότι, αν η $\varphi\geqslant 0$ είναι απλή ολοκληρώσιμη, τότε

$$\int \varphi = \sup\Big\{ \int \psi \mid 0 \leq \psi \leq \varphi, \psi \text{ απλή ολοκληρώσιμη } \Big\}. \tag{3.2.2}$$

Αυτό είναι άμεσο, από την μονοτονία του ολοκληρώματος απλών συναρτήσεων - Πρόταση 3.1.3 - και από την $0 \leq \varphi \leq \varphi$.

Παρατηρήστε ότι, με τον νέο ορισμό, έχουμε τώρα ορίσει το $\int \varphi$ για κάθε μη αρνητική απλή μετρήσιμη συνάρτηση (δεν απαιτούμε την $\lambda(\{\varphi \neq 0\}) < \infty$). Ειδικότερα, αν A είναι οποιοδήποτε μετρήσιμο σύνολο, τότε $\int \chi_A = \lambda(A)$. Αυτό έπεται από τον ορισμό στην περίπτωση που $\lambda(A) < \infty$, ενώ αν $\lambda(A) = \infty$ έχουμε $\chi_A \geqslant \chi_{A\cap[-n,n]}$ άρα

$$\int \chi_A \geqslant \sup_n \int \chi_{A\cap[-n,n]} = \sup_n \lambda(A \cap [-n,n]) = \lambda(A) = \infty. \tag{3.2.3}$$

(β) Από τον ορισμό έπονται άμεσα οι εξής ιδιότητες:

(i) Αν $0 \leq f \leq g$ τότε $\int f \leq \int g$.

(ii) Αν $t > 0$ και $f \geqslant 0$ τότε $\int (tf) = t \int f$.

(γ) Έστω $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση και έστω E μετρήσιμο σύνολο. Ορίζουμε

$$\int_E f = \int f\chi_E. \tag{3.2.4}$$

Αν $f : E \to [0,\infty]$, επεκτείνουμε την f σε μια συνάρτηση $\tilde{f} : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ θέτοντας $\tilde{f}(x) = 0$ αν $x \notin E$, και ορίζουμε

$$\int_E f = \int \tilde{f}. \tag{3.2.5}$$

Παρατηρήστε ότι η $\tilde{f}$ είναι μετρήσιμη και $\int_E \tilde{f} = \int \tilde{f} = \int_E f$.

(δ) Μερικές ακόμα χρήσιμες ιδιότητες προκύπτουν εύκολα από τον ορισμό (3.2.4):

(iii) Αν $\lambda(E) = 0$ και $f \geqslant 0$, τότε $\int_E f = 0$. Πράγματι, αν η φ είναι απλή ολοκληρώσιμη και $0 \leq \varphi \leq f\chi_E$, τότε $\varphi\chi_E = \sum_{i=1}^n a_i\chi_{E_i}$ όπου $\lambda(E_i) = 0$, άρα

$$\int \varphi = \int \varphi\chi_E = 0. \tag{3.2.6}$$

(iv) Αν $E \subset F$ και $f \geqslant 0$, τότε $\int_E f \leq \int_F f$. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $f\chi_E \leq f\chi_F$.

(v) Αν $0 \leq f \leq M$ στο E, τότε $\int_E f \leq M\lambda(E)$. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $f\chi_E \leq M\chi_E$.

Η ανισότητα της επόμενης Πρότασης είναι απλή αλλά, όπως θα δούμε στη συνέχεια, εξαιρετικά σημαντική.

Θεώρημα 3.2.3 (ανισότητα του Markov). *Έστω $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Για κάθε $a > 0$,*

$$\int f \geqslant a \cdot \lambda(\{x : f(x) \geqslant a\}). \tag{3.2.7}$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι $f \geqslant a\chi_{\{f\geqslant a\}}$. Άρα,

$$\int f \geqslant \int a\chi_{\{f\geqslant a\}} = a\,\lambda(\{f \geqslant a\}). \tag{3.2.8}$$

Πόρισμα 3.2.4. *Έστω $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε, η f παίρνει πεπερασμένη τιμή σχεδόν παντού: $\lambda(\{f = +\infty\}) = 0$.*

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\{f = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{f \geqslant n\}. \tag{3.2.9}$$

Η ακολουθία $E_n = \{f \geqslant n\}$ είναι φθίνουσα, και από την ανισότητα του Markov έχουμε

$$\lambda(E_n) \leq \frac{1}{n}\int f \to 0 \tag{3.2.10}$$

όταν $n \to \infty$. Άρα,

$$\lambda(\{f = +\infty\}) = \lim_{n\to\infty}\lambda(E_n) = 0 \tag{3.2.11}$$

από την Πρόταση 4.4.10. □

Το πρώτο θεμελιώδες θεώρημα για το ολοκλήρωμα Lebesgue είναι το **θεώρημα μονότονης σύγκλισης**. Μεταξύ άλλων, θα μας εξασφαλίσει την γραμμικότητα του ολοκληρώματος Lebesgue για μη αρνητικές συναρτήσεις. Για την απόδειξή του θα χρειαστούμε ένα Λήμμα.

Λήμμα 3.2.5. *Έστω φ απλή ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν (E_n) είναι μια αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συνόλων και $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, τότε*

$$\int_E \varphi = \lim_{n\to\infty}\int_{E_n}\varphi. \tag{3.2.12}$$

Απόδειξη. Μπορούμε να γράψουμε $\varphi = \sum_{i=1}^{m} a_i\chi_{A_i}$, όπου $a_i > 0$ και τα A_i είναι ξένα μετρήσιμα σύνολα με πεπερασμένο μέτρο. Τότε,

$$\int_E \varphi = \int \varphi\chi_E = \sum_{i=1}^{m} a_i\lambda(A_i \cap E). \tag{3.2.13}$$

Αφού $E_n \nearrow E$, έχουμε $\lambda(A_i \cap E_n) \nearrow \lambda(A_i \cap E)$ για κάθε $i = 1,\dots,m$. Άρα,

$$\begin{aligned}\int \varphi &= \sum_{i=1}^{m} a_i\lambda(A_i \cap E) = \sum_{i=1}^{m} a_i \lim_{n\to\infty}\lambda(A_i \cap E_n)\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m} a_i\lambda(A_i \cap E_n) = \lim_{n\to\infty}\int_{E_n}\varphi.\end{aligned}$$

□

Θεώρημα 3.2.6 (Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης). *Έστω (f_n) αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών με-*

τρήσιμων συναρτήσεων. Τότε,

$$\int \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) = \lim_{n\to\infty} \int f_n. \tag{3.2.14}$$

Απόδειξη. Αφού η (f_n) είναι αύξουσα, η συνάρτηση

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_n f_n(x) \tag{3.2.15}$$

ορίζεται καλά, είναι μη αρνητική και μετρήσιμη. Επίσης,

$$\int f_n \leq \int f_{n+1} \leq \int f \tag{3.2.16}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα το $\lim \int f_n$ υπάρχει και

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \leq \int f. \tag{3.2.17}$$

Για να δείξουμε την αντίστροφη ανισότητα, αρκεί να δείξουμε το εξής: Για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε απλή ολοκληρώσιμη συνάρτηση φ με $0 \leq \varphi \leq f$,

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \geqslant (1-\varepsilon) \int \varphi. \tag{3.2.18}$$

Στην περίπτωση που $\int f < \infty$, παίρνοντας supremum ως προς φ συμπεραίνουμε ότι $\lim_{n\to\infty} \int f_n \geqslant (1-\varepsilon) \int f$ για κάθε $0 < \varepsilon < 1$, απ¨ όπου έπεται το ζητούμενο. Στην περίπτωση που $\int f = \infty$, παίρνοντας πάλι supremum ως προς φ, συμπεραίνουμε ότι $\lim_{n\to\infty} \int f_n = +\infty = \int f$.

Έστω φ απλή ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $0 \leq \varphi \leq f$. Θεωρούμε την ακολουθία μετρήσιμων συνόλων $E_n = \{f_n \geqslant (1-\varepsilon)\varphi\}$. Αφού η (f_n) είναι αύξουσα, έχουμε $E_n \subseteq E_{n+1}$ για κάθε n. Δηλαδή, η (E_n) είναι αύξουσα.

Παρατηρούμε ότι αν $f(x) > 0$, τότε $f_n(x) \to f(x) > (1-\varepsilon)\varphi(x)$, άρα $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Αν πάλι $f(x) = 0$, τότε $\varphi(x) = 0$, άρα $x \in E_n$ για κάθε n. Επομένως, $E_n \nearrow \mathbb{R}$. Από την μονοτονία του ολοκληρώματος,

$$\int f_n \geqslant \int_{E_n} f_n \geqslant \int_{E_n} (1-\varepsilon)\varphi = (1-\varepsilon) \int_{E_n} \varphi \tag{3.2.19}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε εφαρμόζοντας το Λήμμα 3.2.5 παίρνουμε

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \geqslant (1-\varepsilon) \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} \varphi = (1-\varepsilon) \int \varphi. \tag{3.2.20}$$

Έτσι, ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Πόρισμα 3.2.7. *Έστω f μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση και (E_n) μια αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συνόλων με $\cup_{n=1}^{\infty} E_n = E$. Τότε*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f = \int_E f.$$

Απόδειξη. Για κάθε n, είναι $0 \leq f\chi_{E_n}$ και η ακολουθία $(f\chi_{E_n})$ είναι αύξουσα και συγκλίνει κατά σημείο στη συνάρτηση $f\chi_E$. Από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης έπεται ότι $\lim_{n\to\infty} \int f\chi_{E_n} = \int f\chi_E$, δηλαδή το ζητούμενο. □

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, μπορούμε να δώσουμε μια πληρέστερη διατύπωση του Θεωρήματος 2.3.2 για την προσέγγιση μιας μετρήσιμης συνάρτησης από απλές.

Θεώρημα 3.2.8. *Έστω f μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Υπάρχει αύξουσα ακολουθία (ψ_n) μη αρνητικών απλών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $\psi_n \leq f$ με τις εξής ιδιότητες: $f = \lim_{n\to\infty} \psi_n$ και $\int f = \lim_{n\to\infty} \int \psi_n$.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 2.3.2 υπάρχει αύξουσα ακολουθία (φ_n) μη αρνητικών απλών μετρήσιμων συναρτήσεων με $\varphi_n \nearrow f$. Ορίζουμε $\psi_n = \varphi_n \chi_{[-n,n]}$. Κάθε ψ_n είναι ολοκληρώ- σιμη, γιατί $\lambda(\{\psi_n \neq 0\}) \leq \lambda([-n,n]) < \infty$. Αφού $\chi_{[-n,n]} \nearrow 1$, εύκολα ελέγχουμε ότι $\psi_n \nearrow f$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, $\int \psi_n \nearrow \int f$. □

Έχοντας στην διάθεσή μας το προηγούμενο θεώρημα, και χρησιμοποιώντας την προσθετικότητα του ολοκληρώματος για απλές συναρτήσεις, μπορούμε να αποδείξουμε την προσθετικότητα του ολοκληρώματος για μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις.

Θεώρημα 3.2.9. *Έστω f και g μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε,*

$$\int (f+g) = \int f + \int g. \tag{3.2.21}$$

Ειδικότερα, αν E και F είναι ξένα μετρήσιμα σύνολα, τότε

$$\int_{E\cup F} f = \int_E f + \int_F f. \tag{3.2.22}$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.7, υπάρχουν αύξουσες ακολουθίες (φ_n) και (ψ_n) μη αρνητικών, απλών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με $\varphi_n \nearrow f$ και $\psi_n \nearrow g$. Τότε, $\varphi_n + \psi_n \nearrow f + g$ και, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης,

$$\begin{aligned} \int (f+g) &= \lim_{n\to\infty} \int (\varphi_n + \psi_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\int \varphi_n + \int \psi_n \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n + \lim_{n\to\infty} \int \psi_n = \int f + \int g. \end{aligned}$$

Για την δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την προσθετικότητα του ολοκληρώματος για απλές συναρτήσεις. Το δεύτερο συμπέρασμα του Θεωρήματος προκύπτει από το πρώτο αν θεωρήσουμε τις $f\chi_E$ και $f\chi_F$: αφού τα E και F είναι ξένα, έχουμε $f\chi_E + f\chi_F = f\chi_{E\cup F}$. □

Η επόμενη Πρόταση ουσιαστικά δείχνει ότι αν δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις συμπίπτουν σχεδόν παντού, τότε τα ολοκληρώματά τους είναι ίσα (το ολοκλήρωμα δεν μεταβάλλεται αν αλλάξουμε τις τιμές μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης σε ένα σύνολο μέτρου 0).

Πρόταση 3.2.10. *Έστω f μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, $\int f = 0$ αν και μόνο αν $f = 0$ σχεδόν παντού.*

Απόδειξη. Αν $f = 0$ σχεδόν παντού, τότε $\lambda(\{f > 0\}) = 0$. Χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση 3.2.2(δ) βλέπουμε ότι

$$\int f = \int_{\{f=0\}} f + \int_{\{f>0\}} f = 0 + 0 = 0. \tag{3.2.23}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $\int f = 0$. Για κάθε n ορίζουμε $E_n = \{f \geqslant 1/n\}$. Από την ανισότητα του Markov,

$$\lambda(E_n) = \lambda(\{f \geqslant 1/n\}) \leq n \int f = 0, \tag{3.2.24}$$

δηλαδή $\lambda(E_n) = 0$. Αφού $E_n \nearrow \{f > 0\}$, συμπεραίνουμε ότι

$$\lambda(\{f > 0\}) = \lim_{n\to\infty} \lambda(E_n) = 0. \tag{3.2.25}$$

Δηλαδή, $f = 0$ σχεδόν παντού. □

Το Θεώρημα Beppo Levi που ακολουθεί είναι ουσιαστικά αναδιατύπωση του Θεωρήματος Μονότονης Σύγκλισης: το ολοκλήρωμα Lebesgue για μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις είναι αριθμήσιμα προσθετικό.

Θεώρημα 3.2.11 (Beppo Levi). *Έστω (f_n) ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Τότε,*

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n. \tag{3.2.26}$$

Απόδειξη. Οι f_n είναι μη αρνητικές, επομένως η $f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ορίζεται καλά και είναι το κατά σημείο όριο της αύξουσας ακολουθίας $s_N = \sum_{n=1}^{N} f_n$ (υπάρχει βέβαια το ενδεχόμενο να έχουμε $f(x) = \infty$ για κάποια x).

Από την (πεπερασμένη) προσθετικότητα του ολοκληρώματος για μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις, έχουμε

$$\int s_N = \int \left(\sum_{n=1}^{N} f_n \right) = \sum_{n=1}^{N} \int f_n \nearrow \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n. \tag{3.2.27}$$

Από την άλλη πλευρά, το θεώρημα μονότονης σύγκλισης μας εξασφαλίζει ότι

$$\int s_N \nearrow \int f = \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right), \tag{3.2.28}$$

δηλαδή το ζητούμενο. □

Πόρισμα 3.2.12. *Έστω f μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση και έστω (E_n) ακολουθία ξένων μετρήσιμων συνόλων. Τότε,*

$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f. \tag{3.2.29}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τις $f_n = f\chi_{E_n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Αφού τα E_n είναι ξένα, έχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f\chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}$. □

Ορισμός 3.2.13. Έστω $\mathcal{A}$ μια σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Μια συνολοσυνάρτηση $\Phi : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ λέγεται **μέτρο στην** $\mathcal{A}$ αν ικανοποιεί τα εξής:

- $\Phi(\emptyset) = 0$.
- Αν (E_n) είναι μια ακολουθία ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}$, τότε $\Phi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(E_n)$.

Το μέτρο Lebesgue λ στην σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$ των Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ είναι ένα παράδειγμα μέτρου.

Σύμφωνα με αυτόν τον γενικό ορισμό, τα αποτελέσματά μας για το ολοκλήρωμα Lebesgue μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων δείχνουν το εξής:

Θεώρημα 3.2.14. *Έστω f μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε συνολοσυνάρτηση $\Phi_f : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ ως εξής: αν $E \in \mathcal{M}$, θέτουμε*

$$\Phi_f(E) = \int_E f. \tag{3.2.30}$$

Τότε, η Φ_f είναι μέτρο. □

Σημείωση: Παρατηρήστε ότι το μέτρο Lebesgue λ αντιστοιχεί στην συνολοσυνάρτηση Φ που ορίζεται από την σταθερή συνάρτηση $f \equiv 1$.

Το θεώρημα μονότονης σύγκλισης μας λέει ότι αν μια ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων f_n αυξάνει κατά σημείο στην f, τότε μπορούμε να «εναλλάξουμε τα όρια»: το ολοκλήρωμα του ορίου είναι το όριο των ολοκληρωμάτων. Το Λήμμα του Fatou που ακολουθεί μας δίνει αντίστοιχη πληροφορία στην περίπτωση που έχουμε κατά σημείο σύγκλιση αλλά δεν έχουμε την υπόθεση της μονοτονίας για την ακολουθία (f_n).

Θεώρημα 3.2.15 (Λήμμα του Fatou). *Έστω (f_n) ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Τότε,*

$$\int \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n. \tag{3.2.31}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων (g_n), όπου $g_n = \inf\{f_k : k \geqslant n\}$. Κάθε g_n είναι μη αρνητική και μετρήσιμη, η (g_n) είναι αύξουσα, και

$$g_n \nearrow \liminf_{n\to\infty} f_n. \tag{3.2.33}$$

Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης,

$$\int \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) = \lim_{n\to\infty} \int g_n. \tag{3.2.34}$$

Παρατηρούμε ότι $g_n \leq f_k$ για κάθε $k \geqslant n$, οπότε η μονοτονία του ολοκληρώματος μας δίνει

$$\int g_n \leq b_n := \inf_{k\geqslant n} \int f_k. \tag{3.2.35}$$

Η ακολουθία (b_n) είναι αύξουσα και συγκλίνει στο $\liminf_n \int f_n$. Άρα,

$$\int \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) = \lim_{n\to\infty} \int g_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n = \liminf_{n\to\infty} \int f_n. \tag{3.2.36}$$

□

Πόρισμα 3.2.16. *Έστω (f_n) ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Αν $f_n \to f$ σ.π. και το*

$\lim_n \int f_n$ *υπάρχει, τότε*

$$\int f \le \lim_{n\to\infty} \int f_n. \tag{3.2.37}$$

3.3 Ολοκλήρωμα Lebesgue: η γενική περίπτωση

Ορισμός 3.3.1. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, οι συναρτήσεις $f^+ = \max\{f, 0\}$ και $f^- = -\min\{f, 0\}$ είναι μετρήσιμες και μη αρνητικές. Επίσης, ικανοποιούν τις

$$f = f^+ - f^- \quad \text{και} \quad |f| = f^+ + f^-. \tag{3.3.1}$$

Τα ολοκληρώματα $\int f^+$ και $\int f^-$ ορίζονται καλά και αν τουλάχιστον μία από τις f^+ και f^- είναι ολοκληρώσιμη, τότε το **ολοκλήρωμα της** f ορίζεται από την

$$\int f = \int f^+ - \int f^- \tag{3.3.2}$$

(μπορεί βέβαια να παίρνει την τιμή $+\infty$ ή $-\infty$). Αν οι f^+, f^- είναι και οι δύο ολοκληρώσιμες, τότε το ολοκλήρωμα της f είναι πραγματικός αριθμός και λέμε ότι **η f είναι ολοκληρώσιμη**.

(β) Αν η $f : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ είναι μετρήσιμη και E είναι ένα μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τότε λέμε ότι **η f είναι ολοκληρώσιμη στο** E αν

$$\int_E f^+ = \int f^+\chi_E < \infty \quad \text{και} \quad \int_E f^- = \int f^-\chi_E < \infty, \tag{3.3.3}$$

και ορίζουμε

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- = \int f\chi_E. \tag{3.3.4}$$

(γ) Αν η $f : E \to [-\infty, +\infty]$ είναι μετρήσιμη, τότε επεκτείνουμε την f στο $\mathbb{R}$ θέτοντας $f \equiv 0$ στο E^c, συνεπώς,

$$\int_E f = \int f\chi_E = \int f. \tag{3.3.5}$$

Παρατηρήσεις 3.3.2. (α) Αν $f \geqslant 0$ τότε $f = f^+$ και $f^- \equiv 0$, συνεπώς ο ορισμός που δώσαμε συμφωνεί με αυτόν της Παραγράφου 3.2.

(β) Από τον ορισμό είναι φανερό ότι η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν

$$\int |f| = \int f^+ + \int f^- < +\infty, \tag{3.3.6}$$

δηλαδή αν και μόνο αν η $|f|$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη (θυμηθείτε ότι αυτό δεν ισχύει για το ολοκλήρωμα Riemann). Σε αυτήν την περίπτωση,

$$\left|\int f\right| \le \int |f|. \tag{3.3.7}$$

(γ) Αν η f είναι ολοκληρώσιμη, τότε

$$\lambda(\{f^+ = +\infty\}) = \lambda(\{f^- = +\infty\}) = 0, \tag{3.3.8}$$

άρα

$$\lambda(\{x : f(x) = +\infty\} \cup \{x : f(x) = -\infty\}) = 0. \tag{3.3.9}$$

Δηλαδή, η f είναι πεπερασμένη σχεδόν παντού.

(δ) Αν $\lambda(E) = 0$, τότε $\int_E f = 0$, διότι $\int_E f^+ = 0$ και $\int_E f^- = 0$.

(ε) Αν οι f και g είναι μετρήσιμες, η g είναι ολοκληρώσιμη, και $|f| \leq |g|$ σχεδόν παντού, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int |f| \leq \int |g|$.

(στ) Αν $f = f_1 - f_2$, όπου f_1, f_2 μη αρνητικές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, τότε

$$\int f = \int f_1 - \int f_2. \tag{3.3.10}$$

Πράγματι, από την $f^+ - f^- = f_1 - f_2$ παίρνουμε $f^+ + f_2 = f^- + f_1$, άρα

$$\int f^+ + \int f_2 = \int f^- + \int f_1, \tag{3.3.11}$$

δηλαδή

$$\int f^+ - \int f^- = \int f_1 - \int f_2, \tag{3.3.12}$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο.

(ζ) Αν $\lambda(E) < \infty$ και η $f : E \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και μετρήσιμη, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη. Όπως θα δούμε στην Παράγραφο 3.4, κάθε φραγμένη Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Θα δούμε επίσης ότι τα δύο ολοκληρώματα (Riemann και Lebesgue) συμπίπτουν.

Ιδιότητες του ολοκληρώματος

Θεώρημα 3.3.3 (γραμμικότητα). *Έστω $f, g : E \to [-\infty, +\infty]$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε, η $f + g$ ορίζεται καλά σχεδόν παντού, είναι ολοκληρώσιμη και*

$$\int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g. \tag{3.3.13}$$

Επίσης, αν $t \in \mathbb{R}$ τότε η tf είναι ολοκληρώσιμη, και

$$\int (tf) = t \int f. \tag{3.3.14}$$

Απόδειξη. Αφού οι f, g είναι ολοκληρώσιμες, παίρνουν πεπερασμένη τιμή σχεδόν παντού, άρα η $f + g$ ορίζεται σχεδόν παντού. Επίσης,

$$(f + g)^+ \leq f^+ + g^+ \quad \text{και} \quad (f + g)^- \leq f^- + g^-, \tag{3.3.15}$$

άρα

$$\int (f+g)^+ < +\infty \quad \text{και} \quad \int (f+g)^- < +\infty, \tag{3.3.16}$$

δηλαδή η $f+g$ είναι ολοκληρώσιμη.

Γράφουμε $f+g = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$. Τότε, από την Παρατήρηση (στ) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int (f+g) &= \int (f^+ + g^+) - \int (f^- + g^-) = \int f^+ + \int g^+ - \int f^- - \int g^- \\ &= \int f + \int g.\end{aligned}$$

Για τον δεύτερο ισχυρισμό παρατηρούμε ότι: αν $t > 0$, τότε $(tf)^+ = tf^+$ και $(tf)^- = tf^-$, άρα η tf είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int (tf) = \int (tf)^+ - \int (tf)^- = t\int f^+ - t\int f^- = t\int f. \tag{3.3.17}$$

Αν $t < 0$, τότε $(tf)^+ = -tf^-$ και $(tf)^- = -tf^+$, άρα η tf είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int (tf) = \int (tf)^+ - \int (tf)^- = -t\int f^- + t\int f^+ = t\int f. \tag{3.3.18}$$

Αν $t = 0$, δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. □

Πόρισμα 3.3.4. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο. Το σύνολο των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f : E \to [-\infty, +\infty]$ είναι γραμμικός χώρος.* □

Θεώρημα 3.3.5 (μονοτονία). *Αν οι f, g είναι ολοκληρώσιμες και $f \leq g$ σχεδόν παντού, τότε $\int f \leq \int g$. Ειδικότερα, αν $f = g$ σχεδόν παντού, τότε $\int f = \int g$.*

Απόδειξη. Από την $f \leq g$ έπεται ότι $f^+ \leq g^+$ και $f^- \geqslant g^-$ σχεδόν παντού. Άρα,

$$\int f^+ - \int f^- \leq \int g^+ - \int g^-, \tag{3.3.19}$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Θεώρημα 3.3.6 (προσθετικότητα). *Έστω f ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν τα A, B είναι μετρήσιμα και $A \cap B = \emptyset$, τότε*

$$\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f. \tag{3.3.20}$$

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\int_{A\cup B} f = \int f\chi_{A\cup B} = \int f(\chi_A + \chi_B) = \int f\chi_A + \int f\chi_B = \int_A f + \int_B f. \tag{3.3.21}$$

□

Το βασικό θεώρημα σύγκλισης για ακολουθίες γενικών (όχι αναγκαστικά μη αρνητικών) ολοκληρώσιμων συναρτήσεων είναι το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

Θεώρημα 3.3.7 (Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης). *Έστω $f_n : E \to [-\infty, +\infty]$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού και ότι υπάρχει $g : E \to [0, +\infty]$ ολοκληρώσιμη, ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ σχεδόν παντού. Τότε, οι f_n και η f είναι ολοκληρώσιμες, και*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f. \tag{3.3.22}$$

Απόδειξη. Αφού $|f_n| \leq g$ και η g είναι ολοκληρώσιμη, κάθε f_n είναι ολοκληρώσιμη, από την παρατήρηση (ε). Η f είναι μετρήσιμη ως όριο (σχεδόν παντού) μετρήσιμων συναρτήσεων, και

$$|f_n| \leq g \implies |f| \leq g. \tag{3.3.23}$$

Άρα, η f είναι ολοκληρώσιμη.

Για να δείξουμε την σύγκλιση της ακολουθίας των ολοκληρωμάτων, θα εφαρμόσουμε το Λήμμα του Fatou για τις ακολουθίες μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων $(g + f_n)$ και $(g - f_n)$ (παρατηρήστε ότι $|f_n| \leq g \implies -g \leq f_n \leq g$).

Αφού $g + f_n \to g + f$ και $g - f_n \to g - f$, παίρνουμε

$$\int_E g + \int_E f = \int_E (g + f) \leq \liminf_n \int_E (g + f_n) = \int_E g + \liminf_n \int_E f_n \tag{3.3.24}$$

και

$$\int_E g - \int_E f = \int_E (g - f) \leq \liminf_n \int_E (g - f_n) = \int_E g - \limsup_n \int_E f_n. \tag{3.3.25}$$

Άρα,

$$\limsup_n \int_E f_n \leq \int_E f \leq \liminf_n \int_E f_n, \tag{3.3.26}$$

το οποίο μας δίνει το συμπέρασμα. □

Πόρισμα 3.3.8 (θεώρημα φραγμένης σύγκλισης). *Έστω E μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(E) < +\infty$ και έστω (f_n) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο E. Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ και ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f_n| \leq M$ στο E για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε,*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f. \tag{3.3.27}$$

Απόδειξη. Αφού $\lambda(E) < +\infty$, η σταθερή συνάρτηση $g \equiv M$ είναι ολοκληρώσιμη στο E. Επομένως, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης. □

Πόρισμα 3.3.9. *Έστω $f : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε, η συνάρτηση*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f := \int_{(-\infty, x]} f \tag{3.3.28}$$

είναι συνεχής.

Απόδειξη. Γράφουμε $F(x) = \int f \cdot \chi_{(-\infty,x]}$. Παρατηρούμε ότι αν $x_n \to x$ τότε

$$f(y)\chi_{(-\infty,x_n]}(y) \to f(y)\chi_{(-\infty,x]}(y) \tag{3.3.29}$$

για κάθε $y \neq x$ (εξηγήστε γιατί). Επίσης,

$$|f \cdot \chi_{(-\infty, x_n]}| \leq |f| \tag{3.3.30}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, $F(x_n) \to F(x)$. Αυτό αποδεικνύει ότι η F είναι συνεχής. □

Παραδείγματα 3.3.10. (α) Αν η $f : E \to [-\infty, +\infty]$ είναι ολοκληρώσιμη και (E_n) είναι μία αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συνόλων με $E_n \nearrow E$, τότε

$$\int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f. \tag{3.3.31}$$

Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $f\chi_{E_n} \to f$ και $|f\chi_{E_n}| \leq |f|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Κατόπιν, εφαρμόζουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

(β) Έστω $f : [0,1] \to [-\infty, +\infty]$ ολοκληρώσιμη. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η $f_n(x) = x^n f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη, και

$$\int_0^1 x^n f(x) \to 0. \tag{3.3.32}$$

Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $|x^n f(x)| \leq |f(x)|$ στο $[0,1]$ και ότι $f_n(x) = x^n f(x) \to 0$ σχεδόν παντού (για όλα τα $x \neq 1$ με $f(x) \neq \pm\infty$), και μετά να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

3.4 Σύγκριση με το ολοκλήρωμα Riemann

Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Θα γράφουμε $(R)\int_a^b f$ για το ολοκλήρωμα Riemann και $(L)\int_a^b f$ για το ολοκλήρωμα Lebesgue της f (αν αυτά υπάρχουν). Όπως δείχνει το θεώρημα που ακολουθεί, το ολοκλήρωμα Lebesgue επεκτείνει το ολοκλήρωμα Riemann.

