Ομάδες ΙΙ

Μια δεύτερη συλλογή ασκήσεων στην Θεωρία Ομάδων

Η συλλογή αυτή (σχεδόν) περιέχει την "Πρώτη συλλογή ασκήσεων στην Θεωρία Ομάδων". Οι ασκήσεις (σκόπιμα) είναι ανάκατες ως προς την σειρά της παρουσίασης κατά τις παραδόσεις. Ο σκοπός είναι να μας κρατούν σε εγρήγορση κατά την διάρκεια της μελέτης μας.

1. Έστω $G = \{ (a, b) \in \mathbb{R}^2$, όπου $a \neq 0 \}$ και $H = \{ (1, b)$, όπου $b \in \mathbb{R} \}$. Στο G ορίζουμε μία πράξη ως εξής:
   $(a_1, b_1) \circ (a_2, b_2) = (a_1 a_2, a_1 b_2 + b_1)$. Δείξτε ότι:

   $i)$ Το ζεύγος $(G, \circ)$ είναι ομάδα.

   $ii)$ Η H είναι κανονική υποομάδα της G.

   $iii)$ Η H είναι αβελιανή.

   $iv)$ Εξετάστε αν η G έχει στοιχεία τάξης 3.

   $v)^*$ Εξετάστε αν η G είναι επιλύσιμη ομάδα.

2. Στο σύνολο $G = \mathbb{Z}^3$ ορίζουμε μία πράξη ως εξής:
   $(x_1, x_2, x_3) \circ (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 + x_2 y_1)$. Δείξτε ότι:

   $i)$ Το ζεύγος $(G, \circ)$ είναι ομάδα.

   $ii)$ Αν $H = \{ (x_1, 0, x_3) \in G \}$, τότε το H είναι κανονική υποομάδα της G και μάλιστα αβελιανή.

   $iii)^*$ Εξετάστε αν η G είναι επιλύσιμη ομάδα.

3. Έστω $(G, \cdot)$ μια ομάδα, H ένα σύνολο και $\vartheta : G \longrightarrow H$ μια απεικόνιση 1-1 και επί. Στο σύνολο Η ορίζουμε μια πράξη ως εξής: $h_1 * h_2 = \vartheta(a_1 \cdot a_2)$, όπου $a_1, a_2 \in G$ έτσι ώστε $\vartheta(a_1) = h_1$ και $\vartheta(a_2) = h_2$. Δείξτε ότι το σύνολο $(H, *)$ είναι ομάδα και ότι η απεικόνιση ϑ ισομορφισμός ομάδων.

4. Δίνεται το σύνολο $G = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{a} \\ \bar{0} & \bar{b} \end{pmatrix} \mid \bar{0}, \bar{1}, \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_m, \ (b, m) = 1 \right\}$. Δείξτε ότι:

   $i)$ Το σύνολο G είναι ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων και $\mid G \mid = m \cdot \varphi(m)$, όπου φ είναι η συνάρτηση του $Euler$.

   $ii)$ Το σύνολο $H = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{a} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \mid \bar{a} \in \mathbb{Z}_m \right\}$ είναι κανονική υποομάδα της G.

   $iii)$ $G/H \simeq U(\mathbb{Z}_m)$.

   $iv)^*$ Εξετάστε αν η G είναι επιλύσιμη ομάδα. Είναι μηδενοδύναμη ομάδα;

5. Έστω A, B, C μη κενά υποσύνολα μιας ομάδας G. Δείξτε ότι:
   $i)$ $A(B \cap C) \subseteq AB \cap AC$.
   $ii)$ $A(B \cup C) = AB \cup AC$.

   Στην περίπτωση όπου το A είναι μονοσύνολο, δείξτε ότι ισχύει ισότητα και στην πρώτη περίπτωση.

   Δώστε ένα παράδειγμα όπου στην πρώτη περίπτωση έχουμε γνήσιο εγκλεισμό.

6. Έστω H, K υποομάδες μιας ομάδας G. Δείξτε ότι το γινόμενο HK είναι υποομάδα αν και μόνο αν $HK = KH$.

   Δείξτε ότι, αν τουλάχιστον μία από τις H, K είναι κανονική υποομάδα της G, τότε πάντα το γινόμενο HK είναι υποομάδα της G.

   Μπορείτε να δώσετε ένα παράδειγμα, όπου καμία από τις υποομάδες H, K να μην είναι κανονική στην G, αλλά το γινόμενο να είναι υποομάδα της G;

7. Έστω G πεπερασμένη ομάδα με τάξη άρτιο αριθμό. Δείξτε ότι περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο με τάξη ίση με 2.

8. Έστω A, B, K υποομάδες μιας ομάδας G. Υποθέτουμε ότι $A \leq B$, $A \cap K = B \cap K$ και $AK = BK$, δείξτε ότι $A = B$.

9. Έστω $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ ένας ομομορφισμός ομάδων και $a \in G_1$ πεπερασμένης τάξης. Δείξτε ότι η τάξη της εικόνας $\varphi(a)$ διαιρεί την τάξη του στοιχείου a.

   Έστω A μια πεπερασμένη υποομάδα της G_1, δείξτε ότι η τάξη της εικόνας $\varphi(A)$ διαιρεί την τάξη της A.

10. Δίνονται οι ομάδες $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \nu \in \mathbb{Z} \right\}$ και $H = \{1, i, -1, -i\}$ με τις γνωστές πράξεις και $\vartheta : G \longrightarrow H$ με $\begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{\vartheta}{\longrightarrow} i^{\nu}$, δείξτε ότι ο ϑ είναι επιμορφισμός ομάδων. Να βρεθεί ο $Ker\vartheta$.

11. Έστω ότι η κυκλική ομάδα $G = \langle a \rangle$ έχει τάξη ίση με n. Δείξτε ότι $G = \langle a^k \rangle$ αν και μόνο αν $\mu.\kappa.\delta(k, n) = 1$.

12. Έστω G μια κυκλική ομάδα παραγόμενη από το g.

    α) Δείξτε ότι η απεικόνιση $f : \mathbb{Z} \longrightarrow G$ με $f(z) = g^z$ είναι ένας ομομορφισμός ομάδων.

    β) Υποθέτουμε ότι η G έχει τάξη n. Δείξτε ότι η $f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow G$ με $f(z) = g^z$ είναι ισομορφισμός.

13. Έστω G αβελιανή ομάδα και $k \in \mathbb{Z}$, δείξτε ότι:

    $i)$ Η απεικόνιση $\vartheta_k : G \longrightarrow G$ με $\vartheta_k(x) = x^k$ είναι ομομορφισμός. Να περιγράψετε τον πυρήνα της.

    $ii)$ Αν η G είναι πεπερασμένη αβελιανή τότε η ϑ_k είναι αυτομορφισμός αν και μόνο αν $(k, m) = 1$, όπου m είναι η τάξη της ομάδας.

14. Έστω n ένας φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του 1. Να εξετάσετε αν υπάρχουν ομομορφισμοί ομάδων $\varphi : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_{n^2}$ και $\vartheta : \mathbb{Z}_{n^2} \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ έτσι ώστε $Im\varphi = Ker\vartheta$.

15. Να βρεθούν όλοι οι ομομορφισμοί $\varphi : C_{141} \longrightarrow C_6$ και $\vartheta : C_6 \longrightarrow C_{141}$ (Με C_m συμβολίζεται η κυκλική ομάδα τάξης m).

16. Το **κέντρο** $\zeta(G)$ μιας ομάδας G αποτελείται από όλα τα στοιχεία z της ομάδας G, που έχουν την ιδιότητα $zg = gz$ για κάθε $g \in G$.

Δείξτε ότι $\zeta(G) \lhd G$.

