Ομάδες: Δεύτερο μάθημα

Στο μάθημα αυτό συνεχίζουμε την "επανάληψή" μας σε βασικές της Θεωρίας Ομάδων. Κατά τα γνωστά. Θα λαμβάνουμε μια άσκηση από το αρχείο των ασκήσεων *Μια πρώτη συλλογή ασκήσεων στην Θεωρία Ομάδων* και στην προσπάθεια να απαντήσουμε, θα αναφέρουμε και θα σχολιάζουμε όλες τις απαραίτητες έννοιες.

Ας ξεκινήσουμε:

$i)$ **Δείξτε ότι η διεδρική ομάδα D_3 είναι ισόμορφη με την S_3.**
$ii)$ **Ποίος είναι ο δείκτης της D_4 στην S_4;**
$iii)$ **Να βρεθούν τα σύμπλοκα της D_4 στην S_4.**
(Είναι η Άσκηση 50)

Πρώτα απ' όλα, έχουμε ακούσει για τις διεδρικές ομάδες;

Έστω $\Pi_n = (A_1\, A_2\, \cdots\, A_n)$ ένα κανονικό n-γωνο. Μια συμμετρία του είναι μια απεικόνιση από το Π_n στον εαυτό του, η οποία διατηρεί τις αποστάσεις (δηλαδή μια ισομετρία). Μια συμμετρία του Π_n προφανώς (γιατί;) απεικονίζει κάθε κορυφή, έστω A_i, σε μια άλλη κορυφή, οπότε το κέντρο του πολυγώνου το αφήνει σταθερό.

Προφανώς κάθε συμμετρία του πολυγώνου είναι αντιστρέψιμη απεικόνιση και η αντίστροφή της είναι και αυτή συμμετρία του. Επίσης η σύνθεση δύο συμμετριών είναι και αυτή συμμετρία. Οπότε το σύνολο όλων των συμμετριών ενός κανονικού n-γωνου με πράξη την σύνθεση απεικονίσεων αποτελεί ομάδα, συμβολίζεται ως D_n και ονομάζεται η διεδρική ομάδα του n-γωνου.

Μπορούμε να περιγράψουμε τα στοιχεία της ομάδας D_n;

Προφανώς η στροφή κατά γωνία ίση με $\varphi = 2\pi/n$ ορίζει μια συμμετρία του $n-$ *γωνου* (σηνήθως την στροφή αυτή την θεωρούμε αριστερόστροφα). Άρα έχουμε τα στοιχεία φ, φ^2, ..., φ^{n-1}, $\varphi^n = 1$.

Δηλαδή, αν θεωρήσουμε τον περιορισμό της φ επί του συνόλου των κορυφών του n-γωνου, θα έχουμε

$\varphi(A_1) = A_2$, $\varphi(A_2) = A_3$, ..., $\varphi(A_{n-1}) = A_n$, $\varphi(A_n) = A_1$.

Ερώτημα: Υπάρχουν και άλλες συμμετρίες του n-γώνου;

Ας πάρουμε τον άξονα συμμετρίας (ε), ο οποίος διέρχεται από την κορυφή A_1 και ας πάρουμε την ανάκλαση, έστω β, ως προς αυτόν τον άξονα.

Δηλαδή, $\beta(A_1) = A_1$, $\beta(A_2) = A_n$, ..., $\beta(A_i) = A_{n-i+1}$.

Προφανώς η β είναι μια συμμετρία του n-γωνου και ισχύει $\beta^2 = 1$.

Επομένως η διεδρική ομάδα D_n περιέχει τα στοιχεία

$D_n = \{\, 1, \varphi, \varphi^2, \ldots, \varphi^{n-1}, \beta, \varphi\,\beta, \varphi^2\,\beta, \ldots, \varphi^{n-1}\,\beta, \ldots \}$.

Ερώτημα: Υπάρχουν και άλλες συμμετρίες του n-γωνου;

Όχι.

Η απάντηση, διαισθητικά, είναι εύκολη, διότι κάθε συμμετρία του πολυγώνου απεικονίζει κάθε κορυφή του σε κορυφή, μάλιστα δε, γειτονικές κορυφές απεικονίζονται σε γειτονικές κορυφές ("διατήρηση της γειτονίας"), αφού πρόκειται για ισομετρία.