Θεώρημα 3.4.1. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε,*

(i) *Η f είναι μετρήσιμη.*

(ii) *Η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη και*

$$(L)\int_a^b f = (R)\int_a^b f. \tag{3.4.1}$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε τα εξής:

(i) Το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

(ii) Αν $h \geqslant 0$ μετρήσιμη και $\int_E h = 0$, τότε $h = 0$ σχεδόν παντού στο E. Επομένως, αν $f \leq g$ και $\int_E f = \int_E g$, τότε $f = g$ σχεδόν παντού στο E.

(iii) Αν $s = \sum \lambda_i \chi_{[a_i,b_i]}$ είναι μια κλιμακωτή συνάρτηση, τότε

$$(L)\int_a^b f = (R)\int_a^b f. \tag{3.4.2}$$

Υποθέτουμε ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Τότε, υπάρχει ακολουθία (P_n) διαμερίσεων του $[a,b]$ με τις εξής ιδιότητες: $P_n \subset P_{n+1}$ (η P_{n+1} είναι εκλέπτυνση της P_n), $\|P_n\| \to 0$ (τα πλάτη των διαμερίσεων P_n τείνουν στο 0), και

$$L(f,P_n) \to (R)\int_a^b f \;\; , \;\; U(f,P_n) \to (R)\int_a^b f. \tag{3.4.3}$$

Έστω ℓ_n η κλιμακωτή συνάρτηση με $\int_a^b \ell_n = L(f,P_n)$ (δηλαδή, αν $L(f,P_n) = \sum_{i=0}^{k-1} m_i(x_{i+1}-x_i)$ τότε $\ell_n = \sum_{i=0}^{k-1} m_i\chi_{[x_i,x_{i+1})}$) και u_n η αντίστοιχη κλιμακωτή συνάρτηση με $\int_a^b u_n = U(f,P_n)$. Τότε,

$$\ell_n \leq f \leq u_n. \tag{3.4.4}$$

Από την $P_n \subset P_{n+1}$ έπεται ότι η (ℓ_n) είναι αύξουσα και η (u_n) φθίνουσα, οπότε ορίζονται οι συναρτήσεις $\ell = \lim_n \ell_n$ και $u = \lim_n u_n$, και $\ell \leq f \leq u$. Από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης,

$$(L)\int_a^b u = \lim_n \int_a^b u_n = (R)\int_a^b f \tag{3.4.5}$$

και

$$(L)\int_a^b \ell = \lim_n \int_a^b \ell_n = (R)\int_a^b f. \tag{3.4.6}$$

Αφού $\ell \leq u$ και $\int_a^b \ell = \int_a^b u$, συμπεραίνουμε ότι $\ell = u$ σχεδόν παντού. Αφού $\ell \leq f \leq u$, προκύπτει ότι

$$\ell = f = u \;\; \sigma.\pi. \tag{3.4.7}$$

Άρα, η f είναι μετρήσιμη συνάρτηση ως όριο (σχεδόν παντού) ακολουθίας μετρήσιμων συναρτήσεων. Αυτό αποδεικνύει το (i).

Αφού η f είναι μετρήσιμη και φραγμένη, η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη. Τέλος,

$$(L)\int_a^b f = (L)\int_a^b u = (R)\int_a^b f, \tag{3.4.8}$$

δηλαδή έχουμε αποδείξει το (ii). □

Σημείωση: Όπως έχουμε ήδη δεί, η κλάση των φραγμένων Lebesgue ολοκληρώσιμων $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι γνήσια μεγαλύτερη από την κλάση των Riemann ολοκληρώσιμων $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Τα παραδείγματα που ακολουθούν δείχνουν ότι η περίπτωση του γενικευμένου ολοκληρώματος Riemann είναι διαφορετική:

Παράδειγμα 1. *Το γενικευμένο ολοκλήρωμα* $(IR)\int_0^\infty (\sin x/x)dx$ *υπάρχει, αλλά το ολοκλήρωμα Lebesgue* $(L)\int_0^\infty (\sin x/x)dx$ *δεν υπάρχει.*

Απόδειξη. Μπορούμε να γράψουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα Riemann σαν μια εναλλάσσουσα σειρά:

$$\begin{aligned}(IR)\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx &= \sum_{n=1}^\infty \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\sin x}{x}dx \\ &= \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}dx \\ &= \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\int_0^{\pi} \frac{|\sin x|}{x+(n-1)\pi}dx.\end{aligned}$$

Από το κριτήριο του Dirichlet, για να δείξουμε ότι αυτή η σειρά συγκλίνει αρκεί να δείξουμε ότι τα ολοκληρώματα φθίνουν στο 0 όταν $n \to \infty$. Όμως, για σταθερό x, η ακολουθία $|\sin x|/(x+(n-1)\pi)$ είναι προφανώς φθίνουσα, άρα η αντίστοιχη ακολουθία των ολοκληρωμάτων είναι φθίνουσα και, για κάθε $n \geqslant 2$,

$$\int_0^{\pi} \frac{|\sin x|}{x+(n-1)\pi}dx \leq \frac{1}{n-1} \to 0. \tag{3.4.9}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $(IR)\int_0^\infty (\sin x/x)dx$ υπάρχει.

Αν το ολοκλήρωμα Lebesgue υπήρχε, θα έπρεπε να ισχύει ότι

$$(L)\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}dx < +\infty. \tag{3.4.10}$$

Όμως, χρησιμοποιώντας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}(L)\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}dx &= \sum_{n=1}^\infty \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}dx \\ &\geqslant \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} |\sin x|dx = \infty.\end{aligned}$$

Άρα, η $\sin x/x$ δεν είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[0,+\infty)$. □

Παράδειγμα 2. Θεωρούμε την συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=0$ αν $x<0$, και

$$f(x) = \frac{(-1)^n}{n+1} \quad \text{αν} \quad x \in [n,n+1),\ n = 0,1,2,\dots. \tag{3.4.11}$$

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα Riemann της f

$$(IR)\int_0^\infty f(x)dx := \lim_{b\to+\infty}\int_0^b f(x)dx \tag{3.4.12}$$

υπάρχει: είναι ίσο με

$$(IR)\int_0^\infty f(x)dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n+1} \tag{3.4.13}$$

(η τελευταία σειρά συγκλίνει). Όμως,

$$(3.4.14) \qquad (L)\int_0^{\infty} |f| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = +\infty,$$

άρα η f δεν είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη. □

Τέτοια προβλήματα δεν εμφανίζονται αν η συνάρτηση που μελετάμε είναι μη αρνητική.

Θεώρημα 3.4.2. *Αν $f \geqslant 0$ και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $(IR)\int_{-\infty}^{\infty} f$ υπάρχει, τότε η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη, και*

$$(3.4.15) \qquad (IR)\int f = (L)\int f.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων $f_n = f\chi_{[-n,n]}$ αυξάνει προς την f. Κάθε f_n είναι Riemann ολοκληρώσιμη (στο $[-n,n]$), επομένως μετρήσιμη. Άρα, η f είναι μετρήσιμη. Επίσης,

$$(3.4.16) \qquad (L)\int f_n = (R)\int_{-n}^{n} f(x)dx$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή κάθε f_n είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη. Από την υπόθεση, υπάρχει το όριο

$$(3.4.17) \qquad \lim_{n\to\infty}(R)\int_{-n}^{n} f(x)dx = (IR)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

Από την άλλη πλευρά, το θεώρημα μονότονης σύγκλισης δείχνει ότι

$$(3.4.18) \qquad \lim_{n\to\infty}(L)\int f_n = (L)\int f.$$

Άρα, η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη και

$$(3.4.19) \qquad (IR)\int f = (L)\int f.$$

□

Σημείωση: Ανάλογα αποτελέσματα ισχύουν για γενικευμένα ολοκληρώματα κάθε είδους (για παράδειγμα, σε ανοικτό φραγμένο διάστημα).

Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο με έναν χαρακτηρισμό των Riemann ολοκληρώσιμων $f : [a,b] \to \mathbb{R}$: είναι εκείνες οι φραγμένες συναρτήσεις που είναι συνεχείς σχεδόν παντού. Πριν δώσουμε την ακριβή διατύπωση και την απόδειξη, πρέπει να τονίσουμε ότι η συνθήκη «συνεχής σχεδόν παντού» είναι τελείως διαφορετική από την «σχεδόν παντού ίση με συνεχή συνάρτηση». Για παράδειγμα, η χαρακτηριστική συνάρτηση $\chi_{\mathbb{Q}} : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι σχεδόν παντού ίση με την συνεχή (σταθερή) μηδενική συνάρτηση, αλλά δεν είναι συνεχής σε κανένα σημείο του $[a,b]$. Από την άλλη πλευρά, η $\chi_{[0,1/2]} : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής σχεδόν παντού (παντού εκτός από το σημείο $1/2$) αλλά δεν είναι σχεδόν παντού ίση με καμμία συνεχή $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ (εξηγήστε γιατί). Αυτά τα παραδείγματα δείχνουν ότι οι δύο συνθήκες δεν συγκρίνονται.

Θεώρημα 3.4.3. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και* *μόνο αν*

$$\lambda(\{x \in [a,b] : \text{ η } f \text{ είναι ασυνεχής στο } x\}) = 0. \tag{3.4.20}$$

Απόδειξη: Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι συνεχής σχεδόν παντού. Επιλέγουμε ακολουθία (P_n) διαμερίσεων του $[a,b]$ με $P_n \subset P_{n+1}$, $\|P_n\| \to 0$, και θα δείξουμε ότι $U(f,P_n) - L(f,P_n) \to 0$.

Θεωρούμε τις συναρτήσεις ℓ_n, u_n που αντιστοιχούν στην P_n, με $\ell_n \leq f \leq u_n$, $\int_a^b \ell_n = L(f,P_n)$ και $\int_a^b u_n = U(f,P_n)$. Δηλαδή, αν $P_n = \{a = x_0 < \cdots < x_k = b\}$ ορίζουμε

$$\ell_n = \sum_{i=0}^{k-1} m_i \chi_{[x_i,x_{i+1})} \quad \text{και} \quad u_n = \sum_{i=0}^{k-1} M_i \chi_{[x_i,x_{i+1})}. \tag{3.4.21}$$

Τότε, $\ell_n \nearrow \ell$ και $u_n \searrow u$, όπου $\ell \leq f \leq u$.

Οι ℓ_n, u_n είναι μετρήσιμες και ομοιόμορφα φραγμένες (από το supremum και το infimum της f στο $[a,b]$). Από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης βλέπουμε ότι

$$\int_a^b \ell_n \to \int_a^b \ell \quad \text{και} \quad \int_a^b u_n \to \int_a^b u. \tag{3.4.22}$$

Δηλαδή,

$$L(f,P_n) \to \int_a^b \ell \quad \text{και} \quad U(f,P_n) \to \int_a^b u. \tag{3.4.23}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int_a^b \ell = \int_a^b u. \tag{3.4.24}$$

Αυτό ισχύει για τον εξής λόγο: αν $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ και αν A είναι το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f στο $[a,b]$, τότε για κάθε $x \in [a,b] \setminus (A \cup P)$ έχουμε $\ell(x) = u(x)$. Πράγματι: έστω $x \in [a,b] \setminus (A \cup P)$ και έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι συνεχής στο x, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $y,z \in (x-\delta, x+\delta)$ τότε $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$. Επιλέγουμε n_0 για το οποίο $\|P_{n_0}\| < \delta$. Αν $[x_i, x_{i+1}]$ είναι το υποδιάστημα της P_{n_0} στο οποίο ανήκει το x, τότε $[x_i, x_{i+1}] \subseteq (x-\delta, x+\delta)$, άρα

$$M_i - m_i = \sup\{f(y) : y \in [x_i, x_{i+1}]\} - \inf\{f(z) : z \in [x_i, x_{i+1}]\} \leq \varepsilon, \tag{3.4.25}$$

δηλαδή $0 \leq u_{n_0}(x) - \ell_{n_0}(x) \leq \varepsilon$. Ακόμα,

$$0 \leq u(x) - \ell(x) \leq u_{n_0}(x) - \ell_{n_0}(x) \leq \varepsilon. \tag{3.4.26}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $u(x) = \ell(x)$. Άρα, $\ell = u$ σχεδόν παντού, το οποίο δείχνει ότι $\int_a^b \ell = \int_a^b u$.

Αντίστροφα: Υποθέτουμε ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Επιλέγουμε ακολουθία διαμερίσεων $(P_n)_n$ με $P_n \subseteq P_{n+1}$ για κάθε n και

$$L(f,P_n) \to \int_a^b f \quad , \quad U(f,P_n) \to \int_a^b f. \tag{3.4.27}$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θεωρούμε τις κλιμακωτές συναρτήσεις ℓ_n και u_n που αντιστοιχούν στην P_n, με $\ell_n \leq f \leq u_n$ και

$$\int_a^b \ell_n = L(f, P_n)\ , \quad \int_a^b u_n = U(f, P_n). \tag{3.4.28}$$

Η ακολουθία (ℓ_n) είναι αύξουσα και η (u_n) είναι φθίνουσα. Έστω $\ell = \lim_n \ell_n$ και $u = \lim_n u_n$. Τότε $\ell \leq f \leq u$ και από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης

$$\int_a^b \ell = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \ell_n = \lim_{n\to\infty} L(f, P_n) = \int_a^b f \tag{3.4.29}$$

και

$$\int_a^b u = \lim_{n\to\infty} \int_a^b u_n = \lim_{n\to\infty} U(f, P_n) = \int_a^b f. \tag{3.4.30}$$

Άρα,

$$\int_a^b \ell = \int_a^b u. \tag{3.4.31}$$

Αφού $\ell \leq u$, έπεται ότι $\ell = u$ σχεδόν παντού.

Έστω $C = \{x \in [a, b] : \ell(x) = u(x)\}$ και έστω $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $x \in C \setminus P$ η f είναι συνεχής στο x. Πράγματι: Έστω $x \in C \setminus P$ και έστω $\varepsilon > 0$. Τότε $\ell(x) = u(x)$, άρα υπάρχει n_0 με $0 \leq u_{n_0}(x) - \ell_{n_0}(x) < \varepsilon$. Αυτό σημαίνει ότι αν (x_i, x_{i+1}) είναι το υποδιάστημα της P_{n_0} στο οποίο ανήκει το x, τότε

$$\sup\{f(y) : y \in [x_i, x_{i+1}]\} - \inf\{f(z) : z \in [x_i, x_{i+1}]\} < \varepsilon. \tag{3.4.32}$$

Έπεται ότι η f είναι συνεχής στο x (εξηγήστε γιατί).

Συμπεραίνουμε ότι αν A είναι το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f, τότε $A \subseteq ([a, b] \setminus C) \cup P$, άρα $\lambda(A) = 0$. □

3.5 Ασκήσεις

Ομάδα Α΄

1. Έστω $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $F : [0, \infty) \to [0, \infty]$ με $F(t) = \lambda(\{f > t\})$. Δείξτε ότι η F είναι φθίνουσα, συνεχής από δεξιά, και $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 0$.

2. Δείξτε ότι $\int_{[1,\infty)} \frac{1}{x} = \infty$.

3. Βρείτε μια ακολουθία (f_n) μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων που ικανοποιεί τα εξής: $f_n \to 0$ αλλά $\lim_n \int f_n = 1$. Μπορείτε να επιλέξετε την (f_n) έτσι ώστε να συγκλίνει ομοιόμορφα στην μηδενική συνάρτηση;

4. Υποθέτουμε ότι f και f_n, $n \in \mathbb{N}$, είναι μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις, $f_n \searrow f$, και υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\int f_k < \infty$. Δείξτε ότι

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

5. Έστω f μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f > 0$ $\sigma.\pi.$ Αν $\int_E f = 0$ για κάποιο μετρήσιμο σύνολο E, δείξτε ότι $\lambda(E) = 0$.

6. Έστω f μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\{f\geqslant 1/n\}} f.$$

7. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\{f\leq n\}} f.$$

8. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Είναι σωστό ότι $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$;

Ομάδα Β΄

9. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μετρήσιμο σύνολο E με $\lambda(E) < \infty$, ώστε

$$\int_E f > \int f - \varepsilon.$$

Επιπλέον, δείξτε ότι το E μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε η f να είναι φραγμένη στο E.

10. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f$ είναι συνεχής.

11. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $\lambda(E) < \delta$ τότε $\int_E f < \varepsilon$.

12. Θεωρώντας τις συναρτήσεις $f_n = \chi_{[n,n+1)}$ δείξτε ότι στο Λήμμα του Fatou η ανισότητα μπορεί να είναι γνήσια.

13. Έστω (f_n) μια ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Είναι σωστό ότι

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \leq \int \left(\limsup_{n\to\infty} f_n\right);$$

Αν προσθέσουμε την υπόθεση ότι η (f_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη;

14. Έστω f και f_n, $n \in \mathbb{N}$, μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις με $f_n \leq f$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $f_n \to f$. Δείξτε ότι

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

15. Έστω f και f_n, $n \in \mathbb{N}$, μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις με $f_n \to f$ και

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f < \infty.$$

Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E f$$

για κάθε μετρήσιμο σύνολο E. Δώστε παράδειγμα που να δείχνει ότι αυτό δεν ισχύει αν $\int f = \infty$. [*Υπόδειξη:* Θεωρήστε τα $\int_E f$ και $\int_{E^c} f$.]

16. Έστω (f_n) ακολουθία Lebesgue ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο $[a,b]$. Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα, δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και ότι $\int_a^b |f_n - f| \to 0$.

17. Δείξτε ότι
$$\int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx = 1.$$

18. Υπολογίστε το $\lim_{n\to\infty}\int_0^n (1-(x/n))^n e^{x/2}dx$ (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

19. Έστω ότι οι f, f_n είναι ολοκληρώσιμες και $f_n \nearrow f$. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\int f_n \to \int f$;

20. Έστω f, f_n ολοκληρώσιμες. Αν $\int |f_n - f| \to 0$, δείξτε ότι $\int f_n \to \int f$ και $\int |f_n| \to \int |f|$.

21. Έστω f, f_n ολοκληρώσιμες. Αν $\int |f_n - f| \to 0$, δείξτε ότι $\int_E f_n \to \int_E f$ για κάθε μετρήσιμο σύνολο E, και $\int f_n^+ \to \int f^+$.

22. (α) Αν $f \geqslant 0$ σχεδόν παντού στο E και αν $f_n = \min\{f, n\}$, δείξτε ότι $\int_E f_n \to \int_E f$.

(β) Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο E και $f_n = \max\{\min\{n, f\}, -n\}$, δείξτε ότι $\int_E f_n \to \int_E f$.

Ομάδα Γ΄

23. Υπολογίστε (με πλήρη αιτιολόγηση) το
$$\sum_{n=0}^\infty \int_0^{\pi/2} \left(1-\sqrt{\sin x}\right)^n \cos x dx.$$

24. Έστω (f_n), (g_n) και g ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $|f_n| \leq g_n$, $f_n \to f$, $g_n \to g$ (όλα αυτά σχεδόν παντού) και ότι $\int g_n \to \int g$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και ότι $\int f_n \to \int f$.

25. Έστω (f_n), f ολοκληρώσιμες και έστω ότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού. Δείξτε ότι $\int |f_n - f| \to 0$ αν και μόνο αν $\int |f_n| \to \int |f|$.

26. Έστω (f_n) ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ολοκλη- ρώσιμη συνάρτηση g ώστε $|f_n| \leq g$ σχεδόν παντού για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι
$$\int \left(\liminf_n f_n\right) \leq \liminf_n \int f_n \leq \limsup_n \int f_n \leq \int \left(\limsup_n f_n\right).$$

27. Έστω f μετρήσιμη και σχεδόν παντού πεπερασμένη στο $[0,1]$.

(α) Αν $\int_E f = 0$ για κάθε μετρήσιμο $E \subset [0,1]$ με $\lambda(E) = 1/2$, δείξτε ότι $f = 0$ σχεδόν παντού στο $[0,1]$.

(β) Αν $f > 0$ σχεδόν παντού, δείξτε ότι
$$\inf\left\{\int_E f : \lambda(E) \geqslant \frac{1}{2}\right\} > 0.$$

28. Δείξτε ότι
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2} = 0.$$

29. Έστω $f_n : E \to \mathbb{R}$ ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με $\sum_{n=1}^\infty \int_E |f_n| < +\infty$. Δείξτε ότι:

(α) Η σειρά $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ συγκλίνει σχεδόν για κάθε $x \in E$.

(β) Η συνάρτηση $\sum_{n=1}^\infty f_n$ είναι ολοκληρώσιμη και
$$\int \left(\sum_{n=1}^\infty f_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \int f_n.$$

30. Σταθεροποιούμε $0 < a < b$ και ορίζουμε $f_n(x) = ae^{-nax} - be^{-nbx}$. Δείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_n| = \infty$$

και

$$\int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) \neq \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n.$$

31. Έστω $k, n \in \mathbb{N}$ με $k \leqslant n$ και $E_1, \ldots, E_n$ μετρήσιμα υποσύνολα του $[0,1]$ με την εξής ιδιότητα: κάθε $x \in [0,1]$ ανήκει σε τουλάχιστον k από τα $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Δείξτε ότι υπάρχει $i \leqslant n$ ώστε $\lambda(E_i) \geqslant k/n$.

Μέρος II

Χώροι Banach και χώροι Hilbert

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Χώροι με νόρμα

4.1 Γραμμικοί χώροι

Ξεκινάμε υπενθυμίζοντας (χωρίς πολλές λεπτομέρειες) τις βασικές έννοιες των γραμμικών χώρων από τη γραμμική άλγεβρα.

Ορισμός 4.1.1. Ένα μη κενό σύνολο X λέγεται *γραμμικός χώρος* (ή *διανυσματικός χώρος*) πάνω από το $\mathbb{R}$ αν είναι εφοδιασμένο με δύο πράξεις

$+ : X \times X \to X$ (την πρόσθεση)

και

$\cdot : \mathbb{R} \times X \to X$ (τον πολλαπλασιασμό)

που ικανοποιούν τα εξής:

(I) *Αξιώματα της πρόσθεσης:* για κάθε $x, y, z \in X$,

(i) $x + y = y + x$.

(ii) $x + (y + z) = (x + y) + z$.

(iii) Υπάρχει ένα στοιχείο $\vec{0} \in X$ τέτοιο ώστε, για κάθε $x \in X$, $\vec{0} + x = x$.

(iv) Για κάθε $x \in X$ υπάρχει (μοναδικό) $-x \in X$ τέτοιο ώστε $x + (-x) = \vec{0}$.

Δηλαδή, το X είναι αντιμεταθετική ομάδα με την πράξη της πρόσθεσης.

(II) *Αξιώματα του πολλαπλασιασμού:* για κάθε $x, y \in X$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

(i) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.

(ii) $1x = x$.

(iii) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

(iv) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.

Από τα αξιώματα του γραμμικού χώρου προκύπτουν άμεσα, για παράδειγμα, οι

$$0x = \vec{0}, \quad \lambda\vec{0} = \vec{0}, \quad -x = (-1)x.$$

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε ελεύθερα τέτοιου είδους ιδιότητες (η δομή του γραμμικού χώρου θα θεωρηθεί, σε γενικές γραμμές, γνωστή). Τα στοιχεία του X θα λέγονται σημεία (ή και διανύσματα).

Παραδείγματα 4.1.2. (α) Ο $\mathbb{R}^m$ γίνεται γραμμικός χώρος με πράξεις τις

$$(x(1),\dots,x(m))+(y(1),\dots,y(m))=(x(1)+y(1),\dots,x(m)+y(m)),$$

$$\lambda(x(1),\dots,x(m))=(\lambda x(1),\dots,\lambda x(m)).$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι $\vec{0}=(0,\dots,0)$ και $-(x(1),\dots,x(m))=(-x(1),\dots,-x(m))$.

(β) Το σύνολο $\mathcal{S}$ των ακολουθιών πραγματικών αριθμών γίνεται γραμμικός χώρος αν ορίσουμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό κατά συντεταγμένη: αν $x=(x(k))_k$, $y=(y(k))_k$, και $\lambda\in\mathbb{R}$, θέτουμε

$$x+y=(x(k)+y(k))_k \quad , \quad \lambda x=(\lambda x(k))_k.$$

(γ) Αν $A\neq\emptyset$ και $F(A)$ είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f:A\to\mathbb{R}$, τότε το $F(A)$ γίνεται γραμμικός χώρος αν ορίσουμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό κατά σημείο: αν $f,g\in F(A)$ και $\lambda\in\mathbb{R}$, ορίζουμε $f+g$, $\lambda f\in F(A)$ θέτοντας

$$(f+g)(t)=f(t)+g(t) \quad , \quad (\lambda f)(t)=\lambda f(t) \quad , \quad t\in A.$$

Ορισμός 4.1.3. Αν X είναι ένας γραμμικός χώρος και Y ένα μη κενό υποσύνολο του X, το Y λέγεται (γραμμικός) *υπόχωρος* του X αν για κάθε $x,y\in Y$ και $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ έχουμε $\lambda x+\mu y\in Y$.

Εύκολα ελέγχουμε ότι ο Y είναι υπόχωρος του X αν και μόνο αν ο Y είναι γραμμικός χώρος με πράξεις τους περιορισμούς των $+,\cdot$ στα $Y\times Y$ και $\mathbb{R}\times Y$ αντίστοιχα. Ο Y λέγεται *γνήσιος υπόχωρος* του X αν είναι υπόχωρος του X και $Y\neq\{0\},X$.

Όπως θα δούμε και παρακάτω, πολλά από τα κλασικά παραδείγματα χώρων που παρουσιάζουν ενδιαφέρον για τη Συναρτησιακή Ανάλυση είναι υπόχωροι του $\mathcal{S}$ ή κάποιου $F(A)$.

Ορισμός 4.1.4. Αν $x_1,\dots,x_m$ είναι διανύσματα του γραμμικού χώρου X, τότε *γραμμικός συνδυασμός* των x_i είναι κάθε διάνυσμα u της μορφής

$$u=\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_mx_m, \quad \lambda_i\in\mathbb{R}.$$

Αν $M\subseteq X$, $M\neq\emptyset$, τότε ο *υπόχωρος που παράγεται από το* M (γράφουμε $\mathrm{span}(M)$ ή $\langle M\rangle$) είναι το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών στοιχείων του M:

$$\mathrm{span}(M)=\{\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_mx_m:\lambda_i\in\mathbb{R},x_i\in M,m\in\mathbb{N}\}.$$

Εύκολα βλέπουμε ότι ο $\mathrm{span}(M)$ είναι όντως υπόχωρος του X.

Ορισμός 4.1.5. Αν τα $x_1,\dots,x_m$ είναι διανύσματα του γραμμικού χώρου X, λέμε ότι τα x_i είναι *γραμμικά ανεξάρτητα* αν

$$\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_mx_m=\vec{0}\Longrightarrow\lambda_1=\ldots=\lambda_m=0.$$

Ισοδύναμα, αν κανένα x_i δεν γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των x_j, $j\neq i$. Λέμε ότι το πεπερασμένο σύνολο $\{x_1,\dots,x_m\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο αν τα $x_1,\dots,x_m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Πιό γενικά, ένα μη κενό $M \subseteq X$ λέγεται *γραμμικά ανεξάρτητο* αν κάθε *πεπερασμένο* υποσύνολό του είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Τα $x_1, \dots, x_m$ λέγονται *εξαρτημένα* αν υπάρχουν $\lambda_i \in \mathbb{R}$ όχι όλοι μηδέν, τέτοιοι ώστε $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m = \vec{0}$. Ένα $M \neq \emptyset$ λέγεται *εξαρτημένο* αν έχει πεπερασμένο εξαρτημένο υποσύνολο, αν δηλαδή υπάρχουν εξαρτημένα $x_1, \dots, x_m \in M$.

Παραδείγματα 4.1.6. (α) Στο χώρο $X = F([a,b])$, το σύνολο

$$M = \{1, t, \dots, t^N, \dots\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο: Ας υποθέσουμε ότι $\lambda_0 + \lambda_1 t + \cdots + \lambda_N t^N = \vec{0}$ για κάποιο $N \in \mathbb{N}$, και $\lambda_N \neq 0$. Αυτό σημαίνει ότι το πολυώνυμο $P(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t + \cdots + \lambda_N t^N$ μηδενίζεται ταυτοτικά στο $[a,b]$. Επομένως, η N-οστή του παράγωγος είναι κι αυτή ταυτοτικά 0 στο $[a,b]$. Όμως,

$$P^{(N)}(t) \equiv N!\lambda_N \neq 0,$$

άτοπο. Επομένως, το M είναι γραμμικά ανεξάρτητο (γιατί;).

(β) Ορίζουμε $\delta_{nk} = 0$ αν $n \neq k$ και $\delta_{nk} = 1$ αν $n = k$. Το σύνολο $M = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ (όπου $e_n = (\delta_{nk})_{k \in \mathbb{N}}$) είναι γραμμικά ανεξάρτητο στον $\mathcal{S}$ (εξηγήστε).

Ορισμός 4.1.7. Λέμε ότι ο χώρος X έχει *πεπερασμένη διάσταση* αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

(i) Στον X υπάρχουν n το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $x_1, \dots, x_n$.