Δείξτε ότι για κάθε αυτομορφισμό ϑ της G ισχύει ότι $\vartheta(\zeta(G)) = \zeta(G)$.

Μπορείτε να δώσετε ένα παράδειγμα ομάδας G με έναν ενδομορφισμό $\varphi : G \longrightarrow G$, έτσι ώστε $\varphi(\zeta(G)) \nsubseteq \zeta(G)$;;

17. Έστω G ομάδα και $\zeta(G)$ το κέντρο της. Δείξτε ότι η ομάδα πηλίκο $G/\zeta(G)$ δεν είναι κυκλική (εκτός αν η G είναι αβελιανή).

18. Δίνεται η ομάδα $G = \{\, A \mid A \in \mathbb{R}^{\nu\times\nu}$, με $\mid A \mid \neq 0 \,\}$ και $S = \{\, A \in G,$ με $\mid A \mid = 1 \,\}$. Δείξτε ότι:

    $i)$ Η S είναι κανονική υποομάδα της G.

    $ii)$ Το πηλίκο G/S είναι αβελιανή ομάδα.

    $iii)$ Αν G' είναι η παράγωγος υποομάδα της G, τότε $G' \leq S$.

    $iv)$ Να βρεθούν τα στοιχεία πεπερασμένης τάξης της ομάδας G/S.

    $v)$ Να υπολογίσετε το κέντρο $\zeta(G)$.

19. $i)$ Έστω G ομάδα και $g \in G$ με τάξη του g ίση με n. Δείξτε ότι η τάξη του στοιχείου g^k είναι ίση με $\frac{n}{(n,k)}$.

    $ii)$ Δείξτε ότι για κάθε $a \in \mathbb{Z}$ ο μικρότερος θετικός ακέραιος k με την ιδιότητα $(k \cdot a) mod\, n \equiv o\, mod\, n$ είναι ο $\frac{n}{(n,a)}$.

20. Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα τάξης m. Έστω $g \in G$. Υποθέτουμε ότι για κάθε πρώτο διαιρέτη p του m είναι $g^{\frac{m}{p}} \neq e$. Δείξτε ότι η G είναι κυκλική παραγόμενη από το g.

21. Έστω G κυκλική ομάδα τάξης m και H υποομάδα της G τάξης n. Αν $G = \langle\, a \,\rangle$ και $H = \langle\, a^{\lambda} \,\rangle$ τότε $\kappa \mid \lambda$, όπου $\kappa = m/n$.

22. Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα. Δείξτε ότι κάθε στοιχείο της G εμφανίζεται ακριβώς μια φορά σε κάθε στήλη και σε κάθε γραμμή του πολλαπλασιαστικού πίνακα της G (πίνακας -$Cayley$).

23. α) Δείξτε ότι η $f : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $f(x,y) = x - 2y$ είναι ομομορφισμός προσθετικών ομάδων και να βρεθεί η $f(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}) = Imf$.

    β) Έστω G μια ομάδα και $g \in G$. Δείξτε ότι η $f : \mathbb{Z} \longrightarrow G$ με $f(k) = g^{2k}$ είναι ομομορφισμός. Ποιά είναι η Imf αν η τάξη του g είναι 6 ή 7;

24. Έστω $\mathbb{C}^*$ η πολλαπλασιαστική ομάδα των μιγαδικών και
    $H = \{\, x+yi \in \mathbb{C}^*$ με $\mid x+yi \mid = 1 \,\}$. Δείξτε ότι $H \leq \mathbb{C}^*$ και
    $\mathbb{C}^*/H \approx (\{\, r \in \mathbb{R}^*$ με $r > 0 \,\}, \cdot)$.

    Μπορείτε να αναπαραστήσετε γεωμετρικά (στο επίπεδο) την ομάδα $\mathbb{C}^*$ ως ένωση των συμπλόκων της H ως πρός την ομάδα $\mathbb{C}^*$;;;

25. Δείξτε ότι κάθε πεπερασμένη υποομάδα της πολλαπλασιαστικής ομάδας των μιγαδικών είναι κυκλική. (Υπόδειξη: Ποίο είναι το μέτρο ενός στοιχείου πεπερασμένης τάξης;)

26. Έστω G κυκλική ομάδα τάξης p^n, όπου p-πρώτος και H, K υποομάδες της G. Δείξτε ότι είτε $H \subseteq K$ είτε $K \subseteq H$. Ισχύει το αντίστροφο?

27. Έστω $A, B \leq G$ και $x, y \in G$. Δείξτε ότι το σύνολο $xA \cap yB$ είναι είτε το κενό είτε ένα αριστερό σύμπλοκο της $A \cap B$ στη G.

28. Έστω G ομάδα, H υποομάδα της με $\mid G : H \mid = n$ και $g \in G$. Δείξτε ότι υπάρχει m με $1 < m \leq n$ έτσι ώστε $g^m \in H$.

29. Έστω A, B υποομάδες της ομάδας G. Αν ισχύει $(\mid A \mid, \mid B \mid) = 1$, δείξτε ότι $A \cap B = 1$. Αν ισχύει $(\mid G : A \mid, \mid G : B \mid) = 1$, δείξτε ότι $\mid G : A \cap B \mid =$ $\mid G : A \mid \cdot \mid G : B \mid$.

30. Έστω G ομάδα, επιλέγουμε ένα στοιχείο $k \in G$ και ορίζουμε την απεικόνιση $\tau_k : G \longrightarrow G$ με $\tau_k(g) = k^{-1}gk$. Δείξτε ότι η τ_k είναι αυτομορφισμός της G.

    Δείξτε ότι η απεικόνιση $\vartheta : G \longrightarrow Aut(G)$ με $\vartheta(k) = \tau_k$ είναι ένας ομομορφισμός ομάδων. Να υπολογίσετε τον πυρήνα $Ker\vartheta$.

31. Έστω G μη αβελιανή ομάδα. Δείξτε ότι η ομάδα αυτομορφισμών της G $(AutG)$ δεν είναι κυκλική.

32. $i)$ Έστω ότι η $AutG$ μιας ομάδας G είναι πεπερασμένη κυκλική. Δείξτε ότι η ομάδα G είναι αβελιανή και η τάξη της $AutG$ είναι άρτιος αριθμός.

    $ii)$ Έστω C_n η κυκλική ομάδα τάξης n. Δείξτε ότι ομάδα αυτομορφισμών $Aut\,C_n$ είναι αβελιανή με τάξη $\varphi(n)$.

    $iii)$ Υπάρχει ομάδα G, ούτως ώστε η $Aut(G)$ να είναι άπειρη κυκλική;

33. Δείξτε ότι $AutV \simeq S_3 \simeq AutS_3$, όπου V είναι η ομάδα του $Klein$.

34. Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα και ένας αυτομορφισμός της φ, ο οποίος αντιστρέφει περισσότερα από τα 3/4 των στοιχείων της G (ο φ αντιστρέφει ένα στοιχείο g, αν $\varphi(g) = g^{-1}$). Δείξτε ότι η ομάδα G είναι αβελιανή και ότι ο φ αντιστρέφει όλα τα στοιχεία της.

35. Έστω $\mathbb{Q}$ η προσθετική ομάδα των ρητών αριθμών.

    $i)$ Δείξτε ότι δεν υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο $S \subseteq \mathbb{Q}$ έτσι ώστε το S να παράγει την $\mathbb{Q}$.

    $ii)$ Βρείτε ένα σύστημα γεννητόρων της $\mathbb{Q}$.

    $iii)$ Αν $\mathbb{Q}_n = < \frac{1}{n!} >$, δείξτε ότι $\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}_n$.

    $iv)$ Δείξτε ότι κάθε πεπερασμένα γεννώμενη υποομάδα της $\mathbb{Q}$ είναι κυκλική.