Μια αυστηρή απόδειξη, ότι η διεδρική ομάδα είναι η

$D_n = \{\, 1, \varphi, \varphi^2, \ldots, \varphi^{n-1}, \beta, \varphi\,\beta, \varphi^2\,\beta, \ldots, \varphi^{n-1}\,\beta \,\} \qquad (*)$

μπορείτε να δώσετε μόνοι σας.

Εμείς εδώ θα επισημάνουμε ότι ισχύει: $\beta\varphi\beta = \varphi^{-1}$ (αποδείξτε το!)

Ως άσκηση: Αν πάρουμε έναν άλλο άξονα συμμετρίας, ο οποίος διέρχεται από την κορυφή A_2 και θεωρήσουμε την ανάκλαση, έστω γ, ως προς αυτόν τον άξονα, μπορείτε να να εκφράσετε την γ ως εξής: $\gamma = \varphi^i\,\beta^j$ (Κάντε το!)

Επομένως μπορείτε να αποδείξετε ότι τα στοιχεία της D_n είναι είτε στροφές, είτε ανακλάσεις.

Τώρα, επειδή κάθε στοιχείο της D_n μεταθέτει τις κορυφές του n-γωνου, μπορούμε να θεωρήσουμε την D_n ως υποομάδα της συμμετρικής ομάδας S_n.

Προσοχή! Κάθε μετάθεση $\pi \in S_n$ δεν είναι συμμετρία του n-γωνου. Δεν ξεχνάμε τον περιορισμό, οι συμμετρίες διατηρούν την γειτονία των κορυφών.

Πριν επανέλθουμε στην ανωτέρω άσκηση, ας δούμε μερικές ιδιότητες της διεδρικής ομάδας D_n.

Πρώτα απ' όλα η D_n περιέχει $2n$ το πλήθος στοιχεία.

Αν πάρουμε την κυκλική υποομάδα $\langle \varphi \rangle$ την παραγόμενη από την στροφή φ, τότε αυτή είναι μια κανονική υποομάδα της D_n (γιατί;).

Πράγματι, δεν ξεχνάμε ότι πρέπει να αποδείξετε ότι $\beta\varphi\beta = \varphi^{-1}$, οπότε από την σχέση αυτή, έπεται άμεσα ότι $\langle \varphi \rangle \lhd D_n$.

Ας ξεκινήσουμε με το πρώτο ερώτημα.

Η απάντηση είναι προφανής....

Ας την δούμε όμως και γεωμετρικά. Αν έχουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο με κορυφές 1, 2, 3, τότε **κάθε** μετάθεση των κορυφών του οριζει μια συμμετρία του τριγώνου. Πράγματι, για παράδειγμα η μετάθεση $(1\,2)$ είναι μια ανάκλαση ως προς τον άξονα συμμετρίας που διέρχεται από την κορυφή 3. Όπως η μετάθεση $(2\,1\,3)$ είναι μια στροφή, η οποία στρέφει τις κορυφές κατά γωνία ίση με $2\pi/3$.

Για το δεύτερο ερώτημα.

Αναζητούμε τον δείκτη της D_4 ως υποομάδα της S_n.

Έχουμε ότι $\mid S_4 \mid = 4! = 24$ και $\mid D_4 \mid = 2 \cdot 4 = 8$. Επομένως, ο δείκτης της D_4 στην S_4 ισούται με $[S_4 : D_4] = ...$

Για το τρίτο ερώτημα.

Θέλουμε να βρούμε τα (αριστρά) σύμπλοκα της D_4 στην S_4. Ένα είναι το $1\,D_4$. Πώς θα βρούμε τα υπόλοιπα δύο; Θα πάρουμε μια μετάθεση $\tau \in S_4$, η οποία δεν αποτελεί συμμετρία του τετραγώνου. Ας πούμε την $\tau = (1\,2)$ (γιατί αυτή δεν αποτελεί συμμετρία του τετραγώνου ;;), οπότε ένα άλλο σύμπλοκο είναι το $\tau\,D_4$.