(ii) Αν $k \geqslant n+1$, οποιαδήποτε k διανύσματα του X είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Έπεται ότι τα $x_1, \dots, x_n$ παράγουν το χώρο: $X = \mathrm{span}\{x_1, \dots, x_n\}$ (άσκηση).

Ο X έχει άπειρη διάσταση αν $X \neq \{0\}$ και ο X δεν έχει πεπερασμένη διάσταση. Δηλαδή, αν περιέχει άπειρο γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο.

Ορισμός 4.1.8. Ένα υποσύνολο M του X λέγεται *βάση* (Hamel βάση) του X αν είναι γραμμικά ανεξάρτητο και παράγει τον X.

Σχετικά με τις Hamel βάσεις ισχύει το εξής θεμελιώδες:

Θεώρημα 4.1.9. *Κάθε γραμμικός χώρος X έχει Hamel βάση.*

Το θεώρημα είναι γνωστό στην περίπτωση της πεπερασμένης διάστασης από τη γραμμική άλγεβρα. Για την απόδειξη στη γενική περίπτωση απαιτούνται περισσότερα συνολοθεωρητικά εργαλεία (το λήμμα του Zorn). Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι οποιεσδήποτε δύο βάσεις ενός γραμμικού χώρου X είναι ισοπληθικές (η απόδειξη παραλείπεται). Ορίζεται καλά λοιπόν το εξής:

Ορισμός 4.1.10. Αν X ένας γραμμικός χώρος, η *διάσταση* του X ($\dim X$) είναι ο πληθάριθμος μιας βάσης του.

4.2 Χώροι με νόρμα – Χώροι Banach

Υπενθυμίζουμε ότι μια *μετρική* σε ένα μη κενό σύνολο X είναι μια συνάρτηση $d : X \times X \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τα εξής: για κάθε $x, y, z \in X$, (M1) $d(x, y) \geqslant 0$,

(M2) $d(x, y) = 0$ αν και μόνο αν $x = y$,

(M3) $d(x, y) = d(y, x)$ και

(M4) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (τριγωνική ανισότητα).

Τότε, το ζεύγος (X, d) λέγεται *μετρικός χώρος* και η ποσότητα $d(x, y)$ *απόσταση* των x και y. Θα θεωρήσουμε γνωστή στα παρακάτω τη θεωρία των μετρικών χώρων[1], εισάγουμε απλά τους εξής συμβολισμούς: αν (X, d) ένας μετρικός χώρος, $x_0 \in X$, $r > 0$,

(i) Η *ανοικτή μπάλα* κέντρου x_0 και ακτίνας r είναι το σύνολο

$$D(x_0, r) = \{y \in X : d(y, x_0) < r\}.$$

(ii) Η *κλειστή μπάλα* κέντρου x_0 και ακτίνας r είναι το σύνολο

$$B(x_0, r) = \{y \in X : d(y, x_0) \leqslant r\}.$$

(iii) Η *σφαίρα* κέντρου x_0 και ακτίνας r είναι το σύνολο

$$S(x_0, r) = \{y \in X : d(y, x_0) = r\} = B(x_0, r) \setminus D(x_0, r).$$

Στα παρακάτω θα μας απασχολήσει μια υποκλάση των μετρικών χώρων, οι *χώροι με νόρμα*. Δίνουμε τον εξής:

Ορισμός 4.2.1. Έστω X ένας γραμμικός χώρος. Μια συνάρτηση $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ λέγεται *νόρμα* αν ικανοποιεί τα εξής: για κάθε $x, y \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$,

(N1) $\|x\| \geqslant 0$.

(N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(N3) $\|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\|$.

(N4) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

(η νόρμα του διανύσματος x «μετράει» την απόσταση του x από το 0, και ζητάμε να έχει τις πιό φυσιολογικές ιδιότητες που η απόσταση θα έπρεπε να έχει.) Το ζεύγος $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται χώρος με νόρμα.

Κάθε νόρμα επάγει μια *μετρική* στον X: για κάθε $x, y \in X$, ορίζουμε

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Πρόταση 4.2.2. Η d είναι μετρική.

[1]Για μια λεπτομερή παρουσίαση παραπέμπουμε στις Σημειώσεις Πραγματικής Ανάλυσης, Π. Βαλέττας.

Απόδειξη. Ελέγχουμε τις ιδιότητες (M1)-(M4): αν $x, y, z \in X$,

(M1) $d(x, y) = \|x - y\| \geqslant 0$, από την (N1).

(M2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$, από την (N2).

(M3) $d(y, x) = \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = |-1|\,\|x - y\| = \|x - y\| = d(x, y)$, από την (N3).

(M4) $d(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leqslant \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z)$, από την (N4). □

Αποδεικνύουμε στη συνέχεια κάποιες βασικές ιδιότητες των χώρων με νόρμα και της επαγόμενης μετρικής:

Πρόταση 4.2.3. *Σε κάθε χώρο με νόρμα X, οι $\|\cdot\|$ και $+$, $\cdot$ είναι συνεχείς συναρτήσεις.*

Απόδειξη. Τι εννοούμε με αυτό: πρώτα-πρώτα, αν $x_n, x \in X$, τότε $x_n \to x$ στον X αν και μόνο αν $d(x_n, x) \to 0$, δηλαδή αν $\|x_n - x\| \to 0$. Κατόπιν, για να ελέγξουμε τη συνέχεια μιας συνάρτησης f, αρκεί να δείξουμε ότι

$$x_n \to x \Longrightarrow f(x_n) \to f(x).$$

(α) *Η $\|\cdot\|$ είναι συνεχής:* Ζητάμε, $x_n \to x \Longrightarrow \|x_n\| \to \|x\|$. Αυτό όμως έπεται από την

$$\big|\|x\| - \|x_n\|\big| \leqslant \|x - x_n\|,$$

αφού $\|x - x_n\| \to 0$.

(β) *Η $+$ είναι συνεχής:* Θέλουμε να δείξουμε ότι αν $x_n \to x$ και $y_n \to y$, τότε $x_n + y_n \to x + y$. Αυτό είναι συνέπεια της

$$\|(x_n + y_n) - (x + y)\| = \|(x_n - x) + (y_n - y)\| \leqslant \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \to 0.$$

(γ) *Η $\cdot$ είναι συνεχής:* Θα δείξουμε ότι αν $\lambda_n \to \lambda$ και $x_n \to x$, τότε $\lambda_n x_n \to \lambda x$. Γράφουμε

$$(*) \qquad \|\lambda x - \lambda_n x_n\| = \|\lambda_n(x - x_n) + (\lambda - \lambda_n)x\| \leqslant |\lambda_n|\,\|x - x_n\| + \|x\|\,|\lambda - \lambda_n|.$$

Παρατηρήστε ότι, αφού $\lambda_n \to \lambda$, υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $|\lambda_n| \leqslant M$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Οπότε, η $(*)$ γίνεται

$$\|\lambda x - \lambda_n x_n\| \leqslant M\|x - x_n\| + \|x\|\,|\lambda - \lambda_n| \to 0.$$

□

Κάθε μετρική που επάγεται από νόρμα έχει πρόσθετες ιδιότητες: είναι «καλή» μετρική (παρατηρήστε ότι στην απόδειξη της Πρότασης 4.2.2 δεν χρησιμοποιήθηκαν όλες οι ιδιότητες της νόρμας):

Πρόταση 4.2.4. *Έστω X χώρος με νόρμα, και d η επαγόμενη μετρική. Τότε, για κάθε $x, y, z \in X$ και κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, έχουμε*

(i) $d(x + z, y + z) = d(x, y)$,

(ii) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$.

Απόδειξη. (i) $d(x + z, y + z) = \|(x + z) - (y + z)\| = \|x - y\| = d(x, y)$.

(ii) $d(\lambda x, \lambda y) = \|\lambda x - \lambda y\| = \|\lambda(x - y)\| = |\lambda|\,\|x - y\| = |\lambda| d(x, y)$.

□

Παράδειγμα 4.2.5. Στον $\mathcal{S}$, αν $x = (x(k))$ και $y = (y(k))$ η συνάρτηση

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x(k) - y(k)|}{1 + |x(k) - y(k)|}$$

είναι μετρική. Ο $\mathcal{S}$ είναι γραμμικός χώρος, όμως η d δεν επάγεται από κάποια νόρμα $\|\cdot\|$ στον s: θα έπρεπε να ικανοποιεί την

$$d(2x, 0) = \|2x\| = 2\|x\| = 2d(x, 0),$$

δηλαδή για κάθε $x = (x(k)) \in \mathcal{S}$ θα είχαμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{2|x(k)|}{1 + 2|x(k)|} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x(k)|}{1 + |x(k)|}.$$

Αυτό δεν ισχύει (πάρτε, για παράδειγμα, $x = (1, 0, \ldots)$.)

Ορισμός 4.2.6. Έστω X χώρος με νόρμα. Η *μοναδιαία μπάλα* B_X του X είναι η κλειστή μπάλα με κέντρο 0 και ακτίνα 1. Δηλαδή,

$$B_X = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}.$$

Πρόταση 4.2.7. *Σε κάθε χώρο με νόρμα X, η μοναδιαία μπάλα B_X είναι σύνολο κλειστό, φραγμένο, κυρτό και συμμετρικό ως προς το 0, με μη κενό εσωτερικό.*

Απόδειξη. (α) Η B_X είναι φραγμένη: $B_X \subseteq D(0, 2)$.

(β) Αν $\|x_n\| \leqslant 1$ και $x_n \to x$, τότε $\|x\| = \lim_n \|x_n\| \leqslant 1$. Δηλαδή, η B_X είναι κλειστό σύνολο.

(γ) Η B_X είναι κυρτή[2] : αν $x, y \in B_X$ και $\lambda \in (0, 1)$, τότε

$$\|\lambda x + (1 - \lambda)y\| \leqslant \|\lambda x\| + \|(1 - \lambda)y\| \leqslant \lambda + (1 - \lambda) = 1,$$

δηλαδή, $\lambda x + (1 - \lambda)y \in B_X$.

(δ) Αν $x \in B_X$, τότε $\|-x\| = \|x\| \leqslant 1$, δηλαδή $-x \in B_X$. Επομένως, η B_X είναι συμμετρική ως προς το 0.

(ε) $D(0, 1/2) \subseteq B_X$, άρα $B_X^\circ \neq \emptyset$. □

Έχουμε δεί τον ορισμό της *συγκλίνουσας ακολουθίας* σε ένα χώρο με νόρμα: αν $x_n, x \in X$, $n \in \mathbb{N}$, τότε λέμε ότι $x_n \to x$ αν $\|x_n - x\| \to 0$.

Τελείως ανάλογα, μια ακολουθία (x_n) στον X λέγεται *ακολουθία Cauchy* αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$n, m \geqslant n_0 \Longrightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Ορισμός 4.2.8. *Χώρος Banach* είναι ένας πλήρης χώρος με νόρμα (δηλαδή, ένας γραμμικός χώρος με νόρμα που είναι πλήρης ως προς τη μετρική d που επάγεται από τη νόρμα.)

4.3 Παραδείγματα χώρων με νόρμα

Ορίζουμε παρακάτω μερικούς κλασικούς χώρους με νόρμα:

[2]Υπενθυμίζουμε ότι ένα $K \subseteq X$ είναι κυρτό αν για κάθε $x, y \in K$ και $\lambda \in (0, 1)$ ισχύει και $\lambda x + (1 - \lambda)y \in K$.

1. Στον $\mathbb{R}^m$ θεωρούμε την Ευκλείδεια νόρμα $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ με

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{m} |x(k)|^2\right)^{1/2},$$

όπου $x = (x(1), x(2), \ldots, x(m)) \in \mathbb{R}^m$. Η απόδειξη των ιδιοτήτων (N1)-(N3) της νόρμας είναι άμεση. Για την τριγωνική ανισότητα θα χρειαστούμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz:

Πρόταση 4.3.1 (Ανισότητα Cauchy-Schwarz). *Έστω $x_1, x_2, \ldots, x_m$ και $y_1, y_2, \ldots, y_m$ πραγματικοί αριθμοί. Τότε, ισχύει η ανισότητα*

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i y_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{m} |y_i|^2\right)^{1/2}.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη που παραθέτουμε οφείλεται στον Schwarz. Θεωρούμε τη συνάρτηση $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$p(\lambda) = (|x_1|\lambda + |y_1|)^2 + \cdots + (|x_m|\lambda + |y_m|)^2 \geqslant 0.$$

Κάνοντας τις πράξεις, η p παίρνει τη μορφή

$$p(\lambda) = A\lambda^2 + 2B\lambda + C \geqslant 0,$$

όπου $A = \sum_{i=1}^{m} |x_i|^2$, $B = \sum_{i=1}^{m} |x_i y_i|$ και $C = \sum_{i=1}^{m} |y_i|^2$. Συνεπώς, η διακρίνουσα του τριωνύμου $p(\lambda)$ πρέπει να είναι μη θετική και άρα

$$(2B)^2 - 4AC \leqslant 0$$

ή ισοδύναμα $B \leqslant AC$ που είναι ακριβώς η ζητούμενη ανισότητα. □

Επιστρέφουμε στην απόδειξη της τριγωνικής ανισότητας για την $\|\cdot\|_2$: αν $x = (x(1), \ldots, x(m))$ και $y = (y(1), \ldots, y(m))$ δύο διανύσματα του $\mathbb{R}^m$, τότε

$$\begin{aligned}
\|x + y\|_2^2 &= \sum_{k=1}^{m} |x(k) + y(k)|^2 \\
&= \sum_{k=1}^{m} |x(k)|^2 + 2\sum_{k=1}^{m} x(k)y(k) + \sum_{k=1}^{m} |y(k)|^2 \\
&\leqslant \|x\|_2^2 + 2\sum_{k=1}^{m} |x(k)y(k)| + \|y\|_2^2 \\
&\leqslant \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 + \|y\|_2^2,
\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz. Έτσι,

$$\|x + y\|_2^2 \leqslant (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2 \Longrightarrow \|x + y\|_2 \leqslant \|x\|_2 + \|y\|_2.$$

Συνεπώς, ο $\mathbb{R}^m$ εφοδιασμένος με την $\|\cdot\|_2$ γίνεται χώρος με νόρμα με επαγόμενη μετρική που ορίζεται από τη σχέση

$$d(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{m} |x(k) - y(k)|^2\right)^{1/2}, \tag{4.3.1}$$

όπου $x = (x(1), \dots, x(m))$ και $y = (y(1), \dots, y(m))$.

Πρόταση 4.3.2. *Ο $\mathbb{R}^m$ με τη μετρική που ορίζεται από την (4.3.1) είναι πλήρης μετρικός χώρος, δηλαδή χώρος Banach.*

Απόδειξη. Έστω (x_n) ακολουθία Cauchy στον $\mathbb{R}^m$. Γράφουμε $x_n = (x_n(1), \dots, x_{n|(m)})$, $x_n(k) \in \mathbb{R}$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Η (x_n) είναι Cauchy, επομένως υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα

$$n, s \geqslant n_0 \Longrightarrow d(x_n, x_s) < \varepsilon.$$

Στην περίπτωσή μας αυτό σημαίνει ότι

$$(*) \qquad n, s \geqslant n_0 \Longrightarrow \left(\sum_{k=1}^{m} (x_n(k) - x_s(k))^2 \right)^{1/2} < \varepsilon.$$

Η βασική παρατήρηση είναι ότι

$$\forall\ k = 1, \dots, m, \qquad |x_n(k) - x_s(k)| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{m} (x_n(k) - x_s(k))^2 \right)^{1/2} < \varepsilon.$$

Επομένως, αν $n, s \geqslant m_0$, τότε για κάθε $k = 1, \dots, m$ χωριστά έχουμε

$$|x_n(k) - x_s(k)| < \varepsilon.$$

Αυτό σημαίνει ότι: για κάθε $k = 1, \dots, m$ η ακολουθία $(x_n(k))_n$ είναι Cauchy στο $\mathbb{R}$. Από την πληρότητα του $\mathbb{R}$ έπεται ότι υπάρχουν $x(1), \dots, x(m) \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$x_n(1) \to x(1) \quad , \quad \dots \quad , \quad x_n(m) \to x(m)$$

καθώς $n \to \infty$. *Ορίζουμε* $x = (x(1), \dots, x(m)) \in \mathbb{R}^m$, και μένει να δείξουμε ότι $d(x_n, x) \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

Επιστρέφουμε στην $(*)$: για κάθε $n, s \geqslant n_0$ έχουμε

$$\left(\sum_{k=1}^{m} (x_n(k) - x_s(k))^2 \right)^{1/2} < \varepsilon.$$

Σταθεροποιούμε το n και αφήνουμε το s να πάει στο άπειρο:

$$\left(\sum_{k=1}^{m} (x_n(k) - x_s(k))^2 \right)^{1/2} \to \left(\sum_{k=1}^{m} (x_n(k) - x(k))^2 \right)^{1/2}.$$

Επομένως, για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε

$$d(x_n, x) = \left(\sum_{k=1}^{m} (x_n(k) - x(k))^2 \right)^{1/2} \leqslant \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, βλέπουμε ότι $d(x_n, x) \to 0$. Δηλαδή, $x_n \to x$. $\square$

2. Ο χώρος $\ell_\infty = \ell_\infty(\mathbb{N})$ των φραγμένων ακολουθιών , δηλαδή

$$\ell_\infty = \{x = (x(k))_k : \text{ υπάρχει } M \equiv M(x) > 0 : |x(k)| \leqslant M \text{ για κάθε } k\}.$$

Ο ℓ_∞ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathcal{S}$ και η συνάρτηση $\|\cdot\|_\infty : \ell_\infty \to \mathbb{R}$ με

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x(k)| : \ k \in \mathbb{N}\}$$

για $x = (x(1), x(2), \ldots) \in \ell_\infty$ είναι νόρμα σε αυτόν. Αποδεικνύουμε μόνο την τριγωνική ανισότητα: αν $x = (x(1), x(2), \ldots)$ και $y = (y(1), y(2), \ldots)$, τότε για $k \in \mathbb{N}$:

$$|x(k) + y(k)| \leqslant |x(k)| + |y(k)| \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Συνεπώς, $\|x + y\|_\infty \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$. Συνεπώς ο ℓ_∞ έχει τη δομή χώρου με νόρμα με επαγόμενη μετρική που ορίζεται από τη σχέση

$$d(x, y) = \sup\{|x(k) - y(k)| : \ k \in \mathbb{N}\} \tag{4.3.2}$$

για $x = (x(k))$ και $y = (y(k))$.

Πρόταση 4.3.3. *Ο ℓ_∞ με τη μετρική που ορίζεται από την (4.3.2) είναι πλήρης μετρικός χώρος, δηλαδή χώρος Banach.*

Απόδειξη. Έστω (x_n) ακολουθία Cauchy στον ℓ_∞. Γράφουμε

$$x_n = (x_n(k)) = (x_n(1), \ldots, x_n(k), \ldots).$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Η (x_n) είναι Cauchy, άρα υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα

$$\forall\ n, s \geqslant n_0, \ \ \sup\{|x_n(k) - x_s(k)| : k \in \mathbb{N}\} < \varepsilon. \tag{$*$}$$

Επομένως, αν $n, s \geqslant n_0$ έχουμε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ χωριστά

$$|x_n(k) - x_s(k)| < \varepsilon. \tag{$**$}$$

Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ η ακολουθία $(x_n(k))$ είναι Cauchy (ως προς n) στο $\mathbb{R}$. Επομένως, υπάρχουν $x(k) \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$x + n(1) \to x(1) \quad , \quad \ldots \quad , \quad x_n(k) \to x(k), \ldots \quad (n \to \infty).$$

Ορίζουμε $x = (x(1), \ldots, x(k), \ldots)$. Πρέπει πρώτα να δείξουμε ότι $x \in \ell_\infty$.
Επιστρέφοντας στην $(*)$ και σταθεροποιώντας $s = n_0$, έχουμε

$$\forall\ n \geqslant n_0\ \forall k \in \mathbb{N}, \ \ |x_n(k) - x_{n_0}(k)| < \varepsilon$$

και, για κάθε $k \in \mathbb{N}$,

$$|x_n(k) - x_{n_0}(k)| \to |x(k) - x_{n_0}(k)|$$

καθώς $n \to \infty$. Επομένως, $|x(k) - x_{n_0}(k)| \leqslant \varepsilon$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, δηλαδή

$$\forall\ k \in \mathbb{N},\ \ |x(k)| \leqslant |x_{n_0}(k)| + \varepsilon.$$

Όμως $x_{n_0} \in \ell_\infty$. Επομένως, υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $|x_{n_0}(k)| \leqslant M$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι $\sup_k |x(k)| \leqslant M + \varepsilon$, δηλαδή $x \in \ell_\infty$.

Επίσης, από την $(**)$, αφήνοντας το $s \to \infty$ έχουμε:

$$\forall\ n \geqslant n_0\ \forall k \in \mathbb{N},\ \ |x_n(k) - x(k)| \leqslant \varepsilon,$$

δηλαδή, για κάθε $n \geqslant n_0$,

$$d(x_n, x) = \sup\{|x_n(k) - x(k)| : k \in \mathbb{N}\} \leqslant \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, $x_n \to x$ ως προς την d. □

3. Οι χώροι c και c_0. Θεωρούμε τους χώρους:

$$c = \{x = (x(n))_n :\ \lim_{n\to\infty} x(n) \in \mathbb{R}\}$$

των συγκλινουσών ακολουθιών και

$$c_0 = \{x = (x(n))_n :\ \lim_{n\to\infty} x(n) = 0\}$$

των μηδενικών ακολουθιών. Είναι σαφές ότι και οι δύο είναι γραμμικοί χώροι και μάλιστα υπόχωροι του ℓ_∞. Συνεπώς, για να εξεταστεί αν είναι χώροι Banach αρκεί να εξεταστεί αν είναι κλειστοί στον ℓ_∞[3].

Πρόταση 4.3.4. *Οι χώροι c και c_0 είναι πλήρεις μετρικοί χώροι.*

Απόδειξη. Έστω $x = (x(k)) \in \overline{c}$. Δηλαδή, υπάρχουν $x_n = (x_n(k)) \in c$ με $x_n \to x$. Πρέπει να δείξουμε ότι $x \in c$, δηλαδή ότι η $(x(k))$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$. Αρκεί να δείξουμε ότι η $(x(k))$ είναι Cauchy στο $\mathbb{R}$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $x_n \to x$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $d(x, x_n) < \varepsilon$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Δηλαδή,

$$(*) \qquad \forall\ n \geqslant n_0\ \forall\ k \in \mathbb{N},\ \ |x(k) - x_n(k)| < \varepsilon.$$

Κρατάμε ένα μόνο n: τον n_0. Η $x_{n_0} = (x_{n_0}(k))$ ανήκει στον c, δηλαδή συγκλίνει, δηλαδή είναι Cauchy. Επομένως, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$(**) \qquad \forall\ s, r \geqslant k_0,\ \ |x_{n_0}(s) - x_{n_0}(r)| < \varepsilon.$$

Τότε, χρησιμοποιώντας τις (1) και (2) βλέπουμε ότι, για κάθε $s, r \geqslant k_0$,

$$\begin{aligned} |x(s) - x(r)| &\leqslant |x(s) - x_{n_0}(s)| + |x_{n_0}(s) - x_{n_0}(r)| + |x_{n_0}(r) - x(r)| \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Επομένως, η $(x(k))$ είναι Cauchy, δηλαδή $x \in c$. Αφού $\overline{c} \subseteq c$, ο c είναι κλειστό υποσύνολο του ℓ_∞.

[3] Θυμηθείτε ότι αν X πλήρης μετρικός χώρος και Y υπόχωρος του X, τότε ο Y είναι πλήρης αν και μόνο αν είναι κλειστό υποσύνολο του X.

Για το δεύτερο ισχυρισμό, έστω $x = (x(k)) \in \overline{c_0}$. Δηλαδή, υπάρχουν $x_n = (x_n(k)) \in c_0$ με $x_n \to x$. Πρέπει να δείξουμε ότι $x \in c_0$, δηλαδή ότι $x(k) \to 0$ όταν $k \to \infty$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $x_n \to x$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $d(x, x_n) < \varepsilon$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Δηλαδή,

$$\forall\ n \geqslant n_0\ \forall\ k \in \mathbb{N},\quad |x(k) - x_n(k)| < \varepsilon. \tag{†}$$

Η $x_{n_0} = (x_{n_0}(k))$ ανήκει στον c_0, άρα, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$\forall\ k \geqslant k_0,\quad |x_{n_0}(k)| < \varepsilon. \tag{††}$$

Τότε, χρησιμοποιώντας τις (†) και (††) βλέπουμε ότι, για κάθε $k \geqslant k_0$,

$$|x(k)| \leqslant |x(k) - x_{n_0}(k)| + |x_{n_0}(k)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Επομένως, $x(k) \to 0$ όταν $k \to \infty$, δηλαδή $x \in c_0$. □

4. Ο χώρος των p-αθροίσιμων ακολουθιών ℓ_p, για $1 \leqslant p < \infty$ είναι το σύνολο

$$\ell_p = \left\{ x = (x(k))_k :\ \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p < \infty \right\}$$

εφοδιασμένος με τη νόρμα $\|\cdot\|_p : \ell_p \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p \right)^{1/p},$$

για $x = (x(k)) \in \ell_p$. Οι ιδιότητες (N1)-(N3) του ορισμού της νόρμας επαληθεύονται εύκολα. Επιπλέον η απόδειξη της (N4) στην περίπτωση $p = 1$ είναι απλή (να την κάνετε. Για την απόδειξη της τριγωνικής ανισότητας για $p > 1$ θα χρειαστούμε μια σειρά από κλασσικές ανισότητες:

Λήμμα 4.3.5 (Ανισότητα Young). *Αν $x, y \geqslant 0$ και $p, q > 1$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$[4], τότε*

$$xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

με ισότητα μόνο αν $x^p = y^q$.

Απόδειξη. Η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln x$ είναι γνησίως κοίλη. Αν λοιπόν $a_1, \ldots, a_m > 0$ και $t_j \in (0, 1)$ με $t_1 + \cdots + t_m = 1$, τότε

$$\sum_{j=1}^{m} t_j \ln a_j \leqslant \ln(t_1 a_1 + \cdots + t_m a_m),$$

από την ανισότητα Jensen. Έπεται ότι

$$a_1^{t_1} a_2^{t_2} \cdots a_m^{t_m} \leqslant t_1 a_1 + \cdots + t_m a_m \tag{4.3.3}$$

[4]Τότε οι p και q λέγονται *συζυγείς εκθέτες*.

με ισότητα μόνο αν $a_1 = \cdots = a_m$. Η ανισότητα αυτή γενικεύει την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου. Αν $t_1 = \cdots = t_m = 1/m$, παίρνουμε

$$\sqrt[m]{a_1 \cdots a_m} \leqslant \frac{a_1 + \cdots + a_m}{m}.$$

Εφαρμόζουμε την ανισότητα (4.3.3) με $a = x^p$, $b = y^q$. Αφού $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, συμπεραίνουμε ότι

$$xy = a^{1/p} b^{1/q} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q} = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

με ισότητα μόνο αν $x^p = a = b = y^q$. □

Πρόταση 4.3.6 (Ανισότητα Holder). *Έστω $p, q > 1$ ώστε $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Αν $x = (x(k)) \in \ell_p$ και $y = (y(k)) \in \ell_q$, τότε για την $z = (x(k)y(k))$ ισχύει $z \in \ell_1$ και επιπλέον*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)y(k)| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y(k)|^q \right)^{1/q},$$

δηλαδή $\|z\|_1 \leqslant \|x\|_p \|y\|_q$.

Απόδειξη. Κάνουμε πρώτα την επιπλέον υπόθεση ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p = \sum_{k=1}^{\infty} |y(k)|^q = 1.$$

Για κάθε $k = 1, 2, \ldots$, από την ανισότητα Young έχουμε

$$|x(k)y(k)| = |x(k)||y(k)| \leqslant \frac{|x(k)|^p}{p} + \frac{|y(k)|^q}{q}.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)y(k)| &\leqslant \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{\infty} |y(k)|^q \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \end{aligned}$$

δηλαδή την ανισότητα του Holder σε αυτή την ειδική περίπτωση (γιατί;).

Για τη γενική περίπτωση: μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x, y \neq 0$ (γιατί;), οπότε ορίζουμε

$$x(k)' = \frac{x(k)}{\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p \right)^{1/p}} \quad , \quad y(k)' = \frac{y(k)}{\left(\sum_{k=1}^{\infty} |y(k)|^q \right)^{1/q}} \quad , \quad k \in \mathbb{N}.$$

Από τον τρόπο ορισμού τους, οι $(x(k)')$, $(y(k)')$ ικανοποιούν τις

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)'|^p = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x(k)|^p}{\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p} = 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|y(k)|^q}{\sum_{k=1}^{\infty} |y(k)|^q} = \sum_{k=1}^{\infty} |y(k)'|^q.$$

Από το πρώτο βήμα της απόδειξης (το εφαρμόζουμε για τις $(x(k)')$, $(y(k)')$), βλέπουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x(k)'y(k)'| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|x(k)y(k)|}{\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x(k)|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|y(k)|^q\right)^{1/q}} \leqslant 1,$$

δηλαδή

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x(k)y(k)| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x(k)|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|y(k)|^q\right)^{1/q}.$$

□

Σχόλιο. Είναι εμφανές ότι στην περίπτωση $p = q = 2$ η ανισότητα Holder είναι ακριβώς η ανισότητα Cauchy-Schwarz.

Πρόταση 4.3.7 (Ανισότητα Minkowski). *Έστω $p > 1$. Αν $x = (x(k)) \in \ell_p$ και $y = (y(k)) \in \ell_p$, τότε $x + y \in \ell_p$ και μάλιστα*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x(k)+y(k)|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x(k)|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}|y(k)|^p\right)^{1/p},$$

δηλαδή $\|x+y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$.

Απόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}|x(k)+y(k)|^p &= \sum_{k=1}^{n}|x(k)+y(k)|^{p-1}|x(k)+y(k)| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n}|x(k)+y(k)|^{p-1}\left(|x(k)|+|y(k)|\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}|x(k)+y(k)|^{p-1}|x(k)| + \sum_{k=1}^{n}|x(k)+y(k)|^{p-1}|y(k)|.
\end{aligned}$$

Για καθένα από τα δύο αθροίσματα εφαρμόζουμε την ανισότητα του Holder με εκθέτες p, q (τα αθροίσματα έχουν n όρους, αλλά η ανισότητα ισχύει και σε αυτή την περίπτωση - γιατί;). Τότε,

$$\begin{aligned}
S_n &:= \sum_{k=1}^{n}|x(k)+y(k)|^p \\
&\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}|x(k)+y(k)|^{q(p-1)}\right)^{1/q}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}|x(k)|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n}|y(k)|^p\right)^{1/p}\right],
\end{aligned}$$

και επειδή $q(p-1) = qp - p = p$, παίρνουμε

$$S_n \leqslant S_n^{1/q}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}|x(k)|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n}|y(k)|^p\right)^{1/p}\right].$$

Αν $S_n > 0$, διαιρούμε με $S_n^{1/q}$, και αφού $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$, έχουμε

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n} |x(k) + y(k)|^p\right)^{1/p} &\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x(k)|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y(k)|^p\right)^{1/p} \\ &\leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y(k)|^p\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

(Αν $S_n = 0$, τότε αυτή η τελευταία ανισότητα ισχύει ούτως ή άλλως.) Αφού το δεξιό μέλος είναι πεπερασμένο, το αριστερό παραμένει φραγμένο ανεξάρτητα από το n. Αφήνοντας το n να πάει στο άπειρο, συμπεραίνουμε ότι η $z = (x(k) + y(k)) \in \ell_p$ και

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x(k) + y(k)|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y(k)|^q\right)^{1/q}.$$

□

Έτσι, από την ανισότητα Minkowski, ο ℓ_p, $p \geqslant 1$, γίνεται (γραμμικός) χώρος με νόρμα και επαγόμενη μετρική την

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x(k) - y(k)|^p\right)^{1/p}$$

για $x = (x(k)), y = (y(k)) \in \ell_p$.

Πρόταση 4.3.8. *Για $1 \leqslant p < \infty$ οι χώροι $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ είναι πλήρεις μετρικοί χώροι, δηλαδή χώροι Banach.*

Απόδειξη. Θα μιμηθούμε την απόδειξη της Πρότασης 4.3.2. Έστω (x_n) ακολουθία Cauchy στον ℓ_p. Γράφουμε $x_n = (x_n(k)) = (x_n(1), \ldots, x_n(k), \ldots)$, $x_n(k) \in \mathbb{R}$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Η (x_n) είναι Cauchy, επομένως υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα

$$(*) \qquad n, s \geqslant n_0 \Longrightarrow \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_n(k) - x_s(k)|^p\right)^{1/p} < \varepsilon.$$

Επομένως, για κάθε $n, s \geqslant n_0$ και κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$|x_n(k) - x_s(k)| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_n(k) - x_s(k)|^p\right)^{1/p} < \varepsilon.$$

Δηλαδή, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ η ακολουθία $(x_n(k))$ είναι Cauchy (ως προς n) στο $\mathbb{R}$. Από την πληρότητα του $\mathbb{R}$, υπάρχουν $x(1), \ldots, x(k), \ldots \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$x_n(1) \to x(1), \quad \ldots, \quad x_n(k) \to x(k), \ldots$$

καθώς $n \to \infty$. *Ορίζουμε* $x = (x(1), \ldots, x(k), \ldots)$. Πρέπει πρώτα να δείξουμε ότι $x \in \ell_p$.

Κρατάμε $N \in \mathbb{N}$ σταθερό, και από την $(*)$ έχουμε

$$\forall\ n, s \geqslant m_0, \qquad \left(\sum_{k=1}^{N} |x_n(k) - x_s(k)|^p\right)^{1/p} < \varepsilon,$$

και
$$\left(\sum_{k=1}^{N}|x_n(k)-x_s(k)|^p\right)^{1/p} \to \left(\sum_{k=1}^{N}|x_n(k)-x(k)|^p\right)^{1/p}$$
καθώς $s\to\infty$, οπότε
$$\forall\ n\geqslant n_0,\qquad \left(\sum_{k=1}^{N}|x_n(k)-x(k)|^p\right)^{1/p}\leqslant \varepsilon,$$
και αφήνοντας το $N\to\infty$ παίρνουμε

$$(**)\qquad \forall n\geqslant n_0,\qquad \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_n(k)-x(k)|^p\right)^{1/p}\leqslant \varepsilon.$$

Δηλαδή, π.χ. για $n=n_0$, η $(x_{n_0}(k)-x(k))\in \ell_p$, και αφού $(x_{n_0}(k))\in\ell_p$, από την ανισότητα του Minkowski βλέπουμε ότι $x=(x(k))=((x(k)-x_{n_0}(k))+x_{n_0}(k))\in\ell_p$.

Επιπλέον, η $(**)$ είναι ισοδύναμη με την
$$\forall n\geqslant n_0,\ \ d(x,x_n)\leqslant\varepsilon,$$
απ' όπου συμπεραίνουμε ότι $x_n\to x$. □

5. Ο χώρος c_{00} των τελικά μηδενικών ακολουθιών
$$c_{00}=\{x=(x(k))_k:\ \text{υπάρχει } n=n(x) \text{ ώστε } x(k)=0,\ \forall\ k\geqslant n\}$$
είναι ένας γραμμικός υπόχωρος του ℓ_∞ (γιατί;). Συνεπώς, όπως κάναμε και για τους c, c_0 για να εξετάσουμε αν είναι κλειστός, πρέπει να εξετάσουμε αν είναι κλειστός υπόχωρος αυτού.

Ισχυρισμός. Ο c_{00} δεν είναι κλειστός στον ℓ_∞.

Απόδειξη. Για $n\in\mathbb{N}$ θεωρούμε τις
$$x_n=\left(1,\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{n},0,0,\dots\right)\in c_{00}$$
καθώς και την
$$x=\left(1,\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{n},\frac{1}{n+1},\dots\right)\in\ell_\infty.$$
Είναι εμφανές ότι $x\notin c_{00}$ ενώ
$$\|x_n-x\|_\infty=\left\|\left(0,0,\dots,0,\frac{1}{n+1},\frac{1}{n+2},\dots\right)\right\|_\infty=\frac{1}{n+1}\to 0,$$
δηλαδή $x_n\to x$ στον ℓ_∞. Βρήκαμε λοιπόν μια ακολουθία (x_n) στον c_{00} και ένα στοιχείο $x\in\ell_\infty$ με $x_n\to x$ αλλά $x\notin c_{00}$, και άρα έπεται το ζητούμενο. □

Έπεται λοιπόν ότι ο c_{00} είναι χώρος με νόρμα αλλά όχι χώρος Banach.

Σημείωση: Θα δούμε παρακάτω ότι ο c_{00} δε μπορεί να γίνει χώρος Banach με *οποιαδήποτε* νόρμα κι αν εφοδιαστεί: αυτό θα προκύψει ως συνέπεια του ότι έχει αριθμήσιμη Hamel βάση σε συνδυασμό με το Θεώρημα Baire.

6. Ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων σε ένα κλειστό διάστημα $[a,b]$ του $\mathbb{R}$

$$C[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : \ f \text{ συνεχής}\}$$

εφοδιασμένο με τη supremum νόρμα

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| : \ t \in [a,b]\}.$$

Εφ΄ όσον η f είναι συνεχής, το supremum αυτό είναι καλά ορισμένο και μάλιστα είναι maximum. Αφήνεται ως άσκηση ο έλεγχος των ιδιοτήτων (N1)-(N4) για την $\|\cdot\|_\infty$. Η νόρμα αυτή επάγει την εξής μετρική: για $f, g \in C[a,b]$

$$d_\infty(f,g) = \|f-g\|_\infty = \sup\{|f(t)-g(t)| : \ t \in [a,b]\}.$$

Πρόταση 4.3.9. *Ο $C[a,b]$ εφοδιασμένος με τη supremum νόρμα είναι πλήρης μετρικός χώρος, δηλαδή χώρος Banach.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι ανάλογη αυτής της Πρότασης 4.3.3 και αφήνεται ως άσκηση. □

7. Κλείνουμε αυτή την ενότητα με ένα ακόμη παράδειγμα ενός χώρου με νόρμα ο οποίος δεν είναι χώρος Banach. Συγκεκριμένα, θεωρούμε και πάλι το χώρο $X = C[a,b]$ του προηγούμενου παραδείγματος εφοδιασμένο με τη συνάρτηση $\|\cdot\|_1 : X \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\, dt$$

για $f \in C[a,b]$. Εύκολα βλέπουμε (να το επαληθεύσετε) ότι η $\|\cdot\|_1$ ορίζει μια νόρμα στο $C[a,b]$ με επαγόμενη μετρική την:

$$d_1(f,g) = \int_a^b |f(t)-g(t)|\, dt,$$

όπου $f, g \in C[a,b]$.

Ισχυρισμός. Ο $(C[0,1], \|\cdot\|_1)$ δεν είναι πλήρης.

Απόδειξη. Ορίζουμε μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων (f_n), $n \geqslant 3$, στον X ως εξής:

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & , 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ n\left(t - \frac{1}{2}\right) & , \frac{1}{2} < t < a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \\ 1 & , a_n \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

(1) Η (f_n) είναι ακολουθία Cauchy ως προς την d_1: έστω $n > m$. Τότε,

$$a_m = \frac{1}{2} + \frac{1}{m} > \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = a_n,$$

και (κάντε ένα σχήμα),

$$\begin{aligned} d_1(f_n, f_m) &= \int_0^{1/2} |f_n - f_m| + \int_{1/2}^{a_m} |f_n - f_m| + \int_{a_m}^1 |f_n - f_m| \\ &= \int_{1/2}^{a_m} |f_n - f_m| \leqslant a_m - \frac{1}{2} = \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$, και αν $n, m \geqslant n_0$, τότε

$$d_1(f_n, f_m) \leqslant \frac{1}{m} \leqslant \frac{1}{n_0} < \varepsilon,$$

δηλαδή, η (f_n) είναι Cauchy.

(2) Ας υποθέσουμε ότι $f_n \to f$ (ως προς την d_1) για κάποια συνεχή $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Δηλαδή,

$$\int_0^1 |f_n(t) - f(t)| dt \to 0$$

καθώς $n \to \infty$. Ειδικότερα,

$$0 \leqslant \int_0^{1/2} |f(t)| dt = \int_0^{1/2} |f_n(t) - f(t)| dt \leqslant \int_0^1 |f_n(t) - f(t)| dt \to 0,$$

και αφού η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, πρέπει να ισχύει $f(t) = 0$, $t \in [0, 1/2]$.

Έστω τώρα $\delta \in (1/2, 1)$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{2} + \frac{1}{n} < \delta$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Τότε, για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε

$$f_n(t) = 1, \qquad t \in [\delta, 1].$$

Όμως,

$$0 \leqslant \int_\delta^1 |f_n(t) - f(t)| dt \leqslant \int_0^1 |f_n(t) - f(t)| dt \to 0,$$

άρα

$$\int_\delta^1 |1 - f(t)| dt = 0$$

(γιατί;). Από τη συνέχεια της f, συμπεραίνουμε ότι $f(t) = 1$ για κάθε $t \in [\delta, 1]$, και αφού το δ ήταν τυχόν στο $(1/2, 1)$, έπεται ότι $f(t) = 1$ για κάθε $t \in (1/2, 1]$. Έπεται ότι η f είναι ασυνεχής στο σημείο $t_0 = 1/2$, το οποίο είναι άτοπο αφού η f υποτέθηκε συνεχής στο $[0,1]$.

Βρήκαμε ακολουθία Cauchy (f_n) στον X, η οποία δεν συγκλίνει (ως προς την d) σε στοιχείο του X. Επομένως, ο (X, d) δεν είναι πλήρης. □

4.4 Σύγκλιση σειρών

Ο X είναι γραμμικός χώρος, επομένως μπορούμε να *προσθέτουμε* τους όρους μιάς ακολουθίας στον X. Αυτό οδηγεί σε μια φυσιολογική γενίκευση της έννοιας της *συγκλίνουσας σειράς* σε αυθαίρετο χώρο με νόρμα:

Ορισμός (α) Έστω (x_k) ακολουθία στον X. Η ακολουθία (s_n) των *μερικών αθροισμάτων* της (x_k) ορίζεται από την

$$s_n = x_1 + \cdots + x_n, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Αν υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $s_n \to x$, τότε λέμε ότι *η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *συγκλίνει στο* x, και γράφουμε

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$

(β) Λέμε ότι *η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *συγκλίνει απολύτως*, αν

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < +\infty$$

(δηλαδή, αν η σειρά πραγματικών αριθμών $\|x_1\| + \|x_2\| + \cdots$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$.)

Πρόταση 4.4.1. *Έστω X ένας χώρος Banach. Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ συγκλίνει απολύτως στον X, τότε συγκλίνει στον X.*

Απόδειξη. Έστω (x_k) ακολουθία στον X, με την ιδιότητα $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$. Αν μάς δώσουν $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε, για κάθε $n > m \geqslant n_0$,

$$\|x_{m+1}\| + \cdots + \|x_n\| < \varepsilon.$$

Τότε, αν $n > m \geqslant n_0$,

$$\|s_n - s_m\| = \|x_{m+1} + \cdots + x_n\| \leqslant \|x_{m+1}\| + \cdots + \|x_n\| < \varepsilon.$$

Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα η (s_n) είναι Cauchy. Ο X είναι πλήρης, άρα η s_n συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$. Αυτό εξ' ορισμού σημαίνει ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ συγκλίνει στο x. □

Η ιδιότητα της Πρότασης 4.4.1 δίνει έναν πολύ χρήσιμο χαρακτηρισμό των χώρων Banach:

Πρόταση 4.4.2. *Αν σε ένα χώρο X με νόρμα, κάθε απολύτως συγκλίνουσα σειρά συγκλίνει, τότε ο X είναι πλήρης (είναι χώρος Banach).*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το εξής (γνωστό) αποτέλεσμα:

Αν μια ακολουθία Cauchy σε ένα μετρικό χώρο έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, τότε είναι και η ίδια συγκλίνουσα.

(Θυμηθείτε την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού.) Έστω (x_n) ακολουθία Cauchy στον X. Για $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$, $k = 1, 2, \ldots$, μπορούμε να βρούμε (γιατί;) $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ τέτοια ώστε

$$\forall n > m \geqslant n_k, \quad \|x_n - x_m\| < \frac{1}{2^k}.$$

Ειδικότερα,

$$n_2 > n_1 \geqslant n_1 \Longrightarrow \|x_{n_2} - x_{n_1}\| < \frac{1}{2},$$

$$n_3 > n_2 \geqslant n_2 \Longrightarrow \|x_{n_3} - x_{n_2}\| < \frac{1}{2^2},$$

και, γενικά,

$$n_{k+1} > n_k \geqslant n_k \Longrightarrow \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Επομένως,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < 1 < +\infty.$$

Η $\sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ συγκλίνει απολύτως, οπότε (από την υπόθεσή μας) συγκλίνει: υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε

$$\sum_{k=1}^{m}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) \to x,$$

δηλαδή, $x_{n_{m+1}} - x_{n_1} \to x$. Επομένως, $x_{n_k} \to x + x_{n_1}$. Δείξαμε ότι η (x_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Είναι όμως και ακολουθία Cauchy. Συνεπώς είναι συγκλίνουσα και άρα έπεται ότι ο X είναι πλήρης. □

Έχοντας στη διάθεσή μας την έννοια της συγκλίνουσας σειράς, μπορούμε να ορίσουμε μια έννοια «βάσης» διαφορετική από αυτήν της Hamel βάσης:

Ορισμός 4.4.3. *Μια ακολουθία (e_n) λέγεται βάση Schauder του χώρου X, αν $e_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, και κάθε $x \in X$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n.$$

(υπάρχουν δηλαδή μοναδικοί $a_n = a_n(x) \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\|x - (a_1 e_1 + \ldots + a_m e_m)\| \to 0$$

καθώς $m \to \infty$.) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ είναι το ανάπτυγμα του x ως προς τη βάση (e_n).

Παράδειγμα 4.4.4. *Αν $1 \leqslant p < \infty$, η ακολουθία (e_n) με $e_n = (\delta_{nk})$ είναι μια βάση Schauder του ℓ_p.*

Απόδειξη. Έστω $x = (x(k))_k \in \ell_p$. Για $m \in \mathbb{N}$, θέτουμε $a_m(x) = x(m)$ και παρατηρούμε ότι

$$\|x - x(1)e_1 - \ldots - x(m)e_m\|_p = \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} |x(k)|^p\right)^{1/p} \to 0.$$

Για τη μοναδικότητα, αν $(a_k) \in \mathcal{S}$, τότε για κάθε $t \in \mathbb{N}$ και $m \geqslant t$:

$$|x(t) - a_t| \leqslant \|x - a_1 e_1 - \cdots - a_m e_m\|_p$$

και κατά συνέπεια, αν $\|x - a_1 e_1 - \cdots - a_m e_m\|_p \to 0$, αναγκαστικά είναι $a_t = x(t)$ για κάθε t. □

Πρόταση 4.4.5. *Έστω X χώρος με νόρμα. Αν ο X έχει βάση Schauder $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, τότε ο X είναι διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη: Ορίζουμε $M = \{\sum_{n=1}^{m} q_n e_n : m \in \mathbb{N}, q_n \in \mathbb{Q}\}$. Το M είναι αριθμήσιμο. Έστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ τέτοιοι ώστε

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n,$$

άρα υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα

$$\Big\|x - \sum_{n=1}^{m} a_n e_n\Big\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Για κάθε $n = 1, \ldots, m$, βρίσκουμε $q_n \in \mathbb{Q}$ τέτοιους ώστε

$$|q_n - a_n|\,\|e_n\| < \frac{\varepsilon}{2m}.$$

Τότε, $\sum_{n=1}^m q_n e_n \in M$, και

$$\begin{aligned} \Big\|x - \sum_{n=1}^m q_n e_n\Big\| &\leqslant \Big\|x - \sum_{n=1}^m a_n e_n\Big\| + \Big\|\sum_{n=1}^m (a_n - q_n)e_n\Big\| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=1}^m |a_n - q_n|\,\|e_n\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + m\frac{\varepsilon}{2m} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Επομένως, $\overline{M} = X$. □

Σημείωση: Το 1936, ο Mazur ρώτησε αν ισχύει το αντίστροφο της Πρότασης 4.4.5: αν δηλαδή, κάθε διαχωρίσιμος χώρος Banach έχει βάση Schauder. Το ερώτημα αποδείχθηκε εξαιρετικά δύσκολο: το 1973, ο Per Enflo έδωσε αρνητική απάντηση.

4.5 Ασκήσεις

Ομάδα Α΄

1. Αν Y και Z είναι υπόχωροι του X, δείξτε ότι ο $Y \cap Z$ είναι υπόχωρος του X, ενώ ο $Y \cup Z$ είναι υπόχωρος του X αν και μόνο αν είτε $Y \subseteq Z$ είτε $Z \subseteq Y$.

2. Έστω X χώρος με νόρμα. Δείξτε ότι η κλειστή θήκη $\overline{Y}$ ενός γραμμικού υποχώρου Y του X είναι γραμμικός υπόχωρος του X.

3. Δείξτε ότι σε έναν χώρο με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$, για κάθε $x \in X$ και $r > 0$ ισχύουν

$$B(x,r) = \overline{D(x,r)}, \quad \mathrm{int}\,(B(x,r)) = D(x,r) \ \text{ και } \ \partial B(x,r) = \partial D(x,r) = S(x,r).$$

4. Έστω X γραμμικός χώρος, και $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ δύο νόρμες στον X. Δείξτε ότι $\|x\| \leqslant \|x\|'$ για κάθε $x \in X$, αν και μόνο αν $B_{(X,\|\cdot\|')} \subseteq B_{(X,\|\cdot\|)}$.

5. Θεωρούμε τον c_{00} σαν υπόχωρο του ℓ_∞. Έστω $y_n = (0,\dots,0,\frac{1}{n^2},0,\dots)$, $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η $\sum_n \|y_n\|$ συγκλίνει, αλλά η $\sum_n y_n$ δεν συγκλίνει στον Y. Τι συμπεραίνετε;

Ομάδα Β΄

6. (α) Δείξτε ότι, αν $1 \leqslant p < r \leqslant \infty$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\|x\|_r \leqslant \|x\|_p \leqslant n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}\|x\|_r.$$

Βρείτε διανύσματα x για τα οποία ισχύει ισότητα στις παραπάνω ανισότητες.

(β) Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε: αν $N < p < +\infty$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \leqslant (1+\varepsilon)\|x\|_\infty.$$

7. Έστω X χώρος με νόρμα, και Y ένας γραμμικός υπόχωρος του X. Δείξτε ότι αν $Y^\circ \neq \emptyset$, τότε $Y = X$.

8. Ο c_{00} περιέχεται σε κάθε ℓ_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Δείξτε ότι είναι πυκνός στον ℓ_p, $1 \leqslant p < +\infty$, όχι όμως στον ℓ_∞.

9. Θεωρούμε το $S = \{x \in \ell_\infty : \sum_{k=1}^\infty |x(k)| \leqslant 1\}$. Δείξτε ότι το S είναι κλειστό στον ℓ_1 (και στον ℓ_∞) ως προς την $\|x\| = \sup\{|x(k)| : k \in \mathbb{N}\}$ και έχει κενό εσωτερικό.

Δείξτε ότι ο ℓ_1 με νόρμα την $\|x\| = \sup\{|x(k)| : k \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι χώρος Banach.

10. Στον ℓ_1 ορίζουμε

$$\|x\|' = 2\left|\sum_{k=1}^\infty x(k)\right| + \sum_{k=2}^\infty \left(1 + \frac{1}{k}\right)|x(k)|.$$

Δείξτε ότι η $\|\cdot\|'$ είναι νόρμα. Είναι ισοδύναμη με την $\|x\| = \sum_{k=1}^\infty |x(k)|$; Είναι ο $(\ell_1, \|\cdot\|')$ χώρος Banach;

11. Έστω X n-διάστατος πραγματικός γραμμικός χώρος, και $x_1, \ldots, x_m$ διανύσματα που παράγουν τον X. Τότε, για κάθε $x \in X$ υπάρχουν $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ (όχι αναγκαστικά μοναδικά), τέτοια ώστε $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$. Ορίζουμε

$$\|x\| = \inf\left\{\sum_{i=1}^m |\lambda_i| : \lambda_i \in \mathbb{R}, x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\right\}.$$

Δείξτε ότι ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα.

12. Έστω $C^1[0,1]$ ο χώρος των συνεχώς παραγωγίσιμων $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, με νόρμα την

$$\|f\| = \max\left\{\max_{0\leqslant t\leqslant 1} |f(t)|, \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |f'(t)|\right\}.$$

Δείξτε ότι η $\|\cdot\|$ είναι όντως νόρμα, και ότι ο $(C^1[0,1], \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach. Γενικεύστε στο χώρο $C^k[0,1]$ των συναρτήσεων $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με συνεχή k−οστή παράγωγο.

13. Στον c_0 θεωρούμε την $\|x\|' = \sum_{k=1}^\infty \frac{|x(k)|}{2^k}$. Δείξτε ότι ο $(c_0, \|\cdot\|')$ είναι χώρος με νόρμα, αλλά δεν είναι χώρος Banach.

Ομάδα Γ΄

14. Έστω $B(x_n, r_n)$ μια φθίνουσα ακολουθία από κλειστές μπάλες σε έναν χώρο Banach X. Δείξτε ότι $\bigcap_{n=1}^\infty B(x_n, r_n) \neq \emptyset$. [*Υπόδειξη:* Δείξτε πρώτα ότι $\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant r_n - r_{n+1}$.]

15. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Η *κύμανση* της f ορίζεται από την

$$V(f) = \sup\left\{\sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| : \ n \in \mathbb{N}, \ 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1\right\}.$$

Αν $V(f) < \infty$, η συνάρτηση f καλείται *συνάρτηση φραγμένης κύμανσης*. Θεωρούμε το χώρο $BV[0,1]$ όλων των συναρτήσεων φραγμένης κύμανσης $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, οι οποίες είναι συνεχείς από δεξιά και ικανοποιούν την $f(0) = 0$. Δείξτε ότι η $\|f\| = V(f)$ είναι νόρμα στον $BV[0,1]$ και ότι ο $(BV[0,1], \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach.

16. Έστω $1 \leqslant p < \infty$ και K κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του ℓ_p. Αποδείξτε ότι το K είναι συμπαγές αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ και κάθε $x = (x(k)) \in K$ να ισχύει

$$\sum_{k=n}^\infty |x(k)|^p < \varepsilon.$$

17. Έστω $x = (x(n))_n \in \ell_\infty$. Αποδείξτε ότι η απόσταση του x από τον c_0 είναι

$$d(x, c_0) = \limsup_n |x(n)|.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Χώροι L_p

5.1 Χώροι L_p

Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω $1 \leqslant p < \infty$. Θεωρούμε την κλάση $\mathcal{L}_p(A)$ όλων των μετρήσιμων συναρτήσεων $f : A \to \mathbb{R}$ για τις οποίες

$$\int_A |f|^p < \infty.$$

Παρατηρήστε ότι η κλάση $\mathcal{L}_p(A)$ είναι γραμμικός χώρος. Για να δείξουμε ότι $f + g \in \mathcal{L}_p(A)$ αν $f, g \in \mathcal{L}_p(A)$, γράφουμε

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x)|^p &\leqslant (|f(x)| + |g(x)|)^p \leqslant [2\max\{|f(x)|, |g(x)|\}]^p \\ &= 2^p \max\{|f(x)|^p, |g(x)|^p\} \leqslant 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p), \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\int_A |f + g|^p \leqslant 2^p \left(\int_A |f|^p + \int_A |g|^p \right) < \infty.$$

Ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας στην $\mathcal{L}_p(A)$ θέτοντας $f \sim g$ αν $f = g$ σχεδόν παντού στο A. Το σύνολο $L_p(A)$ των κλάσεων ισοδυναμίας $[f]$, $f \in \mathcal{L}_p(A)$ γίνεται γραμμικός χώρος με πράξεις τις

$$[f] + [g] = [f + g] \text{ και } a[f] = [af].$$

Θα συνεχίσουμε να χρησιμοποιούμε το σύμβολο f για την κλάση $[f]$, εννοώντας ότι η $[f] \in L_p(A)$ αντιπροσωπεύεται από οποιαδήποτε συνάρτηση στοιχείο της. Αν λοιπόν $f \in L_p(A)$, ορίζουμε

$$\|f\|_p = \left(\int_A |f|^p \right)^{1/p}.$$

Παρατηρήστε ότι ο χώρος $L_1(A)$ είναι ο χώρος των Lebesgue ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f : A \to \mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι η $\| \cdot \|_p$ είναι νόρμα στον $L_p(A)$.

Θεώρημα 5.1.1. *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω $1 \leqslant p < +\infty$. Ο χώρος $(L_p(A), \| \cdot \|_p)$ είναι χώρος με νόρμα.*

Απόδειξη. Η ταύτιση συναρτήσεων που συμπίπτουν σχεδόν παντού στο A γίνεται για να ικανοποιείται η $\|f\|_p = 0 \Longrightarrow f = 0$. Πράγματι, αν $\int_A |f|^p = 0$ τότε $f = 0$ σχεδόν παντού, δηλαδή $[f] = [0]$. Η ιδιότητα

$$\|tf\|_p = |t|\,\|f\|_p, \qquad f \in L_p(A)$$

επαληθεύεται άμεσα. Η τριγωνική ανισότητα προκύπτει από την ανισότητα του Minkowski. Δίνουμε την απόδειξη και, παράλληλα, υπενθυμίζουμε κάποιες κλασικές ανισότητες.

Λήμμα 5.1.2 (ανισότητα του Young). *Αν $x, y \geqslant 0$ και $p, q > 1$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, τότε*

$$xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

με ισότητα μόνο αν $x^p = y^q$.

Απόδειξη. Η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln x$ είναι γνησίως κοίλη. Αν λοιπόν $a_1, \ldots, a_m > 0$ και $t_j \in (0, 1)$ με $t_1 + \cdots + t_m = 1$, τότε

$$\sum_{j=1}^{m} t_j \ln a_j \leqslant \ln(t_1 a_1 + \cdots + t_m a_m).$$

Έπεται ότι

$$a_1^{t_1} a_2^{t_2} \cdots a_m^{t_m} \leqslant t_1 a_1 + \cdots + t_m a_m \tag{5.1.1}$$

με ισότητα μόνο αν $a_1 = \cdots = a_m$. Η ανισότητα αυτή γενικεύει την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου. Αν $t_1 = \cdots = t_m = 1/m$, παίρνουμε

$$\sqrt[m]{a_1 \cdots a_m} \leqslant \frac{a_1 + \cdots + a_m}{m}.$$

Εφαρμόζουμε την ανισότητα (5.1.1) με $a = x^p$, $b = y^q$. Αφού $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, συμπεραίνουμε ότι

$$xy = a^{1/p} b^{1/q} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q} = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

με ισότητα μόνο αν $x^p = a = b = y^q$. □

Ορισμός 5.1.3 (συζυγείς εκθέτες). Αν $p, q > 1$ και $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, λέμε ότι οι p και q είναι *συζυγείς εκθέτες*. Συμφωνούμε ότι ο συζυγής εκθέτης του $p = 1$ είναι ο $q = \infty$.