    $v)$ Έστω $0 \neq H$, $0 \neq K$ υποομάδες της $\mathbb{Q}$, δείξτε ότι $H \cap K \neq 0$.

    $vi)$ Δείξτε ότι για κάθε γνήσια μη τετριμένη υποομάδα H της $\mathbb{Q}$ το πηλίκο $\mathbb{Q}/H$ δεν είναι ούτε πεπερασμένο, ούτε κυκλικό.

    $vii)$ Έστω $\phi : \mathbb{Q} \longrightarrow N$ ομομορφισμός ομάδων, όπου N πεπερασμένη. Δείξτε ότι η ϕ είναι ο τετριμμένος ομομορφισμός.

    $viii)$ Δείξτε ότι κάθε στοιχείο της ομάδας $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ είναι πεπερασμένης τάξης. Είναι η ομάδα $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ πεπερασμένη?

$ix)$ Εξετάστε αν οι ομάδες $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ και $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ είναι ισόμορφες.

36. $i)$ Να "περιγράψετε" όλες τις (μη ισόμορφες) ομάδες τάξης 6.

    $i)$ Να "περιγράψετε" όλες τις (μη ισόμορφες) ομάδες τάξης 46.

37. Έστω G ομάδα με τάξη $\mid G \mid = 2p$, όπου p περιττός πρώτος. Δείξτε (χωρίς το Θεώρημα Sylow) ότι υπάρχουν $a, b \in G$ με τάξη του a ίσον 2 και τάξη του b ίσον p, (Συγκρίνατε με την άσκηση 7).

    Δείξτε ότι η G είναι είτε κυκλική, είτε ισόμορφη με την διεδρική D_p.

    Δείξτε ότι η G είναι μηδενοδύναμη αν και μόνο αν είναι αβελιανή.

38. $i)$ Έστω $\pi, \tau \in S_n$ δύο κύκλοι ξένοι μεταξύ τους με μήκη n, m αντίστοιχα και n, m σχετικά πρώτοι.
    α) Δείξτε ότι η υποομάδα K που παράγεται από τις μεταθέσεις π και τ είναι κυλική.
    β) Η απεικόνιση $\phi : K, \longrightarrow Z_n$ με $\phi(\pi^x \tau^y) = x \, mod n$ είναι επιμομορφισμός ομάδων. Ποιός είναι ο πυρήνας της;

    $ii)$ Έστω G ομάδα και $a, b \in G$ με $a \cdot b = b \cdot a$. Αν $a^m = b^n = 1$ με $(m, n) = 1$, τότε η υποομάδα που παράγεται από τα a, b είναι κυκλική. Να βρεθεί ένα $c \in G \ : < c > = < a, b >$.

39. $i)$ Δείξτε ότι κάθε αβελιανή ομάδα με τάξη ίση με $p \cdot q$, όπου p, q είναι διαφορετικοί πρώτοι είναι κυκλική.

    $ii)$ Δείξτε ότι η πολλαπλασιαστική ομάδα του δακτυλίου $\mathbb{Z}_{18}$ είναι κυκλική.

    $iii)$ Να υπολογίσετε όλα τα m, ώστε η πολλαπλασιαστική ομάδα $U(\mathbb{Z}_m)$ να είναι κυκλική.

40. Θεωρούμε την ομάδα U_{26} των αντιστρέψιμων στοιχείων της $\mathbb{Z}_{26}$.

    α) Να βρεθεί η $|U_{26}|$.
    β) Δείξτε ότι η U_{26} είναι κυκλική και να βρεθούν όλοι οι γεννήτορες.

41. Δείξτε ότι μία ομάδα είναι άπειρη κυκλική αν και μόνο αν είναι ισόμορφη με κάθε μη τετριμμένη υποομάδα της.

42. Έστω G αβελιανή ομάδα με τάξη 15.

    $i)$ Να βρεθούν όλες οι υποομάδες της και όλα τα σύμπλοκα ως προς μία γνήσια υποομάδα της.

    $ii)$ Έστω $a, b \in G$ με $a^6 = b^8 = 1$. Δείξτε ότι $b = 1$ και είτε $a = 1$, είτε η τάξη του a είναι 3.

43. Να οριστούν οι αριστερές και δεξιές κλάσεις (δηλαδή τα αριστερά και δεξιά σύμπλοκα) της S_3 στην S_4.

44. $i)$ Έστω $n > 2$. Δείξτε ότι η (υπο)ομάδα των αρτίων μεταθέσεων (εναλλάσουσα ομάδα) A_n παράγεται από όλους τους κύκλους μήκους 3.

    $ii)$ Δείξτε ότι η A_4 δεν έχει υποομάδα με 6 στοιχεία.

45. $i)$ Έστω $\pi \in S_n$, δείξτε ότι είτε $< A_n, \pi >= S_n$, είτε $\pi \in A_n$.

$ii)$ Γενικά αν G ομάδα και $H \leq G$ με $| G : H |= p$, p πρώτος, τότε για κάθε $g \in G$ είτε $< H, g >= G$, είτε $< H, g >=$ H.

46. Δείξτε ότι η A_4 είναι η μόνη υποομάδα της S_4 με τάξη 12.

47. Θεωρούμε τις μεταθέσεις $\alpha = (1, 2, 3)$, $\beta = (2, 3, 4, 5, 6)$ και $\gamma = (1, 4, 6, 3)$ της συμμετρικής ομάδας S_6. Υπολογίστε τις μεταθέσεις α^{-1}, $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\beta\gamma^2$, $\gamma^{-1}\beta$ και $(\alpha\gamma\beta)^{-1}$. Επίσης βρείτε το πρόσημο ($sign$) της κάθε μιας απ' αυτές (δηλαδή ποιές είναι άρτιες και ποιές περιττές).

Εξετάστε αν η ομάδα $\langle \alpha, \beta \rangle$ είναι επιλύσιμη.

48. Έστω $g \in S_n$. Δείξτε ότι αν $g(i) \neq i$ τότε $g^2(i) \neq g(i)$.

49. Έστω $g = (123)(234)(345)(567)(678)(789)$ στην S_9.
α) Γράψτε την g σε γινόμενο κύκλων ξένων ανά δύο μεταξύ τους.
β) Ποιά σημεία μένουν σταθερά κάτω απ'την g.
γ) Γράψτε την g^{-1} σε γινόμενο κύκλων ξένων ανά δύο μεταξύ των.
δ) Είναι η g άρτια?
ε) Να βρεθούν όλοι ομομορφισμοί $\varphi : \langle g \rangle \longrightarrow \langle h \rangle$, όπου $h = (135)(4567)$.

50. Έστω $\pi = (\,1\,2\,3\,4\,5\,)$, $\tau = (\,2, 5\,) \cdot (\,3\,4\,) \in S_5$. Δείξτε ότι:
$i)$ $\tau \cdot \pi \cdot \tau = \pi^{-1}$.
$ii)$ $< \pi > \lhd < \pi, \tau >$.
$iii)$ $D_5 \simeq < \pi, \tau >$.
$iv)$ Να υπολογίσετε όλες τις Sylow 5-υποομάδες της S_5.

51. Δείξτε ότι τα στοιχεία $(1\,3\,4\,5)$ και $(3\,4\,2\,6)$ της S_7 είναι συζυγή και βρείτε $\pi \in S_7$ έτσι ώστε $\pi^{-1}(1\,3\,4\,5)\pi = (3\,4\,2\,6)$.

52. Με ποίο από τα στοιχεία $\tau_1 = (1\,2\,3)(4\,5\,6)(7\,8)$, $\tau_2 = (6\,7\,8)(8\,9)(1\,2\,3\,4)$, $\tau_3 = (1\,2\,3\,4)(5\,6)(7\,8\,9)$ της S_{20} είναι συζυγής η μετάθεση $\pi = (1\,4\,5)(2\,3)(6\,7\,8\,9)$?