Μπορείτε να βρείτε το τρίτο σύμπλοκο;

Πάλι με τον ίδιο τρόπο θα πάρουμε την μετάθεση $\sigma = (1\,4\,2\,3)$, η οποία δεν αποτελεί συμμετρία του τετραγώνου (γιατί;) και θα πάρουμε το σύμπλοκο $\sigma\,D_4$ και τέλος ;;;; Είμαστε σίγουροι ότι τελειώσαμε;

Δεν τελειώσαμε, μήπως $\tau\,D_4 = \sigma\,D_4$; Για να δούμε:

Έχουμε ότι $\tau^{-1} \cdot \sigma = (1\,3)(2\,4)$. Αλλά $(1\,3)(2\,4) \in D_4$ (γιατί;) επομένως

$\tau\,D_4 = \sigma\,D_4$ και δεν βρίκαμε το τρίτο σύμπλοκο!!

Προσπαθείστε μόνοι σας να βρείτε το τρίτο σύμπλοκο.

Ας δούμε μια άλλη άσκηση.

Το κέντρο $\zeta(G)$ **μιας ομάδας** G **αποτελείται από όλα τα στοιχεία** z **της ομάδας** G**, που έχουν την ιδιότητα** $zg = gz$ **για κάθε** $g \in G$**. Δείξτε ότι** $\zeta(G) \lhd G$ (Είναι η άσκηση 14).

Έστω G **ομάδα και** $\zeta(G)$ **το κέντρο της. Δείξτε ότι η ομάδα πηλίκο** $G/\zeta(G)$ **δεν είναι κυκλική (εκτός αν η** G **είναι αβελιανή)** (Είναι η άσκηση 15).

Η πρώτη άσκηση είναι προφανής. Πράγματι, αν $z \in \zeta(G)$ και $g \in G$, τότε $g^{-1}zg = z \in \zeta(G)$.

Για την δεύτερη άσκηση. Αφού το κέντρο $\zeta(G)$ είναι κανονική υποομάδα της G, ορίζεται η ομάδα πηλίκων. $G/\zeta(G)$.

Υποθετουμε ότι η $G/\zeta(G)$ είναι κυκλική. Τότε υπάρχει ένα $k \in G$ ώστε $G/\zeta(G) = \langle k\,\zeta(G)\rangle$. Επομένως για τα τυχαία $g_1,\, g_2 \in G$ έχουμε ότι $g_1\,\zeta(G) = (k\,\zeta(G))^{\nu_1}$ και $g_2\,\zeta(G) = (k\,\zeta(G))^{\nu_2}$ για κάποιους ακεραίους $\nu_1,\, \nu_2$. Δηλαδή $g_1 = k^{\nu_1}\, z_1$ και $g_2 = k^{\nu_2}\, z_2$ με $z_1,\, z_2 \in \zeta(G)$. Οπότε,

$g_1 \cdot g_2 = (k^{\nu_1}\, z_1)\cdot(k^{\nu_2}\, z_2) = \cdots = g_2 \cdot g_1$. Να συμπληρώσετε τις $\cdots$. Οπότε, με την υπόθεση ότι η ομάδα πηλίκων $G/\zeta(G)$ είναι κυκλική, αποδείξαμε ότι η ομάδα G είναι αβελιανή. Στην περίπτωση όμως αυτή τι έχουμε για την ομάδα πηλίκων $G/\zeta(G)$;

Μια άλλη άσκηση.

Να μελετήσετε το κέντρο της διεδρικής ομάδας D_n.

Πώς θα ξεκινήσουμε;

Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα z στοιχείο του κέντρου της D_n. Ποία είναι η γενική μορφή των στοιχείων της D_n; Δεν ξεχνάμε την σχέση $(*)$.

Επομένως, το z θα είναι της μορφής $z = \varphi^i\beta^j$, όπου $i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$ και $j = 0,\, 1$.

Υποθέτουμε ότι το $j = 1$, τότε $z = \varphi^i\,\beta$. Το στοιχείο z ως στοιχείο του κέντρου, θα μετατίθεται με κάθε στοιχείο της D_n, άρα και με το φ. Δηλαδή πρέπει να έχουμε $z\cdot\varphi = \varphi\cdot z$. Αντικαθιστώντας πρέπει να έχουμε ότι $\varphi^i\beta\,\varphi = \varphi\,\varphi^i\beta$, δηλαδή $\beta\,\varphi = \varphi\,\beta$. Η τελευταία όμως ισότητα δεν ισχύει (γιατί;) (εκτός εάν...). Επομένως, ένα στοιχείο του κέντρου θα είναι της μορφής $z = \varphi^i$. Το στοιχείο όμως αυτό, ως στοιχείο του κέντρου θα μετατίθεται με το στοιχείο β, δηλαδή πρέπει να έχουμε $\beta\,\varphi^i = \varphi^i\,\beta$. Από την τελευταία ισότητα έχουμε ότι $\beta\,\varphi^i\,\beta = \varphi^i$ (γιατί;) Δηλαδή $\varphi^i = \varphi^{-i}$(γιατί;). Συνεπώς .....