Πρόταση 5.1.4 (ανισότητα Holder). *Έστω A μετρήσιμο σύνολο και έστω $f \in L_p(A)$ και $g \in L_q(A)$, όπου p, q συζυγείς εκθέτες. Τότε, $fg \in L_1(A)$ και*

$$\int_A |fg| \leqslant \left(\int_A |f|^p\right)^{1/p} \left(\int_A |g|^q\right)^{1/q},$$

δηλαδή

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι

$$\|f\|_p^p = \int_A |f|^p = 1 \text{ και } \|g\|_q^q = \int_A |g|^q = 1.$$

Από την ανισότητα του Young, για κάθε $x \in A$ ισχύει

$$|f(x)g(x)| \leqslant \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q.$$

Ολοκληρώνοντας στο A παίρνουμε

$$\int_A |fg| \leqslant \frac{1}{p}\int_A |f|^p + \frac{1}{q}\int_A |g|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|f\|_p\|g\|_q.$$

Στην γενική περίπτωση: μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|f\|_p \neq 0$ και $\|g\|_q \neq 0$ (αλλιώς $f \equiv 0$ ή $g \equiv 0$ και το αριστερό μέλος της ζητούμενης ανισότητας μηδενίζεται, οπότε δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε). Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f_1 = \frac{f}{\|f\|_p} \ \text{ και } \ g_1 = \frac{g}{\|g\|_q}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\int_A |f_1|^p = \frac{1}{\|f\|_p^p}\int_A |f|^p = 1 \ \text{ και } \ \int_A |g_1|^q\,dt = \frac{1}{\|g\|_q^q}\int_A |g|^q = 1.$$

Από την ειδική περίπτωση της ανισότητας που δείξαμε παραπάνω, έχουμε

$$\int_A |f_1g_1| \leqslant 1, \ \text{ δηλαδή, } \ \int_A |fg|\,dt \leqslant \|f\|_p\|g\|_q.$$

Πρόταση 5.1.5 (ανισότητα Minkowski). *Έστω A μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leqslant p < \infty$. Αν $f, g \in L_p(A)$, τότε*

$$\left(\int_A |f+g|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_A |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int_A |g|^p\right)^{1/p},$$

δηλαδή

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Απόδειξη. Η ανισότητα είναι απλή στην περίπτωση $p = 1$. Στη συνέχεια θεωρούμε την περίπτωση $1 < p < \infty$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|f+g\|_p > 0$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &= \int_A |f+g|^p = \int_A |f+g|^{p-1}|f+g| \\
&\leqslant \int_A |f+g|^{p-1}|f| + \int_A |f+g|^{p-1}|g| \\
&\leqslant \left(\int_A |f+g|^{(p-1)q}\right)^{1/q}\|f\|_p + \left(\int_A |f+g|^{(p-1)q}\right)^{1/q}\|g\|_p,
\end{aligned}$$

όπου, στο τελευταίο βήμα, εφαρμόσαμε την ανισότητα Holder για τα ζευγάρια $f+g, f$ και $f+g, g$. Παρατηρούμε ότι $(p-1)q = p$ (οι p και q είναι συζυγείς εκθέτες). Συνεπώς,

$$\left(\int_A |f+g|^{(p-1)q}\right)^{1/q} = \left(\int_A |f+g|^p\right)^{1/q} = \|f+g\|_p^{p/q}.$$

Έπεται ότι

$$\|f+g\|_p^p \leqslant \|f+g\|_p^{p/q}\,(\|f\|_p + \|g\|_p).$$

Χρησιμοποιώντας την $p - \frac{p}{q} = 1$ συμπεραίνουμε ότι

$$\|f+g\|_p = \frac{\|f+g\|_p^p}{\|f+g\|_p^{p/q}} \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

5.2 Πληρότητα του L_p

Σε αυτή την παράγραφο δείχνουμε ότι οι χώροι $L_p(A)$, $1 \leqslant p < \infty$ είναι χώροι Banach: ένας χώρος $(X, \|\cdot\|)$ με νόρμα λέγεται **χώρος Banach** αν κάθε βασική ακολουθία (x_n) του X είναι συγκλίνουσα, δηλαδή υπάρχει $x \in X$ ώστε $\|x_n - x\| \to 0$.

Θεώρημα 5.2.1 (θεώρημα Riesz-Fisher). *Έστω A μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leqslant p < \infty$. Ο $L_p(A)$ είναι χώρος Banach.*

Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε ένα γενικό κριτήριο. Δίνουμε πρώτα κάποιους ορισμούς.

Ορισμός 5.2.2. Έστω (x_n) ακολουθία σε έναν χώρο με νόρμα X. Λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει αν υπάρχει $x \in X$ ώστε

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} x_k \to x.$$

Λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως αν $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$.

Λήμμα 5.2.3. *Έστω X χώρος με νόρμα. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(α) *Ο X είναι πλήρης.*

(β) *Αν (x_n) είναι ακολουθία στον X με $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι ο X είναι πλήρης. Έστω (x_k) ακολουθία στον X, με την ιδιότητα $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$. Για τυχόν $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n > m \geqslant n_0$,

$$\|x_{m+1}\| + \cdots + \|x_n\| < \varepsilon.$$

Τότε, αν $n > m \geqslant n_0$,

$$\|s_n - s_m\| = \|x_{m+1} + \cdots + x_n\| \leqslant \|x_{m+1}\| + \cdots + \|x_n\| < \varepsilon.$$

Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα η (s_n) είναι βασική. Ο X είναι πλήρης, άρα η s_n συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$.

Αντίστροφα, έστω (x_n) βασική ακολουθία στον X. Για $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$, $n = 1, 2, \ldots$, μπορούμε να βρούμε $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$ ώστε, για κάθε $s > m \geqslant k_n$,

$$\|x_s - x_m\| < \frac{1}{2^n}.$$

Ειδικότερα,

$$k_{n+1} > k_n \geqslant k_n \Longrightarrow \|x_{k_{n+1}} - x_{k_n}\| < \frac{1}{2^n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_{k_{n+1}} - x_{k_n}\| < 1 < +\infty.$$

Η $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{k_{n+1}} - x_{k_n})$ συγκλίνει απολύτως, οπότε (από την υπόθεσή μας) συγκλίνει: υπάρχει $x \in X$ ώστε

$$\sum_{n=1}^{m}(x_{k_{n+1}} - x_{k_n}) \to x,$$

δηλαδή, $x_{k_{n+1}} - x_{k_1} \to x$. Επομένως, $x_{k_n} \to x + x_{k_1}$. Δείξαμε ότι η (x_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Είναι όμως και βασική ακολουθία, άρα συγκλίνει στον X. Έπεται ότι ο X είναι πλήρης. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.1. Έστω (f_k) ακολουθία στον $L_p(A)$ με την ιδιότητα $\sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\|_p = M < +\infty$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $g_n(x) = \sum_{k=1}^{n}|f_k(x)|$, $x \in A$. Τότε,

$$\|g_n\|_p \leqslant \sum_{k=1}^{n}\|f_k\|_p \leqslant M,$$

δηλαδή $g_n \in L_p(A)$ και $\int_A g_n^p d \leqslant M^p$. Η (g_n) είναι αύξουσα, άρα ορίζεται η $g(x) = \lim g_n(x) \in [0, \infty]$. Από το Λήμμα του Fatou,

$$\int_A g^p d \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_A g_n^p d \leqslant M^p.$$

Συνεπώς, η g^p είναι ολοκληρώσιμη. Έπεται ότι $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty}|f_k(x)| < +\infty$ σχεδόν παντού.

Ορίζουμε $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$. Από την $g(x) < +\infty$ έχουμε ότι η $s(x) = \lim s_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ συγκλίνει σχεδόν παντού. Η s είναι μετρήσιμη και από την $|s_n(x)| \leqslant g_n(x) \leqslant g(x)$ συμπεραίνουμε ότι $|s(x)| \leqslant g(x)$ σχεδόν παντού. Έπεται ότι

$$\int_A |s|^p \leqslant \int_A g^p d \leqslant M^p < \infty,$$

δηλαδή $s \in L_p(A)$. Τέλος, παρατηρούμε ότι

$$|s_n(x) - s(x)|^p \leqslant 2^p \max\{|s_n(x)|^p, |s(x)|^p\} \leqslant 2^p|g(x)|^p$$

σχεδόν παντού. Αφού $|s_n(x) - s(x)|^p \to 0$ σχεδόν παντού, χρησιμοποιώντας το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης βλέπουμε ότι

$$\int_A |s_n - s|^p \to 0.$$

Αυτό δείχνει ότι $\|s_n - s\|_p \to 0$. Από το Λήμμα 5.2.3 έπεται ότι ο $L_p(A)$ είναι χώρος Banach. □

5.3 Ασκήσεις

1. Έστω A μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leqslant p < \infty$. Αν $f \in L_p(A)$ δείξτε ότι: για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει

$$\lambda(\{|f| \geqslant \alpha\}) \leqslant \left(\frac{\|f\|_p}{\alpha}\right)^p.$$

2. Έστω A μετρήσιμο σύνολο με $0 < \lambda(A) < \infty$ και έστω $1 \leqslant p < \infty$. Αν $f : A \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, δείξτε ότι $f \in L_p(A)$ αν και μόνο αν

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p \lambda(\{n-1 \leqslant |f| < n\}) < \infty.$$

3. Έστω A μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leqslant p < \infty$. Αν $f_n, f \in L_p(A)$ και $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο A, δείξτε ότι

$$\|f_n - f\|_p \to 0 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \|f_n\|_p \to \|f\|_p.$$

4. Έστω A μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 < p < \infty$ και q ο συζυγής εκθέτης του p. Αν $f_n \to f$ στον $L_p(A)$ και $g_n \to g$ στον $L_q(A)$, δείξτε ότι $f_n g_n \to fg$ στον $L_1(A)$.

5. Έστω A μετρήσιμο σύνολο με $0 < \lambda(A) < \infty$ και έστω $1 \leqslant p < q < \infty$.

(α) Αν $f : A \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\|f\|_p \leqslant \|f\|_q [\lambda(A)]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

(β) Δείξτε ότι $L_q(A) \subseteq L_p(A)$.

(γ) Δείξτε ότι $L_q[0,1] \neq L_p[0,1]$.

6. Έστω A μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leqslant p < q < r < \infty$. Δείξτε ότι κάθε $f \in L_q(A)$ γράφεται στην μορφή $f = g + h$ για κάποιες $g \in L_p(A)$ και $h \in L_r(A)$.

Υπόδειξη. Θεωρήστε το $E = \{|f| > 1\}$ και τις $g = f\chi_E$, $h = f - g$.

7. Έστω A μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leqslant p < r < \infty$. Δείξτε ότι: αν $f \in L_p(A) \cap L_r(A)$ τότε $f \in L_q(A)$ για κάθε $p \leqslant q \leqslant r$.

8. Έστω A μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(A) = 1$ και έστω $f \in L_p(A)$ για κάποιον $p \geqslant 1$. Δείξτε ότι

$$\ln \|f\|_p \geqslant \int_A \ln |f|.$$

9. Έστω A μετρήσιμο σύνολο και έστω $c_1, \ldots, c_m > 0$ με $c_1 + \cdots + c_m = 1$. Δείξτε ότι: αν $f_1, \ldots, f_m : A \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις, τότε

$$\int_A \left(\prod_{i=1}^m |f_i|^{c_i} \right) \leqslant \prod_{i=1}^m \left(\int_A |f_i| \right)^{c_i}.$$

10. Έστω A μετρήσιμο σύνολο και έστω $p, q, r \geqslant 1$ με $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Δείξτε ότι: αν $f \in L_p(A)$ και $g \in L_q(A)$ τότε $fg \in L_r(A)$ και

$$\|fg\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

11. Έστω A μετρήσιμο σύνολο και έστω $p, q \geqslant 1$. Αν $\lambda \in (0,1)$ και $r = \lambda p + (1-\lambda)q$ δείξτε ότι για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\|f\|_r^r \leqslant \|f\|_p^{\lambda p} \|f\|_q^{(1-\lambda)q}.$$

12. Έστω A μετρήσιμο σύνολο, έστω $p \geqslant 1$ και έστω (f_n) ακολουθία στον $L_p(A)$ με $\|f_n\|_p \leqslant 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο A, δείξτε ότι $f \in L_p(A)$ και $\|f\|_p \leqslant 1$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Τελεστές και συναρτησοειδή

6.1 Φραγμένοι γραμμικοί τελεστές

Έστω X και Y δύο χώροι με νόρμα. *Γραμμικός τελεστής* από τον X στον Y είναι μια απεικόνιση $T : X \to Y$ που ικανοποιεί την

$$T(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda T(x_1) + \mu T(x_2) \tag{6.1.1}$$

για κάθε $x_1, x_2 \in X$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Για συντομία θα γράφουμε Tx_1, Tx_2 κλπ, αντί για $T(x_1), T(x_2)$.

Ο *πυρήνας* του T είναι το σύνολο $\mathrm{Ker}(T) = \{x \in X : Tx = 0\}$, και η *εικόνα* του T είναι το σύνολο $\mathrm{Im}(T) = \{y \in Y | \exists x \in X : Tx = y\} = \{Tx : x \in X\}$. Ο πυρήνας και η εικόνα ενός γραμμικού τελεστή $T : X \to Y$ είναι γραμμικοί υπόχωροι των X και Y αντίστοιχα.

Οι X και Y έχουν τοπολογία που επάγεται από τις νόρμες τους, μας ενδιαφέρει λοιπόν να δούμε πότε ένας γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$ είναι *συνεχής*. Ξεκινάμε με τον ορισμό του *φραγμένου* τελεστή:

Ορισμός 6.1.1. *Έστω X και Y χώροι με νόρμα.*

(i) Ένας γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$ λέγεται φραγμένος αν υπάρχει σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε

$$\|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X \tag{6.1.2}$$

για κάθε $x \in X$ (χωρίς κίνδυνο σύγχυσης, στο εξής θα γράφουμε απλώς $\|\cdot\|$ και για τις δύο νόρμες.)

(ii) Αν ο T είναι φραγμένος, ορίζουμε τη νόρμα $\|T\|$ του T ως τη μικρότερη σταθερά c για την οποία η (6.1.2) ισχύει για κάθε $x \in X$.

• Αυτό το min υπάρχει: θεωρούμε το σύνολο

$$C_T = \{c \geq 0 : \forall\ x \in X,\ \|Tx\| \leq c\|x\|\}.$$

Αν ο T είναι φραγμένος, αυτό το σύνολο είναι μη κενό και κάτω φραγμένο από το 0. Επομένως, ορίζεται το $\inf C_T$ και ισχύει $\inf C_T \in C_T$ γιατί το C_T είναι κλειστό (άσκηση). Επομένως, η

$$\|T\| = \min\{c \geq 0 : \forall x \in X, \ \ \|Tx\| \leq c\|x\|\} \tag{6.1.3}$$

ορίζεται καλά, και ικανοποιεί την

$$\|Tx\| \leq \|T\| \, \|x\|, \quad x \in X. \tag{6.1.4}$$

Ένας άλλος, εξίσου χρήσιμος, τρόπος ορισμού της νόρμας του T δίνεται από την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 6.1.2. *Έστω $T : X \to Y$ φραγμένος τελεστής. Τότε,*

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{x \in B_X} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|. \tag{6.1.5}$$

Απόδειξη. Αν $x \neq 0$, τότε το $y = x/\|x\|$ έχει νόρμα $\|y\| = 1$. Επομένως,

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \|Ty\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

Αφού το $x \neq 0$ ήταν τυχόν, και αφού $\{x : \|x\| = 1\} \subseteq B_X$,

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \leq \sup_{x \in B_X} \|Tx\|. \tag{1}$$

Από την άλλη πλευρά, αν $x \in B_X \setminus \{0\}$, τότε

$$\|Tx\| \leq \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|},$$

άρα

$$\sup_{x \in B_X} \|Tx\| \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}. \tag{2}$$

Από τις (1) και (2) έπεται ότι τα τρία sup της Πρότασης είναι ίσα.

Από τον ορισμό της νόρμας έχουμε $\|Tx\| \leq \|T\| \, \|x\| \leq \|T\|$ για κάθε $x \in B_X$, επομένως

$$\sup_{x \in B_X} \|Tx\| \leq \|T\|. \tag{3}$$

Τέλος, αφού η $\|T\|$ είναι η μικρότερη σταθερά για την οποία $\|Tx\| \leq c\|x\|$ για κάθε $x \in X$, και αφού

$$\|Tw\| \leq \left(\sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}\right) \|w\|$$

για κάθε $w \in X$, έχουμε

$$\|T\| \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}. \tag{4}$$

Η πρώτη ισότητα της Πρότασης έπεται τώρα από τις (3) και (4). □

Η επόμενη Πρόταση δικαιολογεί τον όρο «νόρμα τελεστή»:

Πρόταση 6.1.3. *Έστω $\mathcal{B}(X,Y)$ το σύνολο των φραγμένων τελεστών $T : X \to Y$. Το $\mathcal{B}(X,Y)$ είναι γραμμικός χώρος, και η $\|\cdot\| : \mathcal{B}(X,Y) \to \mathbb{R}$ με $T \to \|T\|$ είναι νόρμα.*

Απόδειξη. Αν $T, S : X \to Y$ φραγμένοι τελεστές και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε

(α) $\|(\lambda T)x\| = \|\lambda Tx\| = |\lambda|\,\|Tx\| \leq |\lambda|\,\|T\|\,\|x\|$, δηλαδή ο λT είναι φραγμένος και $\|\lambda T\| \leq |\lambda|\,\|T\|$. Επιπλέον,

$$\|\lambda T\| = \sup_{\|x\|=1} \|\lambda Tx\| = \sup_{\|x\|=1} |\lambda|\,\|Tx\| = |\lambda| \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = |\lambda|\,\|T\|.$$

Επομένως, ικανοποιείται το (N3).

(β) $\|(T+S)x\| = \|Tx + Sx\| \leq \|Tx\| + \|Sx\| \leq \|T\|\,\|x\| + \|S\|\,\|x\| = (\|T\| + \|S\|)\|x\|$, δηλαδή ο $T+S$ είναι φραγμένος, και

$$\|T+S\| \leq \|T\| + \|S\|.$$

Έπεται το (N4), και το ότι ο $B(X,Y)$ είναι γραμμικός χώρος (σε συνδυασμό με το προηγούμενο).

Τέλος $\|T\| \geq 0$ (προφανές), και αν $\|T\| = 0$, τότε $0 \leq \|Tx\| \leq \|T\|\,\|x\| = 0$ για κάθε $x \in X$, δηλαδή $\|Tx\| = 0 \Longrightarrow Tx = 0$ για κάθε $x \in X$. Επομένως, $\|T\| = 0 \Longrightarrow T \equiv 0$. □

Παραδείγματα 6.1.4. (α) Η *ταυτοτική απεικόνιση* $I : X \to X$ είναι φραγμένος τελεστής, και

$$\|I\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ix\| = \sup_{\|x\|=1} \|x\| = 1.$$

(β) Θεωρούμε το γραμμικό χώρο $P[0,1]$ των πολυωνύμων $p : [0,1] \to \mathbb{R}$, και ορίζουμε $T : P[0,1] \to P[0,1]$ με $Tp = p'$ (η παράγωγος πολυωνύμου είναι πολυώνυμο, άρα ο T ορίζεται καλά.)

Εύκολα ελέγχουμε ότι ο T είναι γραμμικός τελεστής:

$$T(\lambda p + \mu q) = (\lambda p + \mu q)' = \lambda p' + \mu q' = \lambda Tp + \mu Tq.$$

Όμως ο T δεν είναι φραγμένος: έστω $p_n(t) = t^n$. Στον $P[0,1]$ θεωρούμε ως συνήθως την $\|p\| = \max_{t\in[0,1]} |p(t)|$, άρα $\|p_n\| = 1$, $n \in \mathbb{N}$. Αλλά $p_n'(t) = nt^{n-1}$, άρα $\|p_n'\| = n$. Έπεται ότι

$$\sup_{\|p\|=1} \|Tp\| \geq \|Tp_n\| = \|p_n'\| = n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα ο T δεν είναι φραγμένος (γιατί;).

(γ) *Ολοκληρωτικοί τελεστές.* Θεωρούμε τον $C[0,1]$ με νόρμα την

$$\|f\| = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|,$$

και μια συνεχή συνάρτηση

$$K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}.$$

Ορίζουμε $T : C[0,1] \to C[0,1]$ με

$$(Tf)(t) = \int_0^1 K(t,s) f(s)\, ds. \tag{6.1.6}$$

Η K λέγεται *πυρήνας* του T. Πρέπει να δείξουμε ότι ο T είναι καλά ορισμένος, δηλαδή ότι η Tf είναι συνεχής: έχουμε

$$\begin{aligned} |(Tf)(t) - (Tf)(t')| &= \left|\int_0^1 \{K(t,s) - K(t',s)\} f(s) ds\right| \\ &\leq \int_0^1 |K(t,s) - K(t',s)|\, |f(s)| ds \\ &\leq \|f\| \int_0^1 |K(t,s) - K(t',s)| ds. \end{aligned}$$

Όμως, η K είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,1]\times[0,1]$, άρα αν μάς δώσουν $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος ώστε

$$|t - t'| < \delta \Longrightarrow \forall s,\ |K(t,s) - K(t',s)| < \varepsilon.$$

Επομένως,

$$|t - t'| < \delta \Longrightarrow |(Tf)(t) - (Tf)(t')| \leq \|f\|\varepsilon,$$

κι αυτό αποδεικνύει τη συνέχεια της Tf. Η γραμμικότητα του T ελέγχεται εύκολα. Για να δείξουμε ότι ο T είναι φραγμένος, παρατηρούμε ότι λόγω συνέχειας του πυρήνα K υπάρχει $M > 0$ με την ιδιότητα $|K(t,s)| \leq M$ για κάθε $(t,s) \in [0,1] \times [0,1]$, οπότε

$$\begin{aligned} |(Tf)(t)| &= \left|\int_0^1 K(t,s) f(s) ds\right| \leq \int_0^1 |K(t,s)||f(s)| ds \\ &\leq M\|f\| \int_0^1 ds = M\|f\| \end{aligned}$$

για κάθε $t \in [0,1]$, άρα $\|Tf\| \leq M\|f\|$.

Το Θεώρημα που ακολουθεί περιγράφει τους φραγμένους γραμμικούς τελεστές που ορίζονται σε χώρους με νόρμα πεπερασμένης διάστασης:

Θεώρημα 6.1.5. *Έστω X, Y χώροι με νόρμα,* $\dim X = n < \infty$*, και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Τότε, ο T είναι φραγμένος.*

Για την απόδειξη του Θεωρήματος χρειαζόμαστε το ακόλουθο Λήμμα, το οποίο είναι κεντρικό στη θεωρία των χώρων με νόρμα πεπερασμένης διάστασης: Με βάση αυτό, αποδεικνύεται εύκολα ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, κάθε χώρος με νόρμα διάστασης n είναι ισομορφικός με τόν $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$, οπότε όλοι οι χώροι με νόρμα διάστασης n είναι ισομορφικοί μεταξύ τους.

Λήμμα 6.1.6. *Έστω X χώρος με νόρμα, και έστω $x_1, \ldots, x_m$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στον X. Υπάρχει μια σταθερά $c > 0$ (που εξαρτάται από τη νόρμα και από τα $x_1, \ldots, x_m$), τέτοια ώστε για κάθε $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ να ισχύει*

$$c\,(|a_1| + \cdots + |a_m|) \leq \|a_1 x_1 + \cdots + a_m x_m\|.$$

Απόδειξη: Θα δείξουμε πρώτα ότι υπάρχει $c > 0$ τέτοιος ώστε

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^m |\beta_i| = 1 \Longrightarrow \|\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_m x_m\| \geq c.$$

Ας υποθέσουμε ότι αυτό δεν ισχύει. Τότε, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $\beta_1^{(k)}, \ldots, \beta_m^{(k)} \in \mathbb{R}$ με $\sum_{i=1}^m |\beta_i^{(k)}| = 1$ και

$$\|\beta_1^{(k)} x_1 + \cdots + \beta_m^{(k)} x_m\| < \frac{1}{k}.$$

Δηλαδή, αν θέσουμε $y^{(k)} = \sum_{i=1}^m \beta_i^{(k)} x_i$, έχουμε $\|y^{(k)}\| \to 0$.

Σκεφτόμαστε ως εξής: αφού για κάθε k ισχύει η $\sum_{i=1}^m |\beta_i^{(k)}| = 1$, ειδικότερα για κάθε k έχουμε $|\beta_1^{(k)}| \leq 1$. Άρα, υπάρχει υπακολουθία $(\beta_1^{(k_s)})$ της $(\beta_1^{(k)})$ που συγκλίνει σε κάποιον $\beta_1 \in \mathbb{R}$.

Κοιτάμε τώρα την $(\beta_2^{(k_s)})$: πάλι, $|\beta_2^{(k_s)}| \leq 1$, επομένως υπάρχει υπακολουθία $(\beta_2^{(k_{l_s})})$ της $(\beta_2^{(k_s)})$ με $\beta_2^{(k_{l_s})} \to \beta_2 \in \mathbb{R}$. Όμως τότε, $\beta_1^{(k_{l_s})} \to \beta_1$ (είναι υπακολουθία της $(\beta_1^{(k_s)})$.)

Κάνοντας m βήματα, βρίσκουμε $\beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{R}$ και $k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$ τέτοιους ώστε

$$\forall i = 1, \ldots, m, \qquad \beta_i^{(k_n)} \to \beta_i.$$

Ορίζουμε $y = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_m x_m$. Τότε,

$$\|y - y^{(k_n)}\| = \|\sum_{i=1}^m (\beta_i - \beta_i^{(k_n)}) x_i\| \leq \sum_{i=1}^m |\beta_i - \beta_i^{(k_n)}|\, \|x_i\| \to 0.$$

Άρα, $y^{(k_n)} \to y$ και αφού $\|y^{(k_n)}\| \to 0$,

$$\|y\| = \lim_{n\to\infty} \|y^{(k_n)}\| = 0,$$

δηλαδή, $y = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_m x_m = \vec{0}$. Τα $x_1, \ldots, x_m$ έχουν υποτεθεί γραμμικά ανεξάρτητα, άρα $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_m = 0$. Όμως,

$$\sum_{i=1}^m |\beta_i| = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^m |\beta_i^{(k_n)}| = \lim_{n\to\infty} 1 = 1,$$

το οποίο είναι άτοπο. Αυτό αποδεικνύει την $(*)$.

Έστω τώρα τυχόντες $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$. Αν $a_1 = \ldots = a_m = 0$, τότε

$$0 = \|a_1 x_1 + \cdots + a_m x_m\| \geq c \sum_{i=1}^m |a_i| = 0.$$

Αν $A = \sum_{i=1}^m |a_i| \neq 0$, ορίζουμε $\beta_i = a_i / A$. Τότε, $\sum_{i=1}^m |\beta_i| = 1$, οπότε η $(*)$ δίνει

$$\Big\|\frac{1}{A}(a_1 x_1 + \cdots + a_m x_m)\Big\| = \|\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_m x_m\| \geq c,$$

ή, ισοδύναμα,

$$\|a_1 x_1 + \cdots + a_m x_m\| \geq cA = c \sum_{i=1}^m |a_i|. \quad \square$$

Απόδειξη του Θεωρήματος: Έστω $\{e_1, \ldots, e_n\}$ μια βάση του X. Από το προηγούμενο Λήμμα, αν $x = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n \in X$, τότε

$$c \sum_{i=1}^n |a_i| \leq \|a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n\| = \|x\|,$$

όπου $c > 0$ σταθερά που εξαρτάται μόνο από τη νόρμα και τη βάση του X. Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\|Tx\| &= \Big\|T(\sum_{i=1}^n a_ie_i)\Big\| = \Big\|\sum_{i=1}^n a_iTe_i\Big\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |a_i|\,\|Te_i\| \leq \Big(\max_{1\leq i\leq n}\|Te_i\|\Big)\sum_{i=1}^n |a_i| \\ &\leq \frac{\max\|Te_i\|}{c}\|x\|.\end{aligned}$$

Άρα ο T είναι φραγμένος, με $\|T\| \leq (\max_i \|Te_i\|)/c$. □

Φυσιολογικά, ένας γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$ θα λέγεται *συνεχής* αν για κάθε $x_0 \in X$ και $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ τέτοιος ώστε

$$\|x - x_0\| < \delta \Longrightarrow \|Tx - Tx_0\| < \varepsilon.$$

Ισοδύναμα, αν: $x_n \to x$ στον $X \Longrightarrow Tx_n \to Tx$ στον Y. Θα δείξουμε ότι ένας γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$ είναι συνεχής αν και μόνο αν είναι φραγμένος.

Θεώρημα 6.1.7. *Έστω X, Y χώροι με νόρμα, και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής.*

(i) Ο T είναι συνεχής αν και μόνο αν είναι φραγμένος.

(ii) Αν ο T είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0, τότε είναι παντού συνεχής.

Απόδειξη. (i) Έστω ότι ο T είναι συνεχής. Τότε, είναι συνεχής στο 0. Παίρνοντας $\varepsilon = 1 > 0$, βρίσκουμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|x\| < \delta \Longrightarrow \|Tx\| < 1.$$

Όμως τότε, για κάθε $y \neq 0$ θεωρούμε το $\delta y/2\|y\|$ (που έχει νόρμα μικρότερη από δ), και γράφουμε

$$\left\|T\left(\frac{\delta y}{2\|y\|}\right)\right\| < 1 \Longrightarrow \|Ty\| < \frac{2}{\delta}\|y\|.$$

Έπεται ότι ο T είναι φραγμένος, και $\|T\| \leq \frac{2}{\delta}$.