53. Πόσα στοιχεία έχει η κλάση συζυγίας στην S_7 που περιέχει την μετάθεση $\pi = (1\,2)(3\,4\,5)$?

54. Να βρεθεί η μεγαλύτερη δυνατή τάξη ενός στοιχείου της ομάδας S_{13}.

55. $i)$ Δείξτε ότι η διεδρική ομάδα D_3 είναι ισόμορφη με την S_3.

$ii)$ Ποιός είναι ο δείκτης της D_4 στην S_4;

$iii)$ Να βρεθούν τα σύμπλοκα της D_4 στην S_4.

56. Έστω $n > 2$, $n \in N$. Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$ των ακεραίων $modulo\ n$ και έστω $\alpha \in \mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε $(\alpha, n) = 1$.
α) Δείξτε ότι ο πολλαπλασιασμός επί $\alpha \, mod\, n$ ορίζει μια μετάθεση p_α των $1, 2, \cdots, n-1$ $mod\, n$. Για $\alpha = 2$ και $n = q$ γράψτε την αντίστοιχη μετάθεση σαν γινόμενο ξένων ανά δύο κύκλων. Μπορείτε απ' αυτή τη γραφή να βρείτε τον μικρότερο $m \in \mathbb{N}$ τέτοιον ώστε $\alpha^m = 1 mod\, m$?
β) Υποθέτουμε ότι η p_α γράφεται σε γινόμενο κύκλων ξένων ανά δύο μεταξύ των.

Δείξτε ότι αυτοί οι κύκλοι κατατάσσονται σε δύο κατηγορίες: Η μια περιλαμβάνει κύκλους όλοι των οποίων τα σημεία είναι αντιστρέψιμα $mod\, n$ και η άλλη κατηγορία περιλαμβάνει κύκλους που τα σημεία τους δεν είναι αντιστρέψιμα $mod\, n$.

57. Έστω $\alpha = (1,2)$ και $\beta = (1,2,3,\cdots,n) \in S_n$.
α) Υπολογίστε το $\beta\alpha\beta^{-1}$.
β) Υπολογίστε το $\beta^k\alpha\beta^{-1k}$, $k \in \mathbb{N}$.
γ) Δείξτε ότι κάθε στοιχείο της S_n μπορεί να γραφτεί σαν ένα γινόμενο στοιχείων απ' το σύνολο $\{\alpha, \beta, \beta^{-1}\}$, δηλαδή η S_n παράγεται απ' τα α και β.

58. Δείξτε ότι η συμμετρική ομάδα S_n έχει υποομάδα δείκτου n.

    Μπορείτε να βρήτε τουλάχιστον $n-1$ το πλήθος υποομάδες της S_n, οι οποίες να είναι δείκτου n;

59. Έστω G ομάδα με τάξη 26.

    Να βρεθούν όλες οι κανονικές υποομάδες της.

    Να υπολογίσετε την παράγωγο σειρά και την κατώτερη κεντρική σειρά της G.

60. Έστω p ένας πρώτος αριθμός. Τότε η πολλαπλασιαστική ομάδα $\mathbb{Z}_p^*$ είναι κυκλική.
Σημείωση: Υπάρχει η εικασία του *Artin* που δεν έχει αποδειχθεί μέχρι σήμερα: Υπάρχουν άπειροι πρώτοι για τους οποίους το 2 παράγει την ομάδα $\mathbb{Z}_p^*$.
Να οριστούν όλοι οι πρώτοι $p < 1000$ για τους οποίους το 2 είναι γεννήτορας της $\mathbb{Z}_p^*$.

61. Έστω $\phi : G_1 \longrightarrow G_2$ ομομορφισμός ομάδων και $A \leq G_1$. Δείξτε ότι $(A\phi)\phi^{-1} = A \cdot Ker\phi$, (με τον άλλο συμβολισμό $\phi^{-1}(\phi\mathrm{A}) = A \cdot Ker\phi$).

62. $i)$ Έστω $\phi : G_1 \longrightarrow G_2$ ομομορφισμός ομάδων, στην G_1 ορίζουμε την σχέση: $a \sim b \overset{o\rho}{\Longleftrightarrow} \phi(a) = \phi(b)$. Δείξτε ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας.

    $ii)$ Έστω G ομάδα στην G ορίζουμε δύο σχέσεις ως εξής:

    α) $a \simeq b \overset{o\rho}{\Longleftrightarrow}$ υπάρχει $g \in G$ τέτοιο ώστε $b = g^{-1}ag$.

    β) $a \approx b \overset{o\rho}{\Longleftrightarrow}$ υπάρχουν $g_1,\, g_2 \in G$ τέτοια ώστε $a = g_1g_2$ και $b = g_2g_1$.
    Δείξτε ότι οι $\simeq$ και $\approx$ είναι σχέσεις ισοδυναμίας και μάλιστα η **ίδια** σχέση ισοδυναμίας.
    $iii)$ Έστω $X \neq \emptyset$ σύνολο και $G \leq S_X$.

    α) Να δειχθεί ότι η σχέση $a \sim b \overset{o\rho}{\Longleftrightarrow}$ υπάρχει $g \in G$ τέτοιο ώστε $b = g(a)$, είναι σχέση ισοδυναμίας.
    β) Το σύνολο $H_a = \{\, g \mid g \in G$ τέτοιο ώστε $g(a) = a\,\}$, όπου $a \in X$, είναι υποομάδα της G.

63. Έστω G αβελιανή ομάδα και $x,\, y \in G$ με $x^n = y^n$, όπου n φυσικός αριθμός και x απείρου τάξεως. Δείξτε ότι $y = x \cdot w$, όπου $w \in G$ με $o(w) \mid n$.

64. Υποθέτουμε ότι για τα στοιχεία $x,\, u,\, v$ της ομάδας G ισχύουν οι σχέσεις: $x = u{\cdot}v = v{\cdot}u$ και $u^p = 1,\; v^q = 1$, όπου $p,\, q$ είναι θετικοί ακέραιοι σχετικά πρώτοι. Δείξτε ότι υπάρχουν σχετικά πρώτοι ακέραιοι αριθμοί $n,\, m$ έτσι ώστε $u = x^n$ και $v = x^m$.

65. Έστω G ομάδα με $G =< a,\, b,\, c >$ και $a^2 = b,\; b^2 = c,\; c^2 = a$. Δείξτε ότι:

    $i)$ Η G είναι αβελιανή.

$ii)$ $G =< a >=< b >=< c >$.

$iii)$ Να βρεθεί η τάξη της G, αν η G δεν είναι τετριμμένη.

66. Έστω a φυσικός αριθμός πρώτος προς τον 9 και G κυκλική ομάδα με τάξη $n = a^{11} - a^7 - a^5 + a$. Δείξτε ότι υπάρχει υποομάδα της G με τάξη 45.

67. Έστω G ομάδα με τάξη 210 και K κανονική υποομάδα της G με τάξη 7.

    $i)$ Δείξτε ότι $x^{30} \in K$ για κάθε $x \in G$.

    $ii)$ Αν $x \in G$ με $x^7 \in K$, τότε $x \in K$.

    $iii)$ Δείξτε ότι για το στοιχείο $g \in G$ ισχύει η ισοδυναμία $g \in K \iff g^{37} \in K$.

    $iv)$ Αν $M \lhd G$ με $\mid M \mid = 6$, Δείξτε ότι $KM \lhd G$. Ποιός είναι ο δείκτης της KM στην G; Γιατί η G/KM είναι κυκλική?

