

ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Όνοματεπώνυμον: Δημήτριος Βασιός. 9357. 25/6/1975

Ζήτημα 1^ο (α) Ορίσατε την συνάρτηση τῶν Euler και δείξατε ὅτι αὐτή εἶναι πολλαπλασιαστική.

(β) Δείξατε ὅτι ἔάν $(m, n) = d$ τότε

$$\varphi(mn) = d \varphi(m) \varphi(n)$$

Ζήτημα 2^ο Δίδεται τὸ σύνολον $G = \mathbb{Z}^3$. Ορίζομεν τὴν ἔξῃς

πράξιν ἐν G , $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \circ (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3 + \alpha_2 \beta_1)$

Δείξατε ὅτι τὸ ζεύγος (G, \circ) εἶναι μία ὁμάς.

Ἐυρετε τὸ κέντρον καὶ τὴν παράγωγον ὁμάδα τῆς G καὶ δείξατε ὅτι ἡ G εἶναι μηδενοδύναμος ὁμάς. Δείξατε ἔτι

ὅτι ἔάν $x = (1, 0, 0)$ καὶ $y = (0, 1, 0)$ τότε $G = \langle x, y \rangle$.

Ζήτημα 3^ο (α) Νὰ δεიχθῇ ὅτι κάθε ὁμάς τάξεως p^2 , ὅπου p πρῶτος, εἶναι Ἀβελιανή.

(β) Νὰ δοθῇ ὁ ὁρισμὸς τῆς ἐπιλυσίμου ὁμάδος καὶ νὰ δειχθῇ ὅτι κάθε ὁμάς τάξεως 100 εἶναι ἐπιλύσιμος.

Ζήτημα 4^ο (α) Πόσαι Ἀβελιαναὶ ὁμάδες τάξεως p^5 ,

p πρῶτος, ὑπάρχουν; Πόσαι τάξεως $p^2 q^3$, $p \neq q$, p καὶ q πρῶτοι; (Δικαιολογήσατε)

(β) Ἐστω N ὑποομάς μιᾶς ὁμάδος G . Δείξατε τὴν ἰσοδυναμίαν

$$N \geq G' \Leftrightarrow N \trianglelefteq G \text{ καὶ } G/N \text{ Ἀβελιανή}$$

(ὅπου G' ἡ ὁμάς μεταθετῶν τῆς G).

Ζήτημα 5^ο Ἐστω G πεπερασμένη ὁμάς καὶ $\alpha \in \text{Aut}(G)$ ὅπου τάξις $\alpha = 2$. Ἐπιπέσειν ὁ α ἀφήνει μόνον τὸ μοναδιαῖον στοιχεῖον ἀναλλοίωτον.

(α) Δείξατε ὅτι ἡ ἀπεικόνισις $h \rightarrow h^{-1}(h\alpha)$ εἶναι μία μετάθεσις τοῦ συνόλου G , δηλαδή κάθε στοιχεῖο τῆς G γράφεται μονοσήμαντως ὑπὸ μορφῆν $h^{-1}(h\alpha)$.

(β) Δείξατε ὅτι $g\alpha = g^{-1}$ διὰ κάθε $g \in G$.

Κατόπιν συμπεράνατε ὅτι ἡ G εἶναι Ἀβελιανή περὶ τῆς τάξεως.

Σημείωσις: Ἀποδείξατε ὑποχρεωτικῶς εἰς τὸ 1^ο ζήτημα καὶ εἰς