Αντίστροφα: υποθέτουμε ότι ο T είναι φραγμένος, και θεωρούμε τυχόν $x_0 \in X$. Αν $x_n \to x_0$, τότε

$$\|Tx_n - Tx_0\| = \|T(x_n - x_0)\| \leq \|T\|\,\|x_n - x_0\| \to 0,$$

άρα $Tx_n \to Tx_0$. Δηλαδή, ο T είναι συνεχής.

(ii) Υποθέτουμε ότι ο T είναι συνεχής στο x_0. Έστω $y_0 \in X$ και $y_n \to y_0$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $Ty_n \to Ty_0$. Όμως, $y_n - y_0 + x_0 \to x_0$ (γιατί;), άρα

$$T(y_n - y_0 + x_0) = Ty_n - Ty_0 + Tx_0 \to Tx_0,$$

απ¨ όπου έπεται η $Ty_n \to Ty_0$.

□

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο με μερικές απλές παρατηρήσεις πάνω στους φραγμένους τελεστές:

(i) Αν ο $T : X \to Y$ είναι φραγμένος, τότε ο $\mathrm{Ker}T$ είναι *κλειστός* υπόχωρος του X.

(ii) Αν ο $T : X \to Y$ είναι φραγμένος, και X' είναι ένας υπόχωρος του X, τότε ο περιορισμός του T στον X' είναι φραγμένος τελεστής.

(iii) Έστω Y χώρος Banach, και $T_0 : X_0 \to Y$ φραγμένος τελεστής που ορίζεται σ¨ έναν πυκνό υπόχωρο X_0 του X. Τότε, ο T_0 επεκτείνεται κατά μοναδικό τρόπο σε φραγμένο τελεστή $T : X \to Y$ με $\|T\| = \|T_0\|$.

Η απόδειξη αυτών των ισχυρισμών αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

6.2 Γραμμικά συναρτησοειδή

Έστω X γραμμικός χώρος. *Συναρτησοειδές* είναι ένας γραμμικός τελεστής $F : X \to \mathbb{R}$. Αν ο X είναι χώρος με νόρμα, τότε το συναρτησοειδές F λέγεται *φραγμένο* αν είναι φραγμένος τελεστής από τον $(X, \|\cdot\|)$ στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Επομένως, ό,τι αποδείξαμε στην προηγούμενη παράγραφο μεταφέρεται αυτούσιο εδώ:

Θεώρημα 6.2.1. *Έστω X χώρος με νόρμα, και $F : X \to \mathbb{R}$ γραμμικό συναρτησοειδές. Το F είναι φραγμένο αν υπάρχει $c > 0$ τέτοιος ώστε, για κάθε $x \in X$,*

$$|F(x)| \leq c\|x\|.$$

Η νόρμα του F είναι η μικρότερη τέτοια σταθερά, και ισούται με

$$\|F\| = \sup_{\|x\|=1} |F(x)|. \quad \square$$

Παραδείγματα 6.2.2. (α) Η νόρμα του χώρου $X \neq \{0\}$, $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ *δεν* είναι γραμμικό συναρτησοειδές. Αν ήταν, θα είχαμε $\|x\| + \|-x\| = \|x + (-x)\|$, δηλαδή $2\|x\| = 0$ για κάθε $x \in X$.

(β) Θεωρούμε τον $X = \mathbb{R}^n$, και σταθεροποιούμε $a = (a_1, \dots, a_n) \in X \setminus \{0\}$. Ορίζουμε $F : X \to \mathbb{R}$, με

$$F(x) = F\Big(x(1), \dots, x(n)\Big) = a_1 x(1) + \cdots + a_n x(n). \tag{6.2.1}$$

Η F είναι γραμμικό συναρτησοειδές (το «εσωτερικό γινόμενο» με το a). Αν στον $\mathbb{R}^n$ θεωρήσουμε την Ευκλείδεια νόρμα $\|\cdot\|$, τότε από την ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνουμε

$$\begin{aligned} |F(x)| &= |a_1 x(1) + \cdots + a_n x(n)| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n |x(j)|^2\right)^{1/2} \\ &= \|a\|\,\|x\|. \end{aligned}$$

Δηλαδή, το F είναι φραγμένο συναρτησοειδές, και $\|F\| \leq \|a\|$. Επιπλέον,

$$|F(a)| = a_1^2 + \cdots + a_n^2 = \|a\|^2,$$

άρα

$$\|F\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|F(x)|}{\|x\|} \geq \frac{|F(a)|}{\|a\|} = \|a\|.$$

Δηλαδή, $\|F\| = \|a\|$.

(γ) Ορίζουμε $F : C[a,b] \to \mathbb{R}$ με $F(g) = \int_a^b g(t)dt$. Το F είναι γραμμικό συναρτησοειδές στον $C[a,b]$, και

$$|F(g)| \le \int_a^b |g(t)|dt \le \left(\max_{t\in[a,b]} |g(t)|\right)(b-a) = (b-a)\|g\|.$$

Επομένως, το F είναι φραγμένο και $\|F\| \le b-a$. Αν πάρουμε σαν g_0 τη σταθερή συνάρτηση $g_0(t) = 1$, τότε $\|g_0\| = 1$ και

$$\|F\| = \sup_{\|g\|=1} |F(g)| \ge |F(g_0)| = b-a.$$

Επομένως, $\|F\| = b-a$.

(δ) Θεωρούμε πάλι τον $X = C[a,b]$ με νόρμα την $\|g\| = \max_{t\in[a,b]} |g(t)|$, σταθεροποιούμε κάποιο $t_0 \in [a,b]$, και ορίζουμε $F : C[a,b] \to \mathbb{R}$ με $F(g) = g(t_0)$.

Η F είναι γραμμικό συναρτησοειδές, και $|F(g)| = |g(t_0)| \le \|g\|$. Επομένως, $\|F\| \le 1$. Παίρνοντας $g_0 \equiv 1$, ελέγχουμε ότι $\|F\| = 1$.

Ορισμός 6.2.3. Έστω X χώρος με νόρμα. Ο *δυϊκός χώρος* του X είναι ο γραμμικός χώρος X^* των φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών $F : X \to \mathbb{R}$. Δηλαδή,

$$X^* = \mathcal{B}(X, \mathbb{R}). \tag{6.2.2}$$

Ο X^* είναι μη κενός: η $F : X \to \mathbb{R}$ με $F(x) = 0$ για κάθε $x \in X$, είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές. Τα παραδείγματα που προηγήθηκαν δείχνουν ότι αν π.χ. $X = \mathbb{R}^n$ ή $C[a,b]$, τότε ο X^* είναι πολύ «πλουσιότερος» από το $\{0\}$. Στην πραγματικότητα, για κάθε χώρο X με νόρμα, ο X^* περιέχει πολλά μη τετριμμένα φραγμένα συναρτησοειδή. Αυτό όμως απαιτεί αρκετή δουλειά (Θεώρημα Hahn-Banach).

Ορισμός 6.2.4. Έστω X γραμμικός χώρος, και W γραμμικός υπόχωρος του X. Ορίζουμε το *χώρο πηλίκο* X/W σα γραμμικό χώρο ως εξής: ορίζουμε πρώτα μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στον X, θέτοντας

$$x \sim y \iff x - y \in W. \tag{6.2.3}$$

Τότε, ο X/W είναι ο χώρος των κλάσεων ισοδυναμίας $[x] = x + W$ με πράξεις τις $\lambda[x] = [\lambda x]$ και $[x] + [y] = [x+y]$. Παρατηρήστε ότι $[x] = 0$ αν και μόνο αν $x \in W$.

Λέμε ότι ο W έχει *συνδιάσταση* 1 στον X αν για το χώρο πηλίκο X/W έχουμε $\dim(X/W) = 1$. Αν ο W έχει συνδιάσταση 1 και $x_0 \in X$, τότε το $x_0 + W$ λέγεται *υπερεπίπεδο*.

Η Πρόταση που ακολουθεί, δίνει τη σχέση ανάμεσα σε υποχώρους συνδιάστασης 1 και γραμμικά συναρτησοειδή:

Πρόταση 6.2.5. *Έστω X γραμμικός χώρος, και W γραμμικός υπόχωρος του X. Ο W έχει συνδιάσταση 1 αν και μόνο αν υπάρχει μη μηδενικό γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{R}$ με $\mathrm{Ker} f = W$. Δύο γραμμικά συναρτησοειδή f, g έχουν τον ίδιο πυρήνα αν και μόνο αν υπάρχει $\beta \neq 0$ τέτοιο ώστε $g = \beta f$.*

Απόδειξη. Έστω $f : X \to \mathbb{R}$, $f \neq 0$ γραμμικό συναρτησοειδές. Ο πυρήνας $W = \mathrm{Ker} f$ του f είναι γραμμικός υπόχωρος του X, και η $\tilde{f} : X/W \to \mathbb{R}$ με $\tilde{f}(x+W) = f(x)$ είναι ισομορφισμός γραμμικών χώρων (γιατί;). Επομένως, $\dim(X/W) = 1$.

Αντίστροφα, αν ο W έχει συνδιάσταση 1 στον X, τότε υπάρχει ισομορφισμός $T : X/W \to \mathbb{R}$. Ορίζουμε $f : X \to \mathbb{R}$ με $f(x) = T(x + W)$. Το f είναι γραμμικό συναρτησοειδές, $f \neq 0$, και $\mathrm{Ker}f = W$.

Για το δεύτερο ισχυρισμό, αν $g = \beta f$, $\beta \neq 0$, τότε προφανώς $\mathrm{Ker}f = \mathrm{Ker}g$. Αντίστροφα, έστω $f, g : X \to \mathbb{R}$ γραμμικά συναρτησοειδή με $\mathrm{Ker}f = \mathrm{Ker}g$. Αν $f \equiv 0$, δεν έχουμε τίποτα να αποδείξουμε. Έστω λοιπόν $x_0 \in X$ με $f(x_0) = 1$ (υπάρχει, γιατί;). Έπεται ότι $g(x_0) \neq 0$. Τότε, για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$x - f(x)x_0 \in \mathrm{Ker}f \Longrightarrow g(x - f(x)x_0) = 0 \Longrightarrow g(x) = g(x_0)f(x).$$

Δηλαδή, $g = \beta f$, με $\beta = g(x_0)$. □

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε και μια νόρμα $\|\cdot\|$ στον X.

Πρόταση 6.2.6. *Έστω X χώρος με νόρμα, και έστω W υπόχωρος του X συνδιάστασης 1. Τότε, ένα από τα δύο συμβαίνει: Είτε ο W είναι κλειστός στον X ή ο W είναι πυκνός στον X.*

Απόδειξη. Ο $\overline{W}$ είναι κι αυτός γραμμικός υπόχωρος του X. Αν ο W δεν είναι κλειστός, τότε υπάρχει $x \in \overline{W} \setminus W$, και αφού ο W έχει συνδιάσταση 1 έχουμε $[z] \in \mathrm{span}([x])$ (δηλαδή $z = \lambda x + w$ για κάποια $\lambda \in \mathbb{R}$ και $w \in W$) για κάθε $z \in X$ (γιατί;), άρα $\overline{W} = X$. □

Παρατήρηση: Οι κλειστοί γραμμικοί υπόχωροι συνδιάστασης 1 είναι ακριβώς οι πυρήνες των φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών: αν $f : X \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές, τότε από τη συνέχεια του f είναι φανερό ότι ο $W = \mathrm{Ker}f = f^{-1}\{0\}$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του X, και από την Πρόταση 6.2.5 ο W έχει συνδιάσταση 1. Ο αντίστροφος ισχυρισμός είναι συνέπεια του Θεωρήματος Hahn-Banach, το οποίο δεν θα δούμε σε αυτό το μάθημα.

6.3 Χώροι τελεστών και δυϊκοί χώροι

Έστω X, Y δύο χώροι με νόρμα. Στην Παράγραφο 6.1 είδαμε ότι ο χώρος $\mathcal{B}(X, Y)$ των φραγμένων γραμμικών τελεστών $T : X \to Y$ είναι γραμμικός χώρος με νόρμα, όπου

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|, \qquad T \in \mathcal{B}(X, Y).$$

Το Θεώρημα που ακολουθεί απαντά στο ερώτημα: πότε ο $\mathcal{B}(X, Y)$ είναι πλήρης;

Θεώρημα 6.3.1. *Έστω X και Y χώροι με νόρμα. Αν ο Y είναι χώρος Banach, τότε ο $\mathcal{B}(X, Y)$ είναι χώρος Banach.*

Απόδειξη. Έστω (T_n) ακολουθία Cauchy στον $\mathcal{B}(X, Y)$, και έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε, αν $n, m \geq n_0$ τότε

$$(*) \qquad \|T_n - T_m\| < \varepsilon.$$

Σταθεροποιούμε $x \in X$. Αν $n, m \geq n_0$, τότε

$$\|T_n x - T_m x\| = \|(T_n - T_m)x\| \leq \|T_n - T_m\| \, \|x\| \leq \varepsilon\|x\|.$$

Αυτό σημαίνει ότι η $(T_n x)$ είναι ακολουθία Cauchy στον Y (γιατί;), και αφού ο Y είναι πλήρης, υπάρχει $y_x \in Y$ τέτοιο ώστε $T_m x \to y_x$ καθώς $m \to \infty$.

Ορίζουμε $T : X \to Y$ με

$$Tx = y_x = \lim_{m\to\infty} T_m x.$$

Ο T είναι γραμμικός τελεστής: αν $x_1, x_2 \in X$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, τότε

$$\begin{aligned} T(\lambda x_1 + \mu x_2) &= \lim_{m\to\infty} T_m(\lambda x_1 + \mu x_2) \\ &= \lim_{m\to\infty} (\lambda T_m x_1 + \mu T_m x_2) \\ &= \lambda \lim_{m\to\infty} T_m x_1 + \mu \lim_{m\to\infty} T_m x_2 \\ &= \lambda T x_1 + \mu T x_2. \end{aligned}$$

Επιστρέφουμε στην $(*)$. Έστω $x \in X$ με $\|x\| = 1$. Αν $n, m \geq n_0$, τότε

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \varepsilon \|x\| = \varepsilon,$$

και αφήνοντας το m να πάει στο άπειρο, παίρνουμε

$$\|T_n x - Tx\| \leq \varepsilon, \quad \|x\| = 1,$$

δηλαδή,

$$(**) \qquad \|T_n - T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_n x - Tx\| \leq \varepsilon.$$

Αυτό δείχνει δύο πράγματα: (α) για κάθε $n \geq n_0$, $T_n - T \in \mathcal{B}(X, Y)$, και αφού ο $\mathcal{B}(X, Y)$ είναι γραμμικός χώρος και $T_n \in \mathcal{B}(X, Y)$,

$$T = T_n - (T_n - T) \in B(X, Y).$$

(β) Από την $(**)$, για κάθε $n \geq n_0(\varepsilon)$ έχουμε $\|T_n - T\| \leq \varepsilon$. Επομένως, $T_n \to T$ στον $\mathcal{B}(X, Y)$. □

Πόρισμα 6.3.2. *Αν ο X είναι χώρος με νόρμα, τότε ο X^* με νόρμα την $\|F\| = \sup_{\|x\|=1} |F(x)|$ είναι χώρος Banach.*

Απόδειξη. Ο X^* είναι ο $B(X, \mathbb{R})$. Ο $\mathbb{R}$ είναι πλήρης ως προς την $|\cdot|$, οπότε το ζητούμενο προκύπτει αμέσως από το Θεώρημα 6.3.1. □

Ορισμός 6.3.3. (i) Ο $T : X \to Y$ λέγεται *ισομορφισμός* αν είναι γραμμικός, ένα προς ένα και επί τελεστής, και οι $T : X \to Y$, $T^{-1} : Y \to X$ είναι φραγμένοι τελεστές.

(ii) Ο $T : X \to Y$ λέγεται *ισομετρικός ισομορφισμός* αν είναι ισομορφισμός και, επιπλέον, για κάθε $x \in X$ ισχύει $\|Tx\| = \|x\|$.

Παρατηρήσεις. (α) Ο T είναι ένα προς ένα αν και μόνο αν $\mathrm{Ker}T = \{0\}$.

(β) Αν ο $T : X \to Y$ είναι γραμμικός, ένα προς ένα και επί, και $\|Tx\| = \|x\|$, $x \in X$, τότε ο T είναι ισομετρικός ισομορφισμός.

Δύο χώροι X και Y με νόρμα λέγονται *ισομετρικά ισομορφικοί* αν υπάρχει ισομετρικός ισομορφισμός $T : X \to Y$. Από τη σκοπιά της Συναρτησιακής Ανάλυσης, δύο τέτοιοι χώροι *ταυτίζονται*: έχουν την ίδια γραμμική και τοπολογική δομή, αφού τα σημεία τους βρίσκονται σε ένα προς ένα αντιστοιχία που διατηρεί τις αποστάσεις και τη γραμμική δομή του χώρου. Για δύο τέτοιους χώρους θα γράφουμε $X \simeq Y$.

Με τη βοήθεια της έννοιας του ισομετρικού ισομορφισμού μπορούμε να δώσουμε πολύ συγκεκριμένη περιγραφή του δυϊκού χώρου για αρκετά κλασικά παραδείγματα χώρων Banach:

Θεώρημα 6.3.4. *Θεωρούμε τον $\mathbb{R}^n$ με την Ευκλείδεια νόρμα. Ο δυϊκός του χώρος είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον $\mathbb{R}^n$. Γράφουμε $(\mathbb{R}^n)^* \simeq \mathbb{R}^n$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε $T : (\mathbb{R}^n)^* \to \mathbb{R}^n$ ως εξής: απεικονίζουμε το $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ στην n-άδα $(f(e_1), \dots, f(e_n)) \in \mathbb{R}^n$, όπου $\{e_1, \dots, e_n\}$ η συνήθης ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$.

Παρατηρήστε ότι το f προσδιορίζεται πλήρως από το διάνυσμα $Tf = (f(e_i))_{i\leq n}$: αν $x = (x(j)) \in \mathbb{R}^n$, τότε $x = \sum_{i=1}^n x(j)e_i \implies f(x) = \sum_{i=1}^n x(i)f(e_i)$, δηλαδή ξέρουμε το $f(x)$ αν μάς δώσουν τις συντεταγμένες του x.

Δείχνουμε πρώτα ότι ο T είναι γραμμικός, ένα προς ένα και επί:
(α) Για τη γραμμικότητα,

$$\begin{aligned} T(\lambda f + \mu g) &= ((\lambda f + \mu g)(e_1), \dots, (\lambda f + \mu g)(e_n)) \\ &= (\lambda f(e_1) + \mu g(e_1), \dots, \lambda f(e_n) + \mu g(e_n)) \\ &= \lambda(f(e_1), \dots, f(e_n)) + \mu(g(e_1), \dots, g(e_n)) \\ &= \lambda Tf + \mu Tg. \end{aligned}$$

(β) Για το ένα προς ένα,

$$\begin{aligned} Tf = \vec{0} &\implies \forall\ i = 1, \dots, n, \quad f(e_i) = 0 \\ &\implies \forall\ x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \sum_{i=1}^n x(i)f(e_i) = 0 \\ &\implies f \equiv 0. \end{aligned}$$

(γ) Αν $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, ορίζουμε $f(x) = \sum_{i=1}^n x(i)a_i$. Τότε, $f \in (\mathbb{R}^n)^*$ και $f(e_i) = a_i$, $i = 1, \dots, n$. Επομένως, $Tf = a$. Αυτό δείχνει ότι ο T είναι επί.

Μένει να δείξουμε ότι ο T είναι ισομετρικός ισομορφισμός. Έστω $f \in (\mathbb{R}^n)^*$. Τότε, $f(x) = \sum_{i=1}^n x(i)f(e_i)$, και έχουμε δεί (Παράδειγμα 6.2.2.β) ότι ένα συναρτησοειδές αυτής της μορφής έχει νόρμα

$$\|f\| = \|(f(e_1), \dots, f(e_n))\| = \|Tf\|.$$

□

Θεώρημα 6.3.5. *Ο $(\ell_1)^*$ είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον ℓ_∞.*

Απόδειξη. Ορίζουμε $T : \ell_1^* \to \ell_\infty$ ως εξής: Έστω $e_k = (\delta_{kn})$ και $f : \ell_1 \to \mathbb{R}$ φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές. Ελέγξτε τους παρακάτω ισχυρισμούς:

(i) Η (e_k) είναι βάση Schauder του ℓ_1, δηλαδή, κάθε $x = (x(k)) \in \ell_1$ γράφεται (μονοσήμαντα) στη μορφή $x = \sum_{k=1}^\infty x(k)e_k$.

(ii) Το f είναι συνεχές, άρα $f(x) = \sum_{k=1}^\infty x(k)f(e_k)$, $x \in X$.

Ορίζουμε $T(f) = (f(e_1), \dots, f(e_k), \dots)$. Θα δείξουμε ότι ο T είναι ισομετρικός ισομορφισμός.

(α) *Ο T είναι καλά ορισμένος.* Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $|f(e_k)| \leq \|f\|\,\|e_k\| = \|f\|$ (γιατί $\|e_k\| = 1$.) Επομένως,

$$(*) \qquad \|Tf\|_\infty \leq \|f\|.$$

Ειδικότερα, $Tf \in \ell_\infty$.

(β) Αν $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^\infty |x(k)| = 1$, τότε

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left|\sum_{k=1}^\infty x(k)f(e_k)\right| \leq \sum_{k=1}^\infty |x(k)|\,|f(e_k)| \\ &\leq \left(\sup_k |f(e_k)|\right)\sum_{k=1}^\infty |x(k)| = \|Tf\|_\infty. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$(**) \qquad \|f\| = \sup_{\|x\|_1=1} |f(x)| \leq \|Tf\|_\infty.$$

Από τις $(*)$ και $(**)$, για κάθε $f \in \ell_1^*$ ισχύει $\|Tf\|_\infty = \|f\|$ (δηλαδή, ο T είναι ισομετρία.)

(γ) Η γραμμικότητα του T ελέγχεται εύκολα.

(δ) Αν $Tf = 0$, τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $f(e_k) = 0$. Επομένως, για κάθε $x \in \ell_1$,

$$f(x) = \sum_{k=1}^\infty x(k)f(e_k) = 0 \Longrightarrow f \equiv 0.$$

Αφού $\mathrm{Ker}T = \{0\}$, ο T είναι ένα προς ένα.

(ε) Έστω $a = (a_1, \dots, a_k, \dots) \in \ell_\infty$ (υπάρχει λοιπόν $M > 0$ τέτοιος ώστε $|a_k| \leq M$, $k \in \mathbb{N}$.) Ορίζουμε $f(x) = \sum_{k=1}^\infty x(k)a_k$. Τότε,

$$|f(x)| \leq \sum_{k=1}^\infty |x(k)|\,|a_k| \leq (\sup_k |a_k|)\sum_{k=1}^\infty |x(k)| \leq M\|x\|_1.$$

Επομένως, $f \in \ell_1^*$, και αφού $f(e_k) = a_k$, $Tf = a$. Δηλαδή ο T είναι επί. □

Θεώρημα 6.3.6. *Αν $1 < p < +\infty$, τότε ο ℓ_p^* είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον ℓ_q, όπου q ο συζυγής εκθέτης του p.*

Απόδειξη. Η (e_k) είναι βάση Schauder του ℓ_p (ελέγξτε το). Κάθε $x = (x(k)) \in \ell_p$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $x = \sum_k x(k)e_k$, και αν $f : \ell_p \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές, τότε $f(x) = \sum_k x(k)f(e_k)$.

Ορίζουμε $T : \ell_p^* \to \ell_q$ με $Tf = (f(e_1), \dots, f(e_k), \dots)$.

(α) *Ο T είναι καλά ορισμένος:* Πρέπει να δείξουμε ότι, για κάθε $f \in \ell_p^*$ ισχύει $\sum_k |f(e_k)|^q < +\infty$. Έστω

$N \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε $\gamma_k = |f(e_k)|^q / f(e_k)$ αν $f(e_k) \neq 0$, και $\gamma_k = 0$ αλλιώς. Τότε,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N} |f(e_k)|^q &= \sum_{k=1}^{N} \gamma_k f(e_k) = f\left(\sum_{k=1}^{N} \gamma_k e_k\right) \\ &\leq \|f\| \left(\sum_{k=1}^{N} |\gamma_k|^p\right)^{1/p} \\ &= \|f\| \left(\sum_{k=1}^{N} |f(e_k)|^{(q-1)p}\right)^{1/p} \\ &= \|f\| \left(\sum_{k=1}^{N} |f(e_k)|^q\right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\left(\sum_{k=1}^{N} |f(e_k)|^q\right)^{1-\frac{1}{p}} \leq \|f\| \Longrightarrow \left(\sum_{k=1}^{N} |f(e_k)|^q\right)^{1/q} \leq \|f\|,$$

και αφήνοντας το $N \to \infty$, παίρνουμε

$$(*) \qquad \|Tf\|_q = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f(e_k)|^q\right)^{1/q} \leq \|f\|,$$

το οποίο βέβαια δείχνει και ότι $Tf \in \ell_q$.

(β) Αν $f \in \ell_p^*$, χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Holder βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \Big|\sum_{k=1}^{\infty} x(k) f(e_k)\Big| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|\, |f(e_k)| \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f(e_k)|^q\right)^{1/q} \\ &= \|x\|_p\, \|Tf\|_q. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$(**) \qquad \|f\| = \sup_{\|x\|_p = 1} |f(x)| \leq \|Tf\|_q.$$

Από τις $(*)$ και $(**)$ βλέπουμε ότι ο T είναι ισομετρία: για κάθε $f \in \ell_p^*$, $\|Tf\| = \|f\|$.

(γ) Εύκολα ελέγχουμε ότι ο T είναι γραμμικός και ένα προς ένα τελεστής.

(δ) Έστω $a = (a_1, \ldots, a_k, \ldots) \in \ell_q$. Δηλαδή, $\sum_k |a_k|^q < +\infty$. Ορίζουμε $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k) a_k$. Τότε,

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|\, |a_k| \\ &\leq \left(\sum_{k} |a_k|^q\right)^{1/q} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p\right)^{1/p} \\ &= \|a\|_q\, \|x\|_p. \end{aligned}$$

Επομένως, $f \in \ell_p^*$, και αφού $f(e_k) = a_k$, $Tf = a$. Δηλαδή ο T είναι επί. □

Θεώρημα 6.3.7. *Θεωρούμε τον c_0 με τη supremum νόρμα $\|\cdot\|_\infty$. Ο δυϊκός του χώρος $(c_0)^*$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ_1.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι όμοια με αυτή των προηγούμενων θεωρημάτων και αφήνεται ως άσκηση. □

6.4 Ασκήσεις

Ομάδα Α΄

1. Ορίζουμε $T : \ell_2 \to \ell_2$ τον τελεστή της αριστερής μετατόπισης ως εξής: αν $x = (x(1), x(2), \ldots, x(k), \ldots)$, θέτουμε $Tx = (x(2), x(3), \ldots)$.

(α) Δείξτε ότι ο T ορίζεται καλά, και είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής.

(β) Ορίζουμε $T_n = T \circ T \circ \cdots \circ T$ (n φορές). Βρείτε την $\|T_n\|$, $n \in \mathbb{N}$, και το $\lim_n \|T_n\|$.

(γ) Αν $x \in \ell_2$, βρείτε το $\lim_n \|T_n x\|$.

2. Ορίζουμε $F : \ell_1 \to \mathbb{R}$ με $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)$. Δείξτε ότι το F είναι γραμμικό συναρτησοειδές. Είναι φραγμένο; Αν ναι, ποιά είναι η νόρμα του;

3. Έστω $T : C[0,1] \to C[0,1]$, με $(Tf)(t) = \int_0^t f(s)ds$, $t \in [0,1]$.

(α) Δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος, γραμμικός και ένα προς ένα τελεστής.

(β) Βρείτε την εικόνα $\mathrm{Im}(T)$ του T.

(γ) Είναι ο $T^{-1} : \mathrm{Im}(T) \to C[0,1]$ φραγμένος;

(δ) Βρείτε την $\|T\|$.

4. Στον $C[-1,1]$ ορίζουμε $\|f\| = \max_{-1\leq t\leq 1} |f(t)|$. Υπολογίστε τις νόρμες των παρακάτω συναρτησοειδών $F : C[-1,1] \to \mathbb{R}$:

(α) $F(g) = \int_{-1}^{1} g(s)ds - g(0)$.

(β) $F(g) = \frac{g(1/2)+g(-1/2)-2g(0)}{2}$.

5. Έστω X ο χώρος όλων των φραγμένων συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με νόρμα την $\|f\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$. Ορίζουμε $T : X \to X$, με $(Tf)(t) = f(t-a)$, όπου $a > 0$ δοσμένη σταθερά. Είναι ο T γραμμικός; Φραγμένος;

6. Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ ένας τελεστής που ικανοποιεί την ανισότητα $\|Tx\| \geq m\|x\|$ για κάθε $x \in X$, όπου $m > 0$ μια σταθερά. Να δείξετε ότι ορίζεται ο $T^{-1} : T(X) \to X$ και είναι φραγμένος. Τι μπορείτε να πείτε για τη νόρμα του;

7. Έστω X, Y χώροι με νόρμα, και $T : X \to Y$ ένα προς ένα, φραγμένος γραμμικός τελεστής. Δείξτε ότι ο T είναι ισομετρικός ισομορφισμός αν και μόνο αν $T(B_X) = B_Y$.