    $v)$ Δείξτε ότι η ομάδα G είναι επιλύσιμη. Είναι μηδενοδύναμη;;

68. $i)$ Έστω G ομάδα με $\mid G \mid = 121$. Δείξτε ότι η εξίσωση $x^7 = g$ έχει λύση στην G για κάθε $g \in G$.

    $ii)$ Να βρεθούν οι λύσεις των εξισώσεων $7x \equiv 28 \, mod \, 11$, $x^7 \equiv 28 \, mod \, 11$.

69. Έστω G ομάδα και a απείρου τάξεως. Υποθέτουμε ότι $< a > \lhd G$. Δείξτε ότι $g^2 \cdot a = a \cdot g^2$ για κάθε $g \in G$.
    Αν υποθέσουμε ότι το a είναι πεπερασμένης τάξεως r, δείξτε ότι υπάρχει $\rho \in Z$ με $\mu.\kappa.\delta.(\rho, r) = 1$ έτσι ώστε $g^\rho \cdot a = a \cdot g^\rho$ για κάθε $g \in G$.

70. Έστω η κυκλική ομάδα $G =< a >$ με τάξη 120.

    $i)$ Δείξτε ότι $< a^{54} >=< a^6 >$.

    $ii)$ Να βρεθεί ο μικρότερος θετικός ακέραιος ν έτσι ώστε $< a^{26} >=< a^\nu >$.

71. Μια ομάδα G έχει ακριβώς τρείς υποομάδες. Δείξτε ότι η G είναι κυκλική με τάξη ίση με το τετράγωνο ενός πρώτου αριθμού.

    Υπάρχει ομάδα G με ακριβώς τέσσερεις υποομάδες;

72. Έστω G πεπερασμένα γεννώμενη αβελιανή ομάδα και T το σύνολο όλων των στοιχείων πεπερασμένης τάξης. Είναι γνωστό (διαφορετικά αποδείξτε το) ότι το T είναι χαρακτηριστική υποομάδα της G. Περιγράψτε τους αυτομορφισμούς της G/T. Δείξτε ότι η ομάδα αυτομορφισμών της G είναι πεπερασμένη αν και μόνο αν το πηλίκο G/T είναι πεπερασμένο ή άπειρη κυκλική.

73. 1. Έστω G η άπειρη κυκλική ομάδα. Δείξτε ότι η G δρα επί οποιασδήποτε άλλης ομάδας H. Υποθέτουμε ότι $H = S_3$ να περιγράψετε όλες τις δράσεις της G επί της H οι οποίες διατηρούν τη δομή της H, δηλαδή $g \cdot (\pi \circ \tau) = (g \cdot \pi) \circ (g \cdot \tau)$ για κάθε $g \in G$ και $\pi, \tau \in S_3$.

    2. Έστω G πεπερασμένη ομάδα και x, y συζυγή στοιχεία της G. Δείξτε ότι ο αριθμός των στοιχείων $g \in G$ με την ιδιότητα $g^{-1}xg = y$ ισούται με $\mid C_G(x) \mid$, όπου $C_G(x)$ είναι η κεντροποιούσα του x.

74. Έστω G ομάδα και M κανονική υποομάδα της έτσι ώστε το πηλίκο G/M να είναι άπειρη κυκλική.

$i)$ Δείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n υπάρχει κανονική υποομάδα N_n της G με $|\, G : N_n \,| = n$.

$ii)$ Δείξτε ότι υπάρχει $H \leq G$ με την H άπειρη κυκλική, έτσι ώστε $G = H \cdot M$ και $H \cap M = 1$.

$iii)$ Δείξτε ότι η G είναι επιλύσιμη αν και μόνο αν η υποομάδα M είναι επιλύσιμη.

75. Έστω G ομάδα με την ιδιότητα: Για κάποιο $n > 1$ ισχύει $(\, a \cdot b\,)^n = a^n \cdot b^n$ για όλα τα $a, b \in G$. Δείξτε ότι τα σύνολα $G^{(n)} = \{\, x^n \mid x \in G \}$ και $G^{(n-1)} = \{\, x^{n-1} \mid x \in G \}$ είναι κανονικές υποομάδες της G.

Δείξτε ότι, αν η G είναι πεπερασμένη και $n = 3$, τότε η G είναι επιλύσιμη.

76. $i)$ Έστω G_n το σύνολο των μιγαδικών αριθμών που ικανοποιούν την εξίσωση $x^n = 1$. Δείξτε ότι το G_n είναι κυκλική ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό μιγαδικών αριθμών. Να βρεθούν όλοι οι μιγαδικοί αριθμοί ζ_n με την ιδιότητα $G_n = < \zeta_n >$.

$ii)$ Έστω p πρώτος αριθμός και C_{p^∞} το σύνολο των μιγαδικών αριθμών που ικανοποιούν μία από τις εξισώσεις $x^{p^n} = 1\,,\; n = 1, 2, \ldots$. Δείξτε ότι το C_{p^∞} είναι ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό. Δείξτε ότι κάθε πεπερασμένα γεννώμενη υποομάδα της C_{p^∞} είναι πεπερασμένη κυκλική.

77. $i)$ Έστω G πεπερασμένη ομάδα και $a \in G$, δώστε ικανή και αναγκαία συνθήκη έτσι ώστε η εξίσωση $x^k = a$ να έχει λύση στην G.

$ii)$ Έστω G ομάδα με τάξη 100. Δείξτε ότι για κάθε $g \in G$ υπάρχει μοναδικό $x \in G$ τέτοιο ώστε $x^{11} = g$.

$iii)$ Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των εξισώσεων $x^{25} = 1$ και $x^3 = 1$ στην ομάδα G, όπου G κυκλική με τάξη 100.

78. Έστω $f : G \longrightarrow G$ ενδομορφισμός ομάδων με $f^2 = f$. Δείξτε ότι:

$i)$ Αν ο f δεν είναι ο ταυτοτικός, τότε ο f δεν είναι επί.

$ii)$ $G = Ker\, f \cdot Im\, f$ και $ker\, f \cap Im\, f = 1$.

Επισημάνσεις, συμβολισμοί:

Έστω G μια ομάδα, τότε ως γνωστόν, για $a, b \in G$, ορίζεται ο μεταθέτης $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$ και για $a_1, a_2, a_3 \in G$ θα συμβολίζουμε $[a_1, a_2, a_3] = [[a_1, a_2], a_3]$ και αναδρομικά $[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n] = [[a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}], a_n]$.

Επίσης για $A, B, C \subseteq G$ ορίζεται η υποομάδα $[A, B] = \langle\, [a, b] \mid a \in A, b \in B \,\rangle$ και $[A, B, C] = \langle\, [a, b, c] \mid a \in A, b \in B, c \in C \,\rangle$.

Σε μια ομάδα G ορίζονται οι εξής κανονικές σειρές:

Η παράγωγος σειρά: $G = G^{(0)} \rhd G^{(1)} \rhd \cdots \rhd G^{(i)} \rhd G^{(i+1)} \cdots$, όπου αναδρομικά οι υποομάδες $G^{(i)}$ ορίζονται ως εξής: $G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}]$.

Η κατώτερη κεντρική σειρά: $G = \gamma_1(G) \rhd \gamma_2(G) \rhd \cdots \rhd \gamma_i(G) \rhd \gamma_{i+1}(G) \cdots$, όπου αναδρομικά οι υποομάδες $\gamma_i(G)$ ορίζονται ως εξής: $\gamma_{i+1}(G) = [\gamma_i(G), G]$.

Η ανώτερη κεντρική σειρά: $1 = Z_0 \lhd Z_1 = Z(G) \lhd Z_2 \cdots Z_i \lhd Z_{i+1} \cdots$, όπου αναδρομικά οι υποομάδες Z_i ορίζονται ως εξής: $Z_{i+1}/Z_i = Z(G/Z_i)$.