Ομάδα Β΄

8. Ορίζουμε $T, S : C[0,1] \to C[0,1]$ με

$$(Tf)(t) = t \int_0^1 f(s)ds \quad , \quad (Sf)(t) = tf(t).$$

(α) Δείξτε ότι οι T, S είναι φραγμένοι γραμμικοί τελεστές.

(β) Βρείτε τους $T \circ S$ και $S \circ T$. Είναι σωστό ότι $T \circ S = S \circ T$;

(γ) Υπολογίστε τις $\|T\|$, $\|S\|$, $\|T \circ S\|$ και $\|S \circ T\|$.

9. Θεωρούμε το τρίγωνο $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, a \le y \le x\}$, και μια συνεχή συνάρτηση $\varphi : \Delta \to \mathbb{R}$. Ορίζουμε $T : C[a,b] \to C[a,b]$ με

$$(Tf)(x) = \int_a^x \varphi(x,y)f(y)dy.$$

Δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, και

$$\|T\| \le (b-a)\max\{|\varphi(x,y)| : (x,y) \in \Delta\}.$$

10. Θεωρούμε το χώρο $C^1[0,1]$ των συνεχώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[0,1]$. Στον $C^1[0,1]$ θεωρούμε τις νόρμες

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f|^2\right)^{1/2} \quad , \quad \|f\|_{1,2} = \left(\int_0^1 |f'|^2\right)^{1/2} + |f(0)|.$$

Δείξτε ότι ο ταυτοτικός τελεστής $I : (C^1[0,1], \|\cdot\|_{1,2}) \to (C^1[0,1], \|\cdot\|_2)$ είναι φραγμένος. [*Υπόδειξη:* Περιοριστείτε πρώτα στον χώρο $\{f \in C^1[0,1] : f(0) = 0\}$, και εφαρμόστε την ανισότητα Cauchy-Schwarz.]

11. Έστω X, Y χώροι με νόρμα, $T_n, T \in \mathcal{B}(X,Y)$ και $x_n, x \in X$. Δείξτε ότι, αν $T_n \to T$ και $x_n \to x$, τότε $T_n x_n \to Tx$.

12. Έστω $F : X \to \mathbb{R}$ μη μηδενικό γραμμικό συναρτησοειδές. Δείξτε ότι το F είναι φραγμένο αν και μόνο αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $F(B(0,\delta)) \neq \mathbb{R}$.

13. Έστω X χώρος με νόρμα, και $F \in X^*$, $F \neq 0$. Δείξτε ότι

$$\|F\| = \frac{1}{\inf\{\|x\| : F(x) = 1\}}.$$

14. Έστω $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής με την εξής ιδιότητα: αν $x_n \to 0$ στον X, τότε η $\{\|Tx_n\|\}$ είναι φραγμένη. Δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος.

15. Έστω X χώρος με νόρμα και $\emptyset \neq M \subseteq X$. Ο *μηδενιστής* $\mathrm{Ann}(M)$ του M ορίζεται να είναι το σύνολο όλων των φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών του X που μηδενίζονται στο M. Έτσι ισχύει $\mathrm{Ann}(M) \subseteq X^*$. Αποδείξτε ότι ο $\mathrm{Ann}(M)$ είναι κλειστός διανυσματικός υπόχωρος του X^*. Ποιοί είναι οι $\mathrm{Ann}(0)$ και $\mathrm{Ann}(X)$;

16. Έστω X χώρος με νόρμα και $M^* \subseteq X^*$. Ορίζουμε

$$N(M^*) = \{x \in X : \forall F \in M^*, \quad F(x) = 0\}.$$

Δείξτε ότι το $N(M^*)$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του X.

Ομάδα Γ΄

17. Έστω X απειροδιάστατος χώρος με νόρμα. Δείξτε ότι υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές $F : X \to \mathbb{R}$ που δεν είναι φραγμένο.

18. Αποδείξτε το Θεώρημα 6.3.7.

19. Ορίστε μια νόρμα $\|\cdot\|$ στον c_{00} με την εξής ιδιότητα: η $\|\cdot\|$ δεν είναι ισοδύναμη με την $\|\cdot\|_\infty$ αλλά οι χώροι $(c_{00}, \|\cdot\|)$ και $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ είναι ισομετρικά ισόμορφοι. [*Υπόδειξη:* Αν $T : c_{00} \to c_{00}$ ένας γραμμικός ισομορφισμός, τότε η $\|x\| = \|Tx\|_\infty$ είναι νόρμα στον c_{00}.]

20. (Κριτήριο του Schur) Έστω $(a_{ij})_{i,j=1}^\infty$ ένας άπειρος πίνακας με $a_{ij} \ge 0$ για κάθε i, j. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $b, c > 0$ και $p_i > 0$ ώστε για κάθε i, j να ισχύουν οι

$$\sum_{i=1}^\infty a_{ij}p_i \le bp_j \quad \text{και} \quad \sum_{j=1}^\infty a_{ij}p_j \le cp_i.$$

Δείξτε ότι ο τελεστής $T : \ell_2 \to \ell_2$ που ορίζεται από τη σχέση

$$T\left((x(i))_i\right) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x(j)\right)_i$$

είναι φραγμένος και $\|T\| \leq \sqrt{bc}$.

21. (Ανισότητα του Hilbert) Αν $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, τότε

$$\left|\sum_{i,j=0}^{n} \frac{x_i x_j}{i+j+1}\right| \leq \pi \sum_{i=0}^{n} x_i^2.$$

[*Υπόδειξη:* Ίσως σας χρησιμεύσει το κριτήριο του Schur και η ανισότητα

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+\frac{1}{2}+j+\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{i+\frac{1}{2}}} < \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+j+\frac{1}{2})\sqrt{x}} = \frac{\pi}{\sqrt{j+\frac{1}{2}}}.]$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Χώροι Hilbert

7.1 Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Ορισμός 7.1.1. Έστω X γραμμικός χώρος. Μια συνάρτηση $\langle\cdot,\cdot\rangle : X\times X \to \mathbb{R}$ λέγεται *εσωτερικό γινόμενο* αν ικανοποιεί τα εξής:

(i) $\langle x, x\rangle \geq 0$, για κάθε $x \in X$.

(ii) $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$.

(iii) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$, για κάθε $x, y \in X$.

(iv) $\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y\rangle = \lambda_1\langle x_1, y\rangle + \lambda_2\langle x_2, y\rangle$, για κάθε $x_1, x_2, y \in X$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Από τις (iii)-(iv) έπεται ότι $\langle x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2\rangle = \lambda_1\langle x, y_1\rangle + \lambda_2\langle x, y_2\rangle$ για κάθε $y_1, y_2, x \in X$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Επίσης, $x = \vec{0} \Leftrightarrow \langle x, y\rangle = 0$ για κάθε $y \in X$.

Παραδείγματα 7.1.2. (α) Στον $\mathbb{R}^N$, αν $x = (x(k))$, $y = (\eta_k)$, ορίζουμε

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{N} x(k)\eta_k. \tag{7.1.1}$$

(β) Στον ℓ_2, αν $x = (x(k))$, $y = (\eta_k)$, ορίζουμε

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)\eta_k. \tag{7.1.2}$$

(Η σειρά $\sum_k x(k)\eta_k$ συγκλίνει απολύτως, από την ανισότητα Cauchy-Schwarz και από το γεγονός ότι $\sum_k x(k)^2 < +\infty$, $\sum_k \eta_k^2 < +\infty$.)

(γ) Στον $C[a, b]$, αν $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, ορίζουμε

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt. \tag{7.1.3}$$

Οι ιδιότητες (i)-(iv) του εσωτερικού γινομένου επαληθεύονται εύκολα και στα τρία παραδείγματα.

Πρόταση 7.1.3. *(Ανισότητα Cauchy-Schwarz) Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αν $x, y \in X$, τότε*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\,\sqrt{\langle y, y\rangle}. \tag{7.1.4}$$

Ισότητα ισχύει αν και μόνο αν τα x και y είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Απόδειξη. Αν $y = \vec{0}$, τότε η ανισότητα ισχύει σαν ισότητα, και τα $\vec{0}, x$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Έστω $y \neq \vec{0}$. Ορίζουμε $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $P(\lambda) = \langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle$. Τότε, $P(\lambda) \geq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, δηλαδή

$$\langle x, x\rangle - 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\langle y, y\rangle \geq 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Αυτό σημαίνει ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου $P(\lambda)$ είναι μικρότερη ή ίση του 0. Δηλαδή, $4\langle x, y\rangle^2 - 4\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leq 0$, απ¨ όπου παίρνουμε την

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}.$$

Ισότητα έχουμε αν και μόνο αν η διακρίνουσα του P είναι 0, δηλαδή, αν και μόνο αν το P έχει διπλή ρίζα λ_0. Όμως,

$$P(\lambda_0) = 0 \Longleftrightarrow x = \lambda_0 y,$$

δηλαδή, αν τα x, y είναι γραμμικά εξαρτημένα. □

Ορίζουμε $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ με $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Η ανισότητα Cauchy-Schwarz μάς επιτρέπει να δείξουμε ότι η $\|\cdot\|$ είναι νόρμα:

Πρόταση 7.1.4. *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Η $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$, με $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ είναι νόρμα.*

Απόδειξη. Ελέγχουμε τις ιδιότητες της νόρμας ως εξής:

(α) $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \geq 0$, και $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$.

(β) $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda^2\langle x, x\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\lambda|\,\|x\|$.

(γ) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$, από τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου και την ανισότητα Cauchy-Schwarz. □

Ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα, και έχουμε δεί ότι οι $(x, y) \to x + y$, $(\lambda, x) \to \lambda x$ είναι συνεχείς ως προς την $\|\cdot\|$. Το εσωτερικό γινόμενο είναι κι αυτό συνεχές ως προς την $\|\cdot\|$:

Πρόταση 7.1.5. *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και $\|\cdot\|$ η επαγόμενη νόρμα. Αν $x_n \to x$ και $y_n \to y$ ως προς την $\|\cdot\|$, τότε*

$$\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle.$$

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &= |\langle x_n, y_n - y\rangle + \langle x_n - x, y\rangle| \\ &\leq |\langle x_n, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle| \\ &\leq \|x_n\|\,\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\,\|y\|. \end{aligned}$$

Η (x_n) συγκλίνει άρα είναι φραγμένη, και $\|y_n - y\| \to 0$, $\|x_n - x\| \to 0$. Επομένως,

$$\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle.$$

□

Οι παρακάτω ταυτότητες είναι απλές συνέπειες του ορισμού της $\|\cdot\|$ (να τις επαληθεύσετε):

(i) **Κανόνας του παραλληλογράμμου**. Για κάθε $x, y \in X$,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \tag{7.1.5}$$

(ii) **Πυθαγόρειο θεώρημα**. Αν $x, y \in X$ και $\langle x, y\rangle = 0$, τότε

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2. \tag{7.1.6}$$

Παρατήρηση: Μια νόρμα $\|\cdot\|$ στον γραμμικό χώρο X, προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο αν και μόνο αν ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου. (*Υπόδειξη:* υποθέστε ότι η $\|\cdot\|$ ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου, και ορίστε

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\}. \tag{7.1.7}$$

Δείξτε ότι είναι εσωτερικό γινόμενο, και επαληθεύστε ότι η $\|\cdot\|$ είναι η επαγόμενη νόρμα.)

Ορισμός 7.1.6. Ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο λέγεται *χώρος Hilbert* αν είναι πλήρης ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|$ που επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο.

Παραδείγματα 7.1.7. (α) Έχουμε δεί ότι ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$ και ο ℓ_2 είναι πλήρεις ως προς την $\|x\| = \sqrt{\sum_k x(k)^2}$. Επομένως, είναι χώροι Hilbert.

(β) Στον $C[a,b]$, η $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b [f(t)]^2 dt}$ προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο, αλλά δεν είναι πλήρης (θυμηθείτε ανάλογο επιχείρημα για την $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$.)

(γ) Ο $C[a,b]$ με την $\|f\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} |f(t)|$ είναι πλήρης, αλλά η $\|\cdot\|_\infty$ δεν προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο, γιατί δεν ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου (πάρτε π.χ. $f(t) = 1-t$, $g(t) = t$ στον $C[0,1]$.)

7.2 Καθετότητα

Ορισμός 7.2.1. Έστω X ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο.

(i) Λέμε ότι δύο διανύσματα x, y του χώρου με εσωτερικό γινόμενο X είναι *ορθογώνια* (ή *κάθετα*), και γράφουμε $x \perp y$, αν $\langle x, y\rangle = 0$.

(ii) Μιά οικογένεια $\{e_i : i \in I\} \subseteq X$ λέγεται *ορθοκανονική*, αν

$$\langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 1 & , i = j, \\ 0 & , i \neq j. \end{cases} \tag{7.2.1}$$

Παρατηρήσεις: (α) Το $\vec{0}$ είναι κάθετο σε κάθε $x \in X$, και είναι το μοναδικό στοιχείο του X που έχει αυτήν την ιδιότητα (γιατί;).

(β) Αν $\{e_i : i \in I\}$ είναι μια ορθοκανονική οικογένεια στον X, τότε το $\{e_i : i \in I\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο. Πράγματι, αν $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_{i_k} = \vec{0}$, τότε για κάθε $j = 1, \dots, n$ έχουμε

$$0 = \langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_{i_k}, e_{i_j} \rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle e_{i_k}, e_{i_j} \rangle = \lambda_j.$$

Αν $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μια γραμμικά ανεξάρτητη ακολουθία στον X, τότε με τη *διαδικασία Gram-Schmidt* που περιγράφεται στην επόμενη Πρόταση, βρίσκουμε ορθοκανονική ακολουθία $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ στον X που είναι «ισοδύναμη» με την $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ με την εξής έννοια:

Πρόταση 7.2.2. *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ γραμμικά ανεξάρτητη ακολουθία στον X. Υπάρχει ορθοκανονική ακολουθία $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ με την ιδιότητα: για κάθε $k \in \mathbb{N}$,*

$$\text{span}\{e_1, \dots, e_k\} = \text{span}\{x_1, \dots, x_k\}. \tag{7.2.2}$$

Απόδειξη. Ορίζουμε τα e_k επαγωγικά: παρατηρήστε ότι $x_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Για $k = 1$, θέτουμε $e_1 = x_1/\|x_1\|$. Προφανώς, $\|e_1\| = 1$ και $\text{span}\{x_1\} = \text{span}\{e_1\}$.

Υποθέτουμε ότι έχουν οριστεί τα $e_1, \dots, e_k$ έτσι ώστε: $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, $i, j \leq k$, και $\text{span}\{x_1, \dots, x_k\} = \text{span}\{e_1, \dots, e_k\}$.

Θέτουμε $y_{k+1} = x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle x_{k+1}, e_i \rangle e_i$. Παρατηρούμε ότι $y_{k+1} \neq 0$, αλλιώς θα είχαμε $x_{k+1} \in \text{span}\{e_1, \dots, e_k\} = \text{span}\{x_1, \dots, x_k\}$, άτοπο αφού τα $x_1, \dots, x_k, x_{k+1}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Επίσης, για $j = 1, \dots, k$,

$$\begin{aligned} \langle y_{k+1}, e_j \rangle &= \langle x_{k+1}, e_j \rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle x_{k+1}, e_i \rangle \langle e_i, e_j \rangle \\ &= \langle x_{k+1}, e_j \rangle - \langle x_{k+1}, e_j \rangle = 0. \end{aligned}$$

Επομένως, το $e_{k+1} = y_{k+1}/\|y_{k+1}\|$ ορίζεται καλά, και τα $e_1, \dots, e_{k+1}$ είναι ορθοκανονικά. Τέλος,

$$e_{k+1} \in \text{span}\{x_{k+1}, e_1, \dots, e_k\} \subseteq \text{span}\{x_1, \dots, x_{k+1}\},$$

και

$$x_{k+1} \in \text{span}\{y_{k+1}, e_1, \dots, e_k\} \subseteq \text{span}\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}\}.$$

Επομένως, $\text{span}\{e_1, \dots, e_{k+1}\} = \text{span}\{x_1, \dots, x_{k+1}\}$. □

Ειδική περίπτωση: Αν X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και F υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης ($\dim F = n < \infty$), τότε ο F έχει βάση $\{x_1, \dots, x_n\}$, και η ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt μάς δίνει μιά ορθοκανονική βάση $\{e_1, \dots, e_n\}$ του F. Κάθε $x \in F$ γράφεται στη μορφή $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, και

$$\langle x, e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle e_i, e_j \rangle = \lambda_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Δηλαδή,

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i, \quad x \in F. \tag{7.2.3}$$

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα,

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|\langle x, e_i\rangle e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle^2, \quad x \in F. \tag{7.2.4}$$

Στη συνέχεια, μελετάμε το εξής πρόβλημα: δίνονται ένας χώρος X με νόρμα, ένας υπόχωρος F του X πεπερασμένης διάστασης, και για κάθε $x \in X$ ορίζουμε

$$d(x, F) = \inf\{\|x - y\| : y \in F\}, \tag{7.2.5}$$

την *απόσταση του x από τον F*. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $y_0 \in F$ στο οποίο «πιάνεται» η απόσταση: $\|x - y_0\| = d(x, F)$.

Πράγματι, από τον ορισμό της $d(x, F)$, μπορούμε να βρούμε $y_n \in F$ τέτοια ώστε

$$d(x, F) \leq \|x - y_n\| < d(x, F) + \frac{1}{n}.$$

Ειδικότερα, $y_n \in B(y_1, 2(d + 1)) \cap F$, το οποίο είναι συμπαγές σύνολο γιατί ο F έχει πεπερασμένη διάσταση, άρα υπάρχει υπακολουθία $y_{k_n} \to y_0 \in F$. Έπεται ότι

$$\|x - y_0\| = \lim_n \|x - y_{k_n}\| = d(x, F).$$

Το y_0 μπορεί να μην είναι μοναδικό: στον $\mathbb{R}^2$ με νόρμα την

$$\|(x(1), x(2))\| = \max\{|x(1)|, |x(2)|\},$$

αν πάρουμε $x = (1, 1)$ και $F = \{(t, 0), t \in \mathbb{R}\}$, τότε $d(x, F) = 1$, και $\|x-y\| = 1$ αν $y = (y(1), 0)$ με $0 \leq y(1) \leq 2$.

Θα δούμε ότι αν η $\|\cdot\|$ προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο, τότε το πλησιέστερο προς το x σημείο του F είναι μονοσήμαντα ορισμένο:

Πρόταση 7.2.3. *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και F υπόχωρος του X διάστασης n, με ορθοκανονική βάση την $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Αν $x \in X$, τότε το πλησιέστερο προς το x σημείο του F είναι το $\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i$. Επιπλέον, το $x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i$ είναι κάθετο στον F.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι το $x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i$ είναι κάθετο στον F. Αρκεί να δείξουμε ότι είναι κάθετο σε κάθε e_j, $j = 1, \ldots, n$. Όμως,

$$\begin{aligned} \langle x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i, e_j\rangle &= \langle x, e_j\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle \langle e_i, e_j\rangle \\ &= \langle x, e_j\rangle - \langle x, e_j\rangle = 0. \end{aligned}$$

Έστω $y \in F$. Υπάρχουν $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$. Τότε,

$$\Big\|x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\Big\|^2 = \Big\|(x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i) + \sum_{i=1}^{n} (\langle x, e_i\rangle - \lambda_i) e_i\Big\|^2,$$

και τα δύο διανύσματα είναι ορθογώνια, οπότε το Πυθαγόρειο Θεώρημα μάς δίνει

$$\begin{aligned}\|x-\sum_{i=1}^n\lambda_ie_i\|^2 &= \Big\|x-\sum_{i=1}^n\langle x,e_i\rangle e_i\Big\|^2+\sum_{i=1}^n(\langle x,e_i\rangle-\lambda_i)^2\\ &\geq \|x-\sum_{i=1}^n\langle x,e_i\rangle e_i\|^2.\end{aligned}$$

Επιπλέον, ισότητα μπορεί να ισχύει μόνο αν $\lambda_i=\langle x,e_i\rangle$, $i=1,\dots,n$, δηλαδή αν $y=\sum_{i=1}^n\langle x,e_i\rangle e_i$. □

Σημαντική συνέπεια της Πρότασης 7.2.3 είναι η *ανισότητα του Bessel*:

Πρόταση 7.2.4 (Ανισότητα Bessel). *Έστω $\{e_n:n\in\mathbb{N}\}$ ορθοκανονική ακολουθία σε έναν χώρο X με εσωτερικό γινόμενο. Τότε, για κάθε $x\in X$ η σειρά $\sum_{n=1}^\infty|\langle x,e_n\rangle|^2$ συγκλίνει, και*

$$\sum_{n=1}^\infty|\langle x,e_n\rangle|^2\leq\|x\|^2. \tag{7.2.6}$$

Απόδειξη. Έστω $N\in\mathbb{N}$. Θεωρούμε τον υπόχωρο $F_N=\mathrm{span}\{e_1,\dots,e_N\}$, και εφαρμόζουμε την Πρόταση 7.2.3. Το πλησιέστερο προς το x σημείο του F_N είναι το $\sum_{n=1}^N\langle x,e_n\rangle e_n$, και το $x-\sum_{n=1}^N\langle x,e_n\rangle e_n$ είναι κάθετο στον F_N. Επομένως,

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \|x-\sum_{n=1}^N\langle x,e_n\rangle e_n\|^2+\|\sum_{n=1}^N\langle x,e_n\rangle e_n\|^2\\ &\geq \|\sum_{n=1}^N\langle x,e_n\rangle e_n\|^2=\sum_{n=1}^N|\langle x,e_n\rangle|^2.\end{aligned}$$

Αφού η ανισότητα ισχύει για κάθε N, παίρνουμε

$$\sum_{n=1}^\infty|\langle x,e_n\rangle|^2\leq\|x\|^2.$$

□

7.3 Ορθογώνιο συμπλήρωμα και προβολές

Έστω H χώρος Hilbert, και έστω M κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H (ενδεχομένως απειροδιάστατος). Θα δείξουμε ότι, και σ¨ αυτήν την περίπτωση, το πρόβλημα της βέλτιστης προσέγγισης έχει μοναδική λύση:

Πρόταση 7.3.1. *Έστω H χώρος Hilbert, M κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H, και $x\in H$. Υπάρχει μοναδικό $y_0\in M$ τέτοιο ώστε*

$$\|x-y_0\|=d(x,M)=\inf\{\|x-y\|:y\in M\}. \tag{7.3.1}$$

Το μοναδικό αυτό $y_0\in M$ συμβολίζεται με $P_M(x)$, και ονομάζεται προβολή του x στον M.

Απόδειξη. Θέτουμε $\delta=d(x,M)$. Υπάρχει ακολουθία (y_n) στον M τέτοια ώστε

$$\|x-y_n\|\to\delta.$$

Από τον κανόνα του παραλληλογράμμου,

$$\begin{aligned}\|y_n - y_m\|^2 &= \|(y_n - x) + (x - y_m)\|^2 \\ &= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - \|(y_n + y_m) - 2x\|^2 \\ &= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\Big\|\frac{y_n + y_m}{2} - x\Big\|^2.\end{aligned}$$

Όμως, $\frac{y_n+y_m}{2} \in M$, άρα $\|\frac{y_n+y_m}{2} - x\| \geq \delta$. Επομένως,

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\delta^2 \to 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0.$$

Επομένως, η (y_n) είναι ακολουθία Cauchy στον H. Ο H είναι πλήρης, άρα υπάρχει $y_0 \in H$ τέτοιο ώστε $y_n \to y_0$. Έπεται ότι $y_0 \in M$ (ο M είναι κλειστός), και $\|x - y_0\| = \lim_n \|x - y_n\| = \delta$.

Για τη μοναδικότητα, χρησιμοποιούμε και πάλι τον κανόνα του παραλληλογράμμου. Αν $\|x - y\| = \delta = \|x - y'\|$, τότε

$$\begin{aligned}0 \leq \|y - y'\|^2 &= 2\|x - y'\|^2 + 2\|x - y\|^2 - 4\Big\|\frac{y + y'}{2} - x\Big\|^2 \\ &\leq 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0.\end{aligned}$$

Επομένως, $y = y'$. □

Παρατήρηση: Στην παραπάνω απόδειξη δε χρησιμοποιήσαμε πλήρως το γεγονός ότι το M ήταν υπόχωρος, παρά μόνο ότι για $y_1, y_2 \in M$ είναι και $\frac{y_1+y_2}{2} \in M$. Συνεπώς, το αντίστοιχο αποτέλεσμα ισχύει και στην περίπτωση που το M είναι κλειστό και κυρτό υποσύνολο του H. Το ίδιο ισχύει φυσικά και για τα αποτελέσματα που ακολουθούν (και χρησιμοποιούν την Πρόταση 7.3.1).

Το $x - P_M(x)$ είναι και στην «απειροδιάστατη περίπτωση» κάθετο στον M:

Πρόταση 7.3.2. *Με τις υποθέσεις της Πρότασης 7.3.1, $x - P_M(x) \perp M$.*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε την πεπερασμένη περίπτωση. Θέτουμε $z = x - P_M(x)$, και δείχνουμε ότι $\langle z, y\rangle = 0$ για κάθε $y \in M$. Έστω $y \in M$. Θεωρούμε τον $F = \mathrm{span}\{y, P_M(x)\} \subseteq M$. Τότε,

$$d(x, F) \leq \|z\| = d(x, M) \leq d(x, F),$$

όπου η τελευταία ανισότητα ισχύει γιατί $F \subseteq M$, και η πρώτη γιατί $P_M(x) \in F$. Έτσι $\|x - P_M(x)\| = d(x, F)$, και ο F έχει πεπερασμένη διάσταση, έχουμε

$$x - P_M(x) \perp F.$$

Ειδικότερα, $x - P_M(x) \perp y$, δηλαδή $\langle z, y\rangle = 0$. □

Πόρισμα 7.3.3. *Αν H χώρος Hilbert και M κλειστός γνήσιος υπόχωρος του H, τότε υπάρχει $z \in H$, $z \neq 0$, τέτοιο ώστε $z \perp M$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in H \setminus M$. Παίρνουμε $z = x - P_M(x) \neq 0$. □

Πόρισμα 7.3.4. *Ένας γραμμικός υπόχωρος F του H είναι πυκνός αν και μόνο αν το μοναδικό διάνυσμα του H που είναι κάθετο στον F είναι το 0.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι ο F είναι πυκνός στον H, και ότι $\langle z, x\rangle = 0$ για κάθε $x \in F$.

Έστω $y \in H$. Αφού ο F είναι πυκνός, υπάρχει ακολουθία $(y_n) \in F$ με $y_n \to y$. Τότε, $0 = \langle z, y_n\rangle \to \langle z, y\rangle$. Επομένως, $\langle z, y\rangle = 0$. Αφού $\langle z, y\rangle = 0$ για κάθε $y \in H$, έχουμε $z = 0$.

($\Leftarrow$) Ας υποθέσουμε ότι ο F δεν είναι πυκνός στον H. Τότε, ο $\overline{F}$ είναι γνήσιος κλειστός υπόχωρος του H. Επομένως, υπάρχει $z \neq 0$, $z \perp \overline{F}$. Ειδικότερα, $z \perp F$, άτοπο. □

Παρατήρηση 7.3.5. Αν ο X είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, αλλά όχι πλήρης, τότε το Πόρισμα 7.3.3 μπορεί να μην ισχύει.

Για παράδειγμα, θεωρούμε τον χώρο c_{00} των τελικά μηδενικών ακολουθιών, με εσωτερικό γινόμενο το $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)\eta_k$. Ορίζουμε $f : c_{00} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sum_k \frac{x(k)}{k}$. Το f είναι γραμμικό συναρτησοειδές, και είναι φραγμένο γιατί

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |\sum_k \frac{x(k)}{k}| \leq \left(\sum_k \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \left(\sum_k x(k)^2\right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_k \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \|x\|. \end{aligned}$$

Επομένως, ο πυρήνας του f, $M = \{x \in c_{00} : \sum_k \frac{x(k)}{k} = 0\}$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του c_{00}. Επίσης, ο M είναι προφανώς γνήσιο υποσύνολο του c_{00}.

Ας υποθέσουμε ότι $z \perp M$, $z = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots)$. Αφού $y_n = e_1 - ne_n \in M$, έχουμε

$$\langle z, y_n\rangle = \zeta_1 - n\zeta_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Αν $\zeta_1 \neq 0$, τότε $\zeta_n = \zeta_1/n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, άτοπο, γιατί το z θα είχε όλες του τις συντεταγμένες μη μηδενικές. Επομένως, $\zeta_1 = 0$, κι αυτό μάς δίνει $\zeta_n = \zeta_1/n = 0$, $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή $z = 0$.

Βλέπουμε λοιπόν ότι, αν και ο M είναι κλειστός, το μόνο διάνυσμα του c_{00} που είναι κάθετο στον M είναι το 0.

Ορισμός 7.3.6. Έστω H χώρος Hilbert, και $A \subseteq H$, $A \neq \emptyset$. Ορίζουμε

$$A^{\perp} = \{x \in H : \forall\ a \in A,\ \ \langle x, a\rangle = 0\}. \tag{7.3.2}$$

Ο $A^{\perp}$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H (άσκηση).

Θεώρημα 7.3.7. *Έστω H χώρος Hilbert, και M κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H. Τότε, $H = M \oplus M^{\perp}$. Δηλαδή, κάθε $x \in H$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή*

$$x = x_1 + x_2, \qquad x_1 \in M,\ x_2 \in M^{\perp}. \tag{7.3.3}$$

Απόδειξη. Έστω $x \in H$. Γράφουμε $x = P_M(x) + (x - P_M(x))$. Από τη συζήτηση που έχει προηγηθεί, $P_M(x) \in M$ και $x - P_M(x) \in M^{\perp}$.

Αν $x_1 + x_2 = x_1' + x_2'$ και $x_1, x_1' \in M$, $x_2, x_2' \in M^{\perp}$, τότε το

$$y = x_1 - x_1' = x_2 - x_2' \in M \cap M^{\perp}$$

γιατί οι $M, M^{\perp}$ είναι υπόχωροι, άρα $y \perp y$, το οποίο σημαίνει ότι $y = 0$. Επομένως, $x_1 = x_1'$ και $x_2 = x_2'$, απ¨ όπου έπεται η μοναδικότητα του τρόπου γραφής. □

Πόρισμα 7.3.8. *Έστω $M \neq \{0\}$ κλειστός γραμμικός υπόχωρος του χώρου Hilbert H. Ορίζουμε $P_M : H \to H$ με $P_M(x) = P_M(x_1 + x_2) = x_1$, όπου $x = x_1 + x_2$ όπως στο Θεώρημα. Ο P_M είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, και $\|P_M\| = 1$.*

Απόδειξη. Αν $x = x_1 + x_2$, $x' = x_1' + x_2'$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, τότε

$$\lambda x + \mu x' = (\lambda x_1 + \mu x_1') + (\lambda x_2 + \mu x_2') \in M + M^{\perp},$$

οπότε

$$P_M(\lambda x + \mu x') = \lambda x_1 + \mu x_1' = \lambda P_M(x) + \mu P_M(x'),$$

άρα ο P_M είναι γραμμικός τελεστής. Επίσης,

$$\|P_M(x)\|^2 = \|x_1\|^2 \leq \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = \|x_1 + x_2\|^2 = \|x\|^2,$$

δηλαδή ο P_M είναι φραγμένος, και $\|P_M\| \leq 1$. Αν $x_0 \in M$, $x_0 \neq 0$, τότε $P_M(x_0) = x_0$. Επομένως,

$$\|P_M\| \geq \frac{\|P_M(x_0)\|}{\|x_0\|} = 1.$$

□

7.4 Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz

Έστω $H \neq \{0\}$ χώρος Hilbert. Σε αυτή την παράγραφο θα δούμε ότι ο H^* περιέχει «πολλά» συναρτησοειδή, τα οποία αναπαρίστανται με πολύ συγκεκριμμένο τρόπο από τα στοιχεία του H.

Λήμμα 7.4.1. *Για κάθε $a \in H$, η $f_a : H \to \mathbb{R}$ με $f_a(x) = \langle x, a \rangle$ ανήκει στον H^*, και $\|f_a\|_{H^*} = \|a\|_H$.*

Απόδειξη. Έχουμε

$$f_a(\lambda x + \mu y) = \langle \lambda x + \mu y, a \rangle = \lambda \langle x, a \rangle + \mu \langle y, a \rangle = \lambda f_a(x) + \mu f_a(y),$$

και

$$|f_a(x)| = |\langle x, a \rangle| \leq \|a\| \, \|x\|.$$

Επομένως, $f_a \in H^*$ και $\|f_a\| \leq \|a\|$. Τέλος, αν $a \neq 0$,

$$\|f_a\| \geq \frac{|f_a(a)|}{\|a\|} = \frac{|\langle a, a \rangle|}{\|a\|} = \|a\|.$$

Αν $a = 0$, προφανώς $\|f_a\| = 0$ ($f_a \equiv 0$). □

Το Θεώρημα του Riesz μάς λέει ότι κάθε $f \in H^*$ αναπαρίσταται σαν $f = f_a$ για κάποιο $a \in H$:

Θεώρημα 7.4.2. *(Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz) Έστω H χώρος Hilbert, και $f \in H^*$. Υπάρχει μοναδικό $a \in H$ τέτοιο ώστε $f = f_a$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε $M = \mathrm{Ker} f = \{x \in H : f(x) = 0\}$. Ο M είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H.

Αν $M = H$, τότε $f \equiv 0$ και $f = f_0$.

Αν $M \neq H$, τότε υπάρχει $z \neq 0$, $z \in H$ που είναι κάθετο στον M (γιατί;). Τότε, για κάθε $y \in H$ έχουμε

$$f(f(z)y - f(y)z) = f(z)f(y) - f(y)f(z) = 0.$$

Επομένως $f(z)y - f(y)z \in M$, και αφού $z \perp M$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\langle f(z)y - f(y)z, z\rangle = 0 \quad &\Longrightarrow \quad f(z)\langle y, z\rangle = f(y)\langle z, z\rangle \\ &\Longrightarrow \quad f(y) = \langle y, \frac{f(z)z}{\|z\|^2}\rangle = f_a(y),\end{aligned}$$

όπου $a = f(z)z/\|z\|^2$. Η μοναδικότητα του a είναι απλή. Αν $f(y) = \langle y, a\rangle = \langle y, a'\rangle$ για κάθε $y \in H$, τότε $a - a' \perp y$ για κάθε $y \in H$. Επομένως, $a = a'$. □

Πόρισμα 7.4.3. *Έστω H χώρος Hilbert. Η απεικόνιση $T : H \to H^*$ με $T(a) = f_a$ είναι γραμμική ισομετρία επί (ισομετρικός ισομορφισμός).*

Απόδειξη. (α) Για τη γραμμικότητα της T, παρατηρούμε ότι

$$f_{\lambda a + \mu a'}(x) = \langle x, \lambda a + \mu a'\rangle = \lambda\langle x, a\rangle + \mu\langle x, a'\rangle = \lambda f_a(x) + \mu f_{a'}(x),$$

άρα

$$T(\lambda a + \mu a') = f_{\lambda a + \mu a'} = \lambda f_a + \mu f_{a'} = \lambda T(a) + \mu T(a').$$

(β) Από το Λήμμα, $\|T(a)\| = \|f_a\| = \|a\|$. Δηλαδή, η T είναι ισομετρία.
(γ) Αν $f \in H^*$, υπάρχει $a \in H$ τέτοιο ώστε $T(a) = f_a = f$, από το Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz. Δηλαδή, η T είναι επί. □

7.5 Ορθοκανονικές βάσεις

Ορισμός 7.5.1. Έστω X διαχωρίσιμος χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Μια ορθοκανονική ακολουθία $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ λέγεται *ορθοκανονική βάση* του X, αν

$$X = \overline{\mathrm{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}}. \tag{7.5.1}$$

Σημείωση: Αυτό δεν σημαίνει ότι η $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι βάση Hamel του X. Για παράδειγμα, η συνήθης ορθοκανονική ακολουθία (e_n) στον ℓ_2 είναι ορθοκανονική βάση (γιατί;), όχι όμως αλγεβρική του βάση.

Πρόταση 7.5.2. *Κάθε διαχωρίσιμος χώρος X με εσωτερικό γινόμενο, έχει ορθοκανονική βάση.*

Απόδειξη. Ο X είναι διαχωρίσιμος, δηλαδή υπάρχει αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ του X. Ορίζουμε $Y = \mathrm{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, οπότε $\overline{Y} = X$.

Παραλείποντας διαδοχικά εκείνα τα x_n τα οποία γράφονται σαν γραμμικοί συνδυασμοί των προηγουμένων τους, παίρνουμε ένα γραμμικά ανεξάρτητο $\{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ τέτοιο ώστε

$$Y = \mathrm{span}\{y_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Με τη διαδικασία Gram-Schmidt, βρίσκουμε ορθοκανονική ακολουθία $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ τέτοια ώστε $\mathrm{span}\{y_1, \dots, y_k\} = \mathrm{span}\{e_1, \dots, e_k\}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Ειδικότερα, $Y = \mathrm{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Επομένως,

$$X = \overline{Y} = \overline{\mathrm{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}}.$$

□

Παρατήρηση: Αντίστροφα, αν ο X έχει ορθοκανονική βάση $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$, τότε είναι διαχωρίσιμος. Το $M = \{\sum_{n=1}^{N} a_n e_n : N \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{Q}\}$ είναι αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X.

Πρόταση 7.5.3. *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση του X. Τότε, αν $x \in X$ έχουμε*

(i) $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$,

(ii) $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2$.

Απόδειξη. Έστω $x \in X$, και $\varepsilon > 0$. Αφού $X = \overline{\mathrm{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}}$, υπάρχουν $N \in \mathbb{N}$ και $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\Big\|x - \sum_{n=1}^{N} \lambda_n e_n\Big\| < \varepsilon.$$

Όμως, στον $F_N = \mathrm{span}\{e_1, \dots, e_N\}$ έχουμε

$$\Big\|x - \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n\rangle e_n\Big\| \leq \Big\|x - \sum_{n=1}^{N} \lambda_n e_n\Big\| < \varepsilon.$$

Δηλαδή,

$$\|x\|^2 - \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n\rangle^2 = \Big\|x - \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n\rangle e_n\Big\|^2 < \varepsilon^2.$$

(ελέγξτε την τελευταία ισότητα ξεκινώντας από το δεξιό μέλος.) Τότε, για κάθε $M \geq N$,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \Big\|x - \sum_{n=1}^{M} \langle x, e_n\rangle e_n\Big\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{M} \langle x, e_n\rangle^2 \\ &\leq \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n\rangle^2 = \Big\|x - \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n\rangle e_n\Big\|^2 \\ &< \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, αυτό σημαίνει ότι

(i) $\sum_{n=1}^{M} \langle x, e_n\rangle e_n \to x$ καθώς $M \to \infty$, δηλαδή

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n. \tag{7.5.2}$$

(ii) $\|x\|^2 - \sum_{n=1}^{M} \langle x, e_n\rangle^2 \to 0$ καθώς $M \to \infty$, δηλαδή

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2. \tag{7.5.3}$$

□

Αν λοιπόν η $\{e_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση του X, τότε κάθε $x \in X$ έχει *ανάπτυγμα* ως προς την $\{e_n\}$, με *συντελεστές Fourier* τους $\langle x, e_n\rangle$, και η νόρμα του x υπολογίζεται από την $\|x\|^2 = \sum_n \langle x, e_n\rangle^2$.

Πόρισμα 7.5.4. *Κάθε διαχωρίσιμος απειροδιάστατος χώρος Hilbert H είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον ℓ_2.*

Απόδειξη. Ο H έχει ορθοκανονική βάση $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Ορίζουμε $T : H \to \ell_2$ με

$$T(x) = (\langle x, e_1\rangle, \ldots, \langle x, e_n\rangle, \ldots). \tag{7.5.4}$$

(α) Ο T είναι καλά ορισμένος, γιατί $\sum_n \langle x, e_n\rangle^2 = \|x\|^2 < +\infty$, άρα $T(x) \in \ell_2$.
(β) Η γραμμικότητα του T ελέγχεται εύκολα.
(γ) $\|T(x)\|_{\ell_2}^2 = \sum_n \langle x, e_n\rangle^2 = \|x\|^2$, άρα ο T είναι ισομετρία (άρα και ένα προς ένα).
(δ) Έστω $(a_1, \ldots, a_n, \ldots) \in \ell_2$. Ορίζουμε $x_N = \sum_{n=1}^N a_n e_n$. Τότε, αν $N > M$ έχουμε

$$\|x_N - x_M\|^2 = \sum_{n=M+1}^{N} a_n^2 \to 0$$

καθώς $N, M \to \infty$, και αυτό δείχνει ότι η (x_N) είναι ακολουθία Cauchy στον H. Ο H είναι πλήρης, άρα υπάρχει $x \in H$ τέτοιο ώστε $x_N \to x$.

Έχουμε $\langle x_N, e_m\rangle \to \langle x, e_m\rangle$ καθώς $N \to \infty$, και αν $N > m$,

$$\langle x_N, e_m\rangle = \langle \sum_{n=1}^{N} a_n e_n, e_m\rangle = a_m.$$

Επομένως, $\langle x, e_m\rangle = a_m$, $m \in \mathbb{N}$. Τέλος,

$$T(x) = (\langle x, e_m\rangle)_{m\in\mathbb{N}} = (a_m)_{m\in\mathbb{N}},$$

άρα ο T είναι επί. □

7.6 Συζυγής τελεστής

Σε αυτή την ενότητα θα ορίσουμε τον συζυγή ενός γραμμικού τελεστή $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, όπου H_1, H_2 δύο χώροι Hilbert, ο οποίος γενικεύει την έννοια του ανάστροφου πίνακα από τη Γραμμική Άλγεβρα. Θα χρειαστούμε τον εξής:

Ορισμός 7.6.1. Έστω X και Y δύο διανυσματικοί χώροι. Μια *διγραμμική μορφή* στο $X \times Y$ είναι μια συνάρτηση $h : X \times Y \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τα εξής:

(i) $h(x_1 + x_2, y) = h(x_1, y) + h(x_2, y)$, για κάθε $x_1, x_2 \in X, y \in Y$.

(ii) $h(x, y_1 + y_2) = h(x, y_1) + h(x, y_2)$, για κάθε $x \in X, y_1, y_2 \in Y$.

(iii) $h(ax, y) = ah(x, y)$, για κάθε $x \in X, y \in Y$ και $a \in \mathbb{R}$.

(iv) $h(x, by) = bh(x, y)$, για κάθε $x \in X, y \in Y$ και $b \in \mathbb{R}$.

Αν επιπλέον οι X και Y είναι χώροι με νόρμα και υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός c ώστε για κάθε $x \in X$ και $y \in Y$ να ισχύει

$$|h(x, y)| \leq c\|x\|\|y\|, \tag{7.6.1}$$

λέμε ότι η h είναι φραγμένη και η σταθερά

$$\|h\| = \sup_{\substack{x\in X\setminus\{0\}\\ y\in Y\setminus\{0\}}} \frac{|h(x,y)|}{\|x\|\|y\|} = \sup_{\substack{\|x\|=1\\ \|y\|=1}} |h(x,y)| \tag{7.6.2}$$

λέγεται *νόρμα* της h.

Για παράδειγμα, ένα εσωτερικό γινόμενο είναι μια φραγμένη διγραμμική μορφή. Έχει ενδιαφέρον το γεγονός ότι μπορούμε να περιγράψουμε πλήρως τις φραγμένες διγραμμικές μορφές σε χώρους Hilbert, ακριβώς όπως κάναμε με τα φραγμένα γραμμικά συναρτησοειδή στην ενότητα 7.4.

Πρόταση 7.6.2. *(Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz για διγραμμικές μορφές) Έστω H_1, H_2 δύο χώροι Hilbert και $h : H_1 \times H_2 \to \mathbb{R}$ μια φραγμένη διγραμμική μορφή. Τότε υπάρχει φραγμένος τελεστής $S \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ ώστε*

$$h(x,y) = \langle Sx, y\rangle, \tag{7.6.3}$$

για κάθε $x \in H_1, y \in H_2$. Ο S καθορίζεται μοναδικά από την h και έχει νόρμα $\|S\| = \|h\|$.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz. Σταθεροποιούμε ένα $x \in H_1$. Τότε η απεικόνιση $H_2 \to \mathbb{R}$ με $y \mapsto h(x,y)$ είναι γραμμική και φραγμένη (γιατί;) και άρα, υπάρχει ένα μοναδικό στοιχείο $S_x \in H_2$ ώστε

$$h(x,y) = \langle S_x, y\rangle,$$

για κάθε $y \in H_2$. Θεωρούμε τον τελεστή $S : H_1 \to H_2$ με $S(x) = S_x$.
Ο S είναι γραμμικός. Πράγματι, για $x_1, x_2 \in H_1, y \in H_2$ και $a, b \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\langle S(ax_1 + bx_2), y\rangle &= h(ax_1 + bx_2, y)\\
&= ah(x_1, y) + bh(x_2, y)\\
&= a\langle Sx_1, y\rangle + b\langle Sx_2, y\rangle\\
&= \langle aSx_1 + bSx_2, y\rangle.
\end{aligned}$$

Αφού η παραπάνω ισχύει για κάθε $y \in H_2$, συμπεραίνουμε τελικά ότι

$$S(ax_1 + bx_2) = aSx_1 + bSx_2.$$

Ο S είναι φραγμένος. Πράγματι, ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
\|S\| &= \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{\|Sx\|}{\|x\|} = \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{\langle Sx, Sx\rangle}{\|x\|\|Sx\|}\\
&\leq \sup_{\substack{x\in X\setminus\{0\}\\ y\in Y\setminus\{0\}}} \frac{\langle Sx, y\rangle}{\|x\|\|y\|} = \sup_{\substack{x\in X\setminus\{0\}\\ y\in Y\setminus\{0\}}} \frac{|h(x,y)|}{\|x\|\|y\|} = \|h\|.
\end{aligned}$$

Μάλιστα ισχύει η ισότητα, αφού εφαρμόζοντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\|h\| = \sup_{\substack{\|x\|=1\\ \|y\|=1}} |\langle Sx, y\rangle| \leq \sup_{\substack{\|x\|=1\\ \|y\|=1}} \|S\|\|x\|\|y\| = \|S\|.$$

Τέλος, είναι προφανές ότι ο S καθορίζεται μονοσήμαντα από την h από την αντίστοιχη μοναδικότητα στο Θεώρημα 7.4.2. □

Ορισμός 7.6.3. Έστω H_1, H_2 δύο χώροι Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ ένας φραγμένος τελεστής. Ένας *συζυγής τελεστής* του T είναι ένας φραγμένος τελεστής $T^* \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$ για τον οποίο ισχύει η σχέση

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \tag{7.6.4}$$

για κάθε $x \in X$ και $y \in Y$.

Το πρώτο που πρέπει να δείξουμε είναι ότι ο παραπάνω ορισμός έχει νόημα, δηλαδή ότι για έναν δοσμένο T, ο T^* υπάρχει.

Πρόταση 7.6.4. *Δοσμένου ενός $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, υπάρχει μοναδικός συζυγής τελεστής T^* που ικανοποιεί τις απαιτήσεις του παραπάνω ορισμού, για τον οποίο μάλιστα ισχύει και $\|T^*\| = \|T\|$.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε την ύπαρξη του T^* χρησιμοποιώντας το Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz στη διγραμμική μορφή της σχέσης (7.6.4). Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε την απεικόνιση $h : H_2 \times H_1 \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από τη σχέση

$$h(y, x) = \langle y, Tx\rangle, \quad y \in H_2, x \in H_1.$$

Η h είναι προφανώς διγραμμική και μάλιστα φραγμένη, αφού

$$|h(y, x)| = |\langle y, Tx\rangle| \le \|y\|\|T\|\|x\|.$$

Ειδικότερα, ισχύει $\|h\| = \|T\|$ (γιατί;). Συνεπώς, υπάρχει μοναδικός τελεστής $T^* \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$ ώστε $h(y, x) = \langle T^*y, x\rangle$ για κάθε $x \in X, y \in Y$, για τον οποίο επιπλέον ισχύει

$$\|T^*\| = \|h\| = \|T\|.$$

Από τη συμμετρία του εσωτερικού γίνομένου συμπεραίνουμε ότι η (7.6.4) αληθεύει. □

Παραδείγματα 7.6.5. (α) Έστω $H_1 = H_2 = \mathbb{R}^n$ με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο

$$\langle x, y\rangle = x^t y, \quad x, y \in \mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^{n\times 1}.$$

Αν $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ένας $n \times n$ πίνακας είναι

$$\langle Ax, y\rangle = (Ax)^t y = x^t(A^t y) = \langle x, A^t y\rangle,$$

για $x, y \in \mathbb{R}^n$, δηλαδή $A^* = A^t$, ο ανάστροφος πίνακας του A.

(β)Έστω $H = \ell_2$ και $S \in \mathcal{B}(\ell_2)$ ο τελεστής δεξιάς μετατόπισης: αν $x = (x(k)) \in \ell_2$ έχουμε

$$Sx = (0, x(1), x(2), \ldots).$$

Θα υπολογίσουμε τον S^*. Θέτοντας $x = e_i$, παίρνουμε ότι

$$\langle S^*y, e_i\rangle = \langle y, Se_i\rangle = \langle y, e_{i+1}\rangle = y_{i+1} = \langle (y_2, y_3, y_4, \ldots), e_i\rangle$$

για κάθε $y = (y_k) \in \ell_2$ και $i = 1, 2, \ldots$. Συνεπώς,

$$S^*(y) = (y_2, y_3, \ldots),$$

ο τελεστής αριστερής μετατόπισης.

Περιγράφουμε τώρα σε μια πρόταση τις βασικές ιδιότητες του συζυγούς τελεστή.

Πρόταση 7.6.6. *Έστω H_1, H_2 δύο χώροι Hilbert, $T, S \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ δύο φραγμένοι γραμμικοί τελεστές και ένα $a \in \mathbb{R}$. Τότε έχουμε:*
(i) $(T + S)^* = T^* + S^*$.
(ii) $(aT)^* = aT^*$.
(iii) $(T^*)^* = T$.
(iv) Ισχύει η C^*-ιδιότητα: $\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2$.
(v) Αν επιπλέον $H_1 = H_2$, τότε $(TS)^* = S^*T^*$.

Απόδειξη. (i) Για $x \in H_1$ και $y \in H_2$ έχουμε

$$\begin{aligned} \langle x, (T+S)^* y\rangle &= \langle (T+S)x, y\rangle \\ &= \langle Tx, y\rangle + \langle Sx, y\rangle \\ &= \langle x, T^*y\rangle + \langle x, S^*y\rangle \\ &= \langle x, (T^* + S^*)y\rangle \end{aligned}$$

και άρα το ζητούμενο έπεται από τη μοναδικότητα της προηγούμενης πρότασης.
(ii) Προκύπτει όμοια με την (i) και αφήνεται ως άσκηση.
(iii) Για $x \in H_1$ και $y \in H_2$ υπολογίζουμε

$$\langle (T^*)^* x, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle = \langle Tx, y\rangle$$

και άρα πράγματι $T^{**} = (T^*)^* = T$.
(iv) Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle \leq \|T^*Tx\|\|x\| \leq \|T^*T\|\|x\|^2$$

και παίρνοντας supremum ως προς όλα τα x με $\|x\| = 1$ έχουμε ότι $\|T\|^2 \leq \|T^*T\|$. Συνεπώς

$$\|T\|^2 \leq \|T^*T\| \leq \|T^*\|\|T\| = \|T\|^2,$$

απ΄ όπου έπεται ότι $\|T^*T\| = \|T\|^2$. Αντικαθιστώντας τον T με τον T^* τώρα, παίρνουμε ότι

$$\|T^{**}T^*\| = \|T^*\|^2 = \|T\|^2,$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη.

(v) Τέλος, για $x, y \in H_1 = H_2$ έχουμε

$$\begin{aligned} \langle x, (TS)^* y\rangle &= \langle TSx, y\rangle \\ &= \langle Sx, T^* y\rangle \\ &= \langle x, S^* T^* y\rangle, \end{aligned}$$

και άρα πράγματι $(TS)^* = S^* T^*$. □

Με τη βοήθεια του συζυγούς τελεστή τώρα, μπορούμε να ορίσουμε πολλές ενδιαφέρουσες κλάσεις τελεστών:

Ορισμός 7.6.7. Έστω H ένας χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H)$ ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής. Γράφουμε $\mathcal{B}(H)$ αντί για $\mathcal{B}(H, H)$ για συντομία.
(i) Ο T λέγεται *αυτοσυζυγής* αν $T^* = T$, δηλαδή εάν

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle, \quad x, y \in H. \tag{7.6.5}$$

(ii) Ο T λέγεται *μοναδιαίος* αν $T^* = T^{-1}$.
(iii) Ο T λέγεται *φυσιολογικός* αν $T^* T = T T^*$.

Παρατηρήστε ότι στην περίπτωση $H = \mathbb{R}^n$, ο παραπάνω ορισμός επεκτείνει τις γνωστές έννοιες του συμμετρικού, μοναδιαίου και κανονικού πίνακα αντίστοιχα. Είναι άμεσο ότι, κάθε αυτοσυζυγής ή μοναδιαίος τελεστής είναι και φυσιολογικός. Το αντίστροφο δεν ισχύει: για παράδειγμα, ο τελεστής που ορίζει ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$$

είναι φυσιολογικός αλλά δεν είναι ούτε αυτοσυζυγής ούτε κανονικός.

Ενδιαφέροντα κριτήρια για το πότε ένας φραγμένος τελεστής είναι αυτοσυζυγής, μοναδιαίος και φυσιολογικός μπορούν να δοθούν στην περίπτωση που μελετάμε *μιγαδικούς* χώρους Hilbert. Αυτές οι κλάσεις τελεστών είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσες αφού σε αυτές μπορεί να επεκτείνει κανείς την έννοια της διαγωνιοποίησης που είναι γνωστή από τη Γραμμική Άλγεβρα μέσω του Φασματικού Θεωρήματος. Η θεωρία αυτή είναι αντικείμενο της Θεωρίας Τελεστών και ξεφεύγει από τους σκοπούς αυτών των σημειώσεων.

7.7 Ασκήσεις

1. Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και $x, y \in X$. Δείξτε ότι
(α) $x \perp y$ αν και μόνο αν $\|x + ay\| = \|x - ay\|$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.
(β) $x \perp y$ αν και μόνο αν $\|x + ay\| \geq \|x\|$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

2. Έστω H χώρος Hilbert, x_n, y_n στη μοναδιαία μπάλα του H, και $\langle x_n, y_n\rangle \to 1$. Δείξτε ότι $\|x_n - y_n\| \to 0$.

3. Έστω H χώρος Hilbert, και $x_n, x \in H$ με τις ιδιότητες: $\|x_n\| \to \|x\|$, και, για κάθε $y \in H$, $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$. Δείξτε ότι $\|x_n - x\| \to 0$.

4. Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και A, B μη κενά υποσύνολα του X, με $A \subseteq B$. Δείξτε ότι (α) $A \subseteq A^{\perp\perp}$, (β) $B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$, (γ) $A^{\perp\perp\perp} = A^{\perp}$.

5. Έστω H χώρος Hilbert, και Y υπόχωρος του H. Δείξτε ότι ο Y είναι κλειστός αν και μόνο αν $Y = Y^{\perp\perp}$.

6. Έστω M, N κλειστοί υπόχωροι ενός χώρου Hilbert. Δείξτε ότι

$$(M + N)^{\perp} = M^{\perp} \cap N^{\perp} \quad , \quad (M \cap N)^{\perp} = \overline{M^{\perp} + N^{\perp}}.$$

7. Δώστε παράδειγμα χώρου Hilbert H και γραμμικού υπόχωρου F του H με την ιδιότητα $H \neq F + F^{\perp}$.

8. Έστω H χώρος Hilbert, και W, Z κλειστοί υπόχωροι του H με την ιδιότητα: αν $w \in W$ και $z \in Z$, τότε $w \perp z$ (οι W και Z είναι *κάθετοι*). Δείξτε ότι ο $W + Z$ είναι κλειστός υπόχωρος του H.

9. Σε έναν χώρο Hilbert H, θεωρούμε δύο κλειστούς υποχώρους M, N, και τις αντίστοιχες ορθογώνιες προβολές P_M, P_N. Εξετάστε αν ισχύει πάντα $P_M \circ P_N = P_N \circ P_M$.

10. Θεωρούμε τον $C[-1, 1]$ με εσωτερικό γινόμενο το $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$. Βρείτε το ορθοκανονικό σύνολο που προκύπτει αν εφαρμόσουμε τη διαδικασία Gram-Schmidt στις $1, t, t^2$.

Βρείτε $a, b, c \in \mathbb{R}$ τέτοιους ώστε να ελαχιστοποιείται το

$$\int_{-1}^{1} (t^4 - a - bt - ct^2)^2 dt.$$

11. Έστω $T : H \to H$ φραγμένος γραμμικός τελεστής, του οποίου η εικόνα είναι μονοδιάστατη. Δείξτε ότι υπάρχουν $u, v \in H$ τέτοια ώστε

$$T(x) = \langle x, u\rangle v, \quad x \in H.$$

Υπόδειξη: Υπάρχει $v \in H$ τέτοιο ώστε $T(x) = \lambda_x v$, $x \in H$. Δείξτε ότι η $x \mapsto \lambda_x$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές, και χρησιμοποιήστε το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz.

12. Έστω W κλειστός γραμμικός υπόχωρος του χώρου Hilbert H, και $f \in W^*$. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικό $\tilde{f} \in H^*$ τέτοιο ώστε $\tilde{f}|_W = f$ και $\|\tilde{f}\|_{H^*} = \|f\|_{W^*}$.
Υπόδειξη: Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz στον W.

13. Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και $\{e_k\}$ ορθοκανονική ακόλουθία στον X. Αν $x, y \in X$, δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle\langle y, e_k\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

14. Έστω Y κλειστός υπόχωρος του χώρου Hilbert H, και $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση του Y. Δείξτε ότι αν $x \in H$, τότε το πλησιέστερο σημείο του Y προς το x είναι το $\sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n$.

15. Δείξτε ότι αν η $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση ενός χώρου Hilbert H, τότε

$$\forall f \in H^*, \quad f(e_n) \to 0.$$

16. Έστω H χώρος Hilbert, και (x_n) ορθογώνια ακολουθία στον H (δηλαδή, αν $n \neq m$, τότε $x_n \perp x_m$.) Τότε, η $\sum_n x_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_n \|x_n\|^2$ συγκλίνει.

17. Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και $x_1, \dots, x_n \in X$. Δείξτε ότι

$$\sum_{i \neq j} \|x_i - x_j\|^2 = n \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 - \|\sum_{i=1}^{n} x_i\|^2.$$

Αν $\|x_i - x_j\| \geq 2$ για $i \neq j$, δείξτε ότι αν μιά μπάλα περιέχει όλα τα x_i, πρέπει να έχει ακτίνα τουλάχιστον $\sqrt{2(n-1)/n}$.

18. Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και $x_1, \dots, x_n \in X$. Δείξτε ότι

$$\sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \Big\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \Big\|^2 = 2^n \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2,$$

όπου το εξωτερικό άθροισμα είναι πάνω από όλες τις ακολουθίες $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$.