79. Δείξτε ότι κάθε όρος της παραγώγου και της κατώτερης κεντρικής σειράς είναι πλήρως αναλλοίωτη υποομάδα της G.

    Ισχύει το ίδιο για την ανώτερη κεντρική σειρά;

80. Έστω G μια ομάδα. Δείξτε ότι για κάθε $a,\, b,\, c \in G$ ισχύει ότι:

    i) $[a,\, bc] = [a,\, c][a,\, b][a,\, b,\, c]$.

    ii) $[ab,\, c] = [a,\, c][a,\, c,\, b][b,\, c]$.

81. Έστω $(a\, b\, c) \in S_n$. Να βρεθούν $\pi,\, \mu \in S_n$, ώστε $(a\, b\, c) = [\pi,\ \mu]$.

82. Έστω G μια ομάδα και $A,\, B,\, C \leq G$. Αν δύο από τις υποομάδες $[A,\, B,\, C]$, $[B,\, C,\, A]$, $[C,\, A,\, B]$ περιέχονται σε μια κανονική υποομάδα της G, τότε και η τρίτη περιέχεται στην ίδια κανονική υποομάδα.

    Αν επιπλέον οι υποομάδες $A,\, B,\, C$ είναι κανονικές στην G, δείξτε ότι $[A,\, B,\, C] \leq [B,\, C,\, A] \cdot [C,\, A,\, B]$.

83. Έστω G ομάδα και H, K, L κανονικές υποομάδες της G. Δείξτε ότι $[HK,\, L] = [H,\, L][K,\, L]$.

84. Έστω G μια ομάδα. Δείξτε ότι:

    i) $[\gamma_i(G),\, \gamma_j(G)] \leq \gamma_{i+j}(G)$.

    ii) $G^{(i)} \leq \gamma_{2^k}(G)$.

    iii) $\gamma_i(\gamma_j(G)) \leq \gamma_{ij}(G)$.

    iv) $[\gamma_i(G),\, Z_j(G)] \leq Z_{j-1}(G)$, $(j \geq 1)$.

    v) $Z_i(G/Z_j) = Z_{i+j}(G)/Z_j(G)$.

85. Έστω G μια πεπερασμένη μηδενοδύναμη ομάδα. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

    i) Η G είναι κυκλική.

    ii) Η G/G' είναι κυκλική.

    iii) Οι Sylow υποομάδες της G είναι κυκλικές.

    Εναλλακτικά: Έστω G ομάδα με την ιδιότητα. Η G/G' είναι κυκλική. Δείξτε ότι η G είναι είτε κυκλική, είτε δεν είναι μηδενοδύναμη.

86. Δίνεται η ανώτερη κεντρική σειρά $1 = Z_0 \lhd Z_1 = Z(G) \lhd Z_2 \cdots Z_i \lhd Z_{i+1} \cdots$ μιας ομάδας G. Υποθέτουμε ότι για κάποιο όρο Z_k το πηλίκο G/Z_k είναι κυκλική ομάδα. Δείξτε ότι $G = Z_k$.

87. Έστω G μια ομάδα και $H = H_0 \lhd H_1 \lhd \cdots \lhd H_k = G$ μια υποκανονική σειρά ώστε τα πηλίκα H_{i+1}/H_i να είναι αβελιανές ομάδες, για κάθε $i = 0 \ldots k-1$. Υποθέτουμε ότι $G = H \cdot G'$. Δείξτε ότι $G = H$.

88. Έστω G πεπερασμένη ομάδα. Εξετάστε αν ο ακόλουθος ισχυρισμός είναι αληθής.

    Η G είναι μηδενοδύναμη αν και μόνο αν για κάθε δύο στοιχεία $x,\, y \in G$ με τάξεις σχετικά πρώτες ισχύει ότι $x \cdot y = y \cdot x$.

89. Έστω G μηδενοδύναμη ομάδα και A, B δύο (τυχαίες) υποομάδες της. Δείξτε ότι $C_G(A) \cap C_G(B) \neq 1$.

90. Έστω G ομάδα και H, K κανονικές αβελιανές υποομάδας της G. Υποθέτουμε ότι $G = H \cdot K$, δείξτε ότι η G είναι μηδενοδύναμη κλάσης το πολύ 2.

91. Έστω G μια άπειρη ομάδα, όπου κάθε γνήσια μη τετριμένη υποομάδα είναι μέγιστη. Δείξτε οτι η G είναι απλή.

92. Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα και φ ένας αυτομορφισμός της G, οποίος δεν σταθεροποιεί στοιχεία της G (δηλαδή, $\varphi(x) \neq x$ για κάθε $1 \neq x \in G$).

    Δείξτε οτι, για κάθε p πρώτο διαιρέτη της τάξης της G, υπάρχει P Sylow p-υποομάδα της G με $\varphi(P) = P$.

    Έστω ότι η τάξη του φ είναι μια δύναμη ενός πρώτου q. Δείξτε ότι ο q δεν διαιρεί την τάξη της ομάδας G.

93. Έστω P μια Sylow p-υποομάδα της πεπερασμένης ομάδας G. Αν $N_G(P) \leq H \leq G$, δείξτε ότι $N_G(H) = H$. Αν επιπλέον η H είναι γνήσια υποομάδα της G, τότε η G δεν είναι μηδενοδύναμη.

94. Δείξτε ότι κάθε ομάδα τάξης $3^2 \cdot 5 \cdot 17$ είναι αβελιανή.

    Δείξτε ότι κάθε ομάδα τάξης $3^3 \cdot 5 \cdot 17$ είναι μηδενοδύναμη.

95. Έστω G μια μηδενοδύναμη ομάδα και $1 \neq g \in G$ με την ιδιότητα $g^{-1} = r^{-1}gr$ για κάποιο $r \in G$. Δείξτε ότι η τάξη του g ισούται με μια δύναμη του 2.

96. Έστω G μια ομάδα με τάξη ίση με pq, όπου οι p, q είναι διαφορετικοί πρώτοι. Δείξτε ότι η G είναι είτε κυκλική, είτε δεν είναι μηδενοδύναμη.

97. Έστω G μια πεπερασμένη επιλύσιμη ομάδα, της οποίας όλες οι Sylow υποομάδες είναι αβελιανές. Δείξτε ότι $Z(G) \cap G' = 1$.

98. $i)$ Δίνεται μια ομάδα G, η οποία παράγεται από τα στοιχεία a, b, c. Για τους τρεις αυτούς γεννήτορες ισχύει ότι $a^3 = b^3 = c^4 = 1$ και $aca = c$, $aba^{-1}bc^{-1}b^{-1} = 1$. Δείξτε ότι η G είναι η τετριμμένη ομάδα.

    $ii)$ Δίνεται μια ομάδα G, η οποία παράγεται από τα στοιχεία a, b. Για τους δύο αυτούς γεννήτορες ισχύει ότι $ab^2a^{-1}b^{-3} = 1$ και $ba^2b^{-1}a^{-3} = 1$. Δείξτε ότι η G είναι η τετριμμένη ομάδα.

99. Έστω $G = S_7$ και $a = (1\,2\,3\,4\,5\,6\,7)$, $b = (2\,6\,5\,7\,3\,4)$. Έστω $H = \langle a, b \rangle$. Να βρεθεί μια συνθετική σειρά της H και να υπολογίσετε τα αντίστοιχα πηλίκα.

100. Έστω G επιλύσιμη ομάδα και $f : G \longrightarrow H$ ομομορφισμός ομάδων. Υποθέτουμε ότι $im\, f \lhd H$ και ότι η $H/im\, f$ είναι αβελιανή ομάδα. Δείξτε ότι η H είναι επιλύσιμη και ότι για κάθε $r \in \gamma_2(H)$ υπάρχει $g \in G$ τέτοιο ώστε $f(g) = r$.

101. Έστω G ομάδα και H κανονική υποομάδα της έτσι ώστε το πηλίκο G/H να είναι πεπερασμένη μηδενοδύναμη ομάδα με τάξη που διαιρείται από τουλάχιστον δύο διαφορετικούς πρώτους αριθμούς. Δείξτε ότι υπάρχουν M και N κανονικές υποομάδες της G έτσι ώστε $M \cap N = H$ και $gH \cdot rH = rH \cdot gH$ για κάθε $g \in M$ και $r \in N$.

102. Έστω G πεπερασμένη μηδενοδύναμη ομάδα. Δείξτε ότι ο πρώτος αριθμός p διαιρεί την τάξη της G αν και μόνο διαιρεί την τάξη του κέντρου της G. Επιπλέον δείξτε ότι αν η G δεν είναι αβελιανή τότε υπάρχει p πρώτος έτσι ώστε p^3 να διαιρεί την τάξη της G.

103. Έστω G μηδενοδύναμη ομάδα με κλάση μηδενοδυναμίας $n \geq 2$ ($\gamma_{n+1}(G) = 1$) και $c \in \gamma_{n-1}(G)$. Ορίζουμε την απεικόνιση $\vartheta_c : G \longrightarrow G$ με $\vartheta_c(x) = [x, c]$.

    Δείξτε ότι η ϑ_c είναι ομομορφισμός ομάδων. Υπάρχει περίπτωση η ϑ_c να είναι μονομορφισμός?

104. Έστω G μια ομάδα με τάξη ίση με 77.

    i) Δείξτε ότι η ομάδα αυτομορφισμών της $Aut(G)$ είναι αβελιανή, αλλά όχι κυκλική.

    Υπόδειξη: Εφαρμόστε τα Θεωρήματα Sylow, τόσο για την ομάδα G, όσο και για την ομάδα $Aut(G)$.

    $*$ *ii)* Δείξτε ότι υπάρχουν δύο κυκλικές υποομάδες της $Aut(G)$ δείκτου 2.

105. Έστω G ομάδα περιττής τάξης και σ ένας αυτομορφισμός της G με $\sigma^2 = 1$. Να δείξετε ότι για κάθε p πρώτο διαιρέτη της $\mid G \mid$ υπάρχει P Sylow p-υποομάδα της G με $\sigma(P) = P$

106. *i)* Έστω n ένας φυσικός αριθμός, p ένας πρώτος αριθμός και $G \leq GL(n, \mathbb{Z}_p)$. Υποθέτουμε ότι η τάξη της G είναι δύναμη του p, δείξτε ότι υπάρχει μη μηδενικό στοιχείο b του διανυσματικού χώρου $V = \oplus_1^n \mathbb{Z}_p$ έτσι ώστε το b^t να αποτελεί λύση του συστήματος $AX = b^t$ για κάθε πίνακα $A \in G$. Ισοδύναμα, για όλους τους πίνακες που ανήκουν στην ομάδα G υπάρχει κοινό ιδιοδιάνυσμα με αντίστοιχη ιδιοτιμή ίση με 1.

    Υπόδειξη: Θεωρήστε τον πολλαπλασιασμό ενός πίνακα με ένα διάνυσμα ως δράση της ομάδος πινάκων επί του διανυσματικού χώρου V.

    $*$ *ii)* Δείξτε ότι πράγματι υπάρχουν υποομάδες της $GL(n, \mathbb{Z}_p)$ με τάξη μια δύναμη του p.

107. Δείξτε ότι μια ομάδα G δρά ελεύθερα επί ενός μη κενού συνόλου X αν και μόνο αν υπάρχει ένα σύνολο S και μια απεικόνιση $f : X \longrightarrow G \times S$, η οποία είναι 1-1 και επί.

    (Η δράση μιας ομάδας G επί ενός συνόλου X είναι ελεύθερη αν $Stab_G(x) = 1$ για κάθε $x \in X$.

108. Έστω $G = GL_2(\mathbb{Z}_3) = \{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & c \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}_3$, όπου ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος $\}$.

    (α΄) Υπολογίστε την τάξη της G.

    (β΄) Να βρεθεί το κέντρο της G.

    (γ΄) Να υπολογίσετε όλες τις Sylow 2-υποομάδες της G.

    (δ΄) Να υπολογίσετε όλες τις Sylow 3-υποομάδες της G.

    (ε΄) Προσπαθείστε να υπολογίσετε την ανώτερη κεντρική σειρά της G.
    Είναι η ομάδα G επιλύσιμη; Είναι μηδενοδύναμη;

109. Έστω G πεπερασμένη ομάδα και p πρώτος διαιρέτης της τάξης της G. Αν X είναι το σύνολο των Sylow p-υποομάδων της G και $Aut(G)$ η ομάδα αυτομορφισμών της G, ορίζουμε την δράση της $Aut(G)$ επί του X ως εξής: $Aut(G) \times X \longrightarrow X$, $(\alpha, P) \longrightarrow \alpha(P)$. Εξετάστε αν η δράση αυτή είναι καλά ορισμένη.

Να υπολογίσετε τον πυρήνα του επαγόμενου ομομορφισμού $f : Aut(G) \longrightarrow S_X$.

Παραβάλετε με τις ασκήσεις 88 και 100.

110. Έστω G ομάδα και $\gamma_n(G)$ ο n-οστός όρος της κατώτερης κεντρικής σειράς. Να δείξετε ότι $Z(G/\gamma_n(G)) \neq 1$, εκτός αν $G = \gamma_n(G)$.

111. Έστω G ομάδα και $K \lhd G$. Δώστε ικανή και αναγκαία συνθήκη, ώστε για κάθε $g \in G$ να ισχύει $\tau_g \mid_K = \tau_k,\ k \in K$.

112. Έστω G ομάδα.

$i)$ Δείξτε ότι η απεικονίση $f : Aut(G) \longrightarrow Aut(G/\gamma_2(G))$ με $f(\alpha) = \bar{\alpha}$, όπου $\bar{\alpha}(g\gamma_2(G)) = \alpha(g)\gamma_2(G)$ είναι ομομορφισμός ομάδων. Μάλιστα δε, $Inn(G) \leq Kerf$.

$ii)$ Δείξτε ότι η απεικονίση $\vartheta : Aut(G) \longrightarrow Aut(G/Z(G))$ με $\vartheta(\alpha) = \bar{\alpha}$, όπου $\bar{\alpha}(gZ(G)) = \alpha(g)Z(G)$ είναι ομομορφισμός ομάδων. Μάλιστα δε, $Ker\vartheta \leq C_{Aut(G)}(Inn(G))$.

113. Έστω $B = \{\, \vartheta \mid \vartheta : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \,\}$ και $W = \mathbb{Z} \times B$. Στο σύνολο W ορίζουμε την εξής πράξη $(m, \vartheta) \cdot (n, \varphi) = (m+n, \psi)$, όπου $\psi(x) = \vartheta(x-n) + \varphi(x)$.

Δείξτε ότι το σύνολο $(W, \cdot)$ είναι ομάδα.

Να υπολογίσετε το κέντρο της ομάδας $(W, \cdot)$.

114. Έστω G πεπερασμένα γεννώμενη αβελιανή ομάδα και $H \leq G$. Αν $S(H) = \{\, x \mid x \in G,\ x^2 \in H \,\}$, δείξτε ότι $S(H) \leq G$ και $\mid G/S(H) \mid = 2^k$.

115. Έστω $F = \langle\, a, b \,\rangle$ η ελεύθερη αβελιανή ομάδα διάστασης 2. Έστω $\varphi : \{\, a, b \,\} \longrightarrow F$ με $\varphi(a) = 2a + b$ και $\varphi(b) = a + b$. Δείξτε ότι ο φ μπορεί να επεκταθεί σε (μοναδικό) αυτομορφισμό $\bar{\varphi} : F \longrightarrow F$ (δηλαδή $\bar{\varphi}_{|\{\, a, b \,\}} = \varphi$). Να υπολογίσετε τις εικόνες $\bar{\varphi}^{-1}(a)$, $\bar{\varphi}^{-1}(b)$.

116. Δείξτε ότι η ομάδα αυτομορφισμών μιας πεπερασμένα γεννώμενης αβελιανής ομάδας G είναι πεπερασμένη, αν και μόνο αν υπάρχει το πολύ ένας άπειρος κυκλικός προσθεταίος στην ανάλυση της G σε ευθύ άθροισμα κυκλικών υποομάδων της.

117. Έστω G πεπερασμένη ομάδα με $\mid G' \mid = 2$. Δείξτε ότι $\mid G \mid = 4k$ και $G' \leq Z(G)$.

118. Έστω G ομάδα και $M, N \lhd G$ με $M \leq N$. Υποθέτουμε ότι η G/N είναι κυκλική και $\mid N/M \mid = 2$ Δείξτε ότι η G/M είναι αβελιανή.

119. Έστω $(G, *)$ ένα (μη κενό) σύνολο εφοδιασμένο με μια πράξη $*$, η οποία είναι προσεταιριστική. Υποθέτουμε ότι οι εξισώσεις $a * x = b$ και $y * a = b$ έχουν λύση για όλα τα $a, b \in G$.

Δείξτε ότι το σύνολο $(G, *)$ είναι ομάδα.

120. *i*) Έστω $(G, \cdot)$ ομάδα. Στο σύνολο G ορίζουμε μια άλλη πράξη $*$ ως εξής: $a*b = a\cdot t\cdot b$, όπου t είναι ένα σταθερό στοιχείο της G. Δείξτε ότι το σύνολο $(G, *)$ είναι ομάδα και μάλιστα ισόμορφη προς την $(G, \cdot)$.

    ii) Έστω $(G, \cdot)$ ομάδα. Στο σύνολο G ορίζουμε μια άλλη πράξη $*$ ως εξής: $a*b = a\cdot b\cdot t$, όπου t είναι ένα σταθερό στοιχείο της G. Δείξτε ότι το σύνολο $(G, *)$ είναι ομάδα, αν και μόνο αν $t \in Z(G)$.

121. Μια πεπερασμένη ομάδα G περιέχει στοιχεία τάξης k για κάθε $k \leq 12$. Ποία είναι η μικρότερη δυνατή τάξη της G;

122. Έστω ότι η ομάδα G παράγεται από τα στοιχεία a, b, $(G = \langle a, b \rangle)$. Υποθέτουμε ότι $ba = ab^k$ και $a^n = 1$, $k, n \in \mathbb{Z}^+$. Δείξτε ότι κάθε στοιχείο της G μπορεί να γραφεί στην μορφή $a^r b^s$, $0 \leq r \leq n$. Αν $k \neq 1$, τότε η G είναι πεπερασμένη.

123. *i*) Έστω $(G, +)$ αβελιανή ομάδα και $G^* = \{\varphi \mid \varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow G \text{ ομομορφισμός ομάδων}\}$. Στο G^* ορίζουμε μια πράξη ως εξής $(\varphi + \vartheta)(n) = \varphi(n) + \vartheta(n)$, για όλα τα $n \in \mathbb{Z}$. Δείξτε ότι το σύνολο $G^*, +)$ είναι ομάδα ισόμορφη με την $(G, +)$.

    ii) Έστω G, M αβελιανές ομάδες και $f : G \longrightarrow M$ ομομορφισμός ομάδων. Δείξτε ότι η απεικόνιση $f^* : G^* \longrightarrow M^*$ με $f^*(\varphi) = f \circ \varphi$ είναι ομομορφισμός ομάδων. Στην περίπτωση δε, όπου ο f είναι 1-1, τότε και ο f^* είναι 1-1.

124. Έστω G ομάδα και $N \leq G$ με την ιδιότητα, $N \cap G' = 1$. Δείξτε ότι η N είναι αβελιανή.

    Αν επιπλέον υποτεθεί ότι η N είναι κανονική υποομάδα της G, δείξτε ότι $N \leq Z(G)$.

125. Έστω $G = \langle a \rangle \times C_n$, όπου η $\langle a \rangle$ είναι η άπειρη κυκλική και $C_n = \langle b \rangle$ η κυκλική τάξης n. Δείξτε ότι:

    i) Το στοιχείο ab είναι απείρου τάξεως.

    ii) Αν φ είναι ένας αυτομορφισμός της G. Δείξτε ότι $\varphi(a) = a^{\pm 1} b^{\nu}$, όπου $\nu \in \mathbb{Z}$ και $\varphi(b) = b^k$, όπου $k \in \mathbb{Z}$ με k, n σχετικά πρώτοι.

    iii) Αν φ είναι ένας αυτομορφισμός της G και $n = 8$, $\varphi(a) = a^{-1}b^{10}$, $\varphi(b) = b^3$, να βρεθεί $g \in G$ με $\varphi(g) = a^2$.

    iv) Μπορείτε να υπολογίσετε την ομάδα αυτομορφισμών της G;;

126. Έστω G ομάδα και $I_1 = Inn(G)$ η ομάδα των εσωτερικών αυτομορφισμών της. Αναδρομικά ορίζουμε $I_2 = Inn(I_1)$ να είναι η ομάδα των εσωτερικών αυτομορφισμών της ομάδας I_1 και γενικά $I_n = Inn(I_{n-1})$ Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $I_n = 1$. Δείξτε ότι η ομάδα G είναι μηδενοδύναμη.

127. Έστω G μη κυκλική ομάδα. Υποθέτουμε ότι η $G/\gamma_2(G)$ είναι κυκλική. Δείξτε ότι η G δεν είναι μηδενοδύναμη.

128. Έστω G μηδενοδύναμη ομάδα με $\mid G \mid = p_1 p_2 \cdots p_n$, όπου τα p_i είναι πρώτοι αριθμοί, όχι κατ' ανάγκη διαφορετικοί μεταξύ τους. Δείξτε ότι η κλάση μηδενοδυναμίας της G δεν υπερβαίνει το $n - 1$.

129. Έστω G ομάδα και $H \leq G$. Υποθέτουμε ότι $G = H\gamma_2(G)$, Δείξτε ότι $G = H\gamma_i(G)$, για κάθε $i \geq 2$.

    Στην περίπτωση, όπου η G είναι μηδενοδύναμη, δείξτε οτι $G = H$.

    (Συγκρίνατε με τις ασκήσεις 86, 87.)

130. Έστω G μηδενοδύναμη ομάδα. Υποθέτουμε ότι η $G/\gamma_2(G)$ είναι κυκλική, αποδείξτε ότι η G είναι κυκλική.

Παρατήρηση. Το αποτέλεσμα είναι άμεση εφαρμογή της προηγουμένης άσκησης. Να το αποδείξετε με στοιχειώδη επιχειρήματα. Συγκρίνατε με την άσκηση 85.

131. Έστω G πεπερασμένα γεννώμενη μηδενοδύναμη ομάδα. η οποία ειναι ελευθέρας στρέψεως (δεν έχει μη τετριμμένα στοιχεία πεπερασμένης τάξης). Δείξτε ότι υπάρχει μια κεντρική σειρά, της οποίας τα αντίστοιχα πηλίκα είναι άπειρες κυκλικές ομάδες.