Πρόταση: Η διεδρική ομάδα D_n έχει μη τερτιμένο κέντρο, αν και μόνο αν.....

Άλλη άσκηση.

Για τις ομάδες, οι οποίες εμφανίζονται στις ασκήσεις $\mathbf{1, 2, 4}$ του φυλλαδίου να υπολογίσετε το κέντρο τους.

Η ομάδα αυτομορφισμών μιας ομάδας.

Έστω G μια ομάδα. Ως γνωστόν ένας αυτομορφισμός της G είναι μια απεικόνιση $f : G \longrightarrow G$, η οποία είναι ομομορφισμός, 1-1 και επί.

Προφανώς ένας αυτομορφισμός f μιας ομάδας έχει αντίστροφο, $f^{-1} : G \longrightarrow G$, η οποία είναι και αυτή αυτομορφισμός της G (γιατί;)

Έστω $f : G \longrightarrow G$, $\sigma : G \longrightarrow G$ δύο αυτομορφισμοί της ομάδας G. Τότε η σύνθεση $f\circ\sigma$ είναι και αυτή ένας αυτομορφισμός της G (γιατί;)

Επομένως το σύνολο $Aut(G)$ όλων αυτομορφισμών της G είναι ομάδα (γιατί;;)

Το πρόβλημα, που προκύπτει, είναι να "περιγράψουμε" όλους τους αυτομορφισμούς μιας ομάδας. Η απάντηση είναι δεν είναι εύκολη. Μάλιστα δε, τις περισσότερες φορές είναι αδύνατον να μελετήσουμε (πλήρως) την ομάδα αυτομορφισμών μιας (τυχαίας) ομάδας.

Ας δούμε μερικά αποτελέσματα, τα οποία αφορούν την ομάδα αυτομορφισμών ομάδων.

Έστω G μια ομάδα, για κάθε $g \in G$ ορίζουμε την απεικόνιση $\tau_g : G \longrightarrow G$ ως εξής: $\tau_g(x) = gxg^{-1}$.

Άσκηση. Δείξτε ότι η τ_g είναι αυτομορφισμός της G (ένας τέτοιος αυτομορφισμός ονομάζεται *εσωτερικός αυτομορφισμός*).

Πρέπει να αποδείξουμε τα εξής:

$i)$ Η τ_g είναι πράγματι απεικόνιση (καλώς ορισμένη).

$ii)$ Η τ_g είναι ομομορφισμός ομάδων.

$iii)$ Η τ_g είναι 1-1 (μονομορφισμός).

$iv)$ Η τ_g είναι επί (επιμορφισμός).

$v)$ Να υπολογίσουμε την αντίστροφη της τ_g $\quad ((\tau_g)^{-1} = \tau_{g^{-1}})$.

Δεν Θα αποδείξουμε εδώ τίποτε από τα ανωτέρω **όλοι** είστε ικανοί να το κάνετε. Έχετε την θέληση;; (Είναι η άσκηση 28)

Πρόταση. Το σύνολο $In(G) = \{ \tau_g \mid g \in G \}$ όλων των εσωτερικών αυτομορφισμών μιας ομάδας αποτελεί κανονική υποομάδα της ομάδας αυτομορφισμών της G ($In(G) \lhd Aut(G)$).

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε ότι ένα (μη κενό) υποσύνολο μιας ομάδας είναι υποομάδα τί θέλουμε;

Για να αποδείξουμε ότι μια υποομάδα είναι κανονική τί θέλουμε;

Έστω τ_g, $\tau_k \in In(G)$, τότε $\tau_g \circ (\tau_k)^{-1} = \tau_g \circ \tau_{k^1} = ??\, \tau_{gk^{-1}} \in In(G)$. Άρα $In(G) \leq Aut(G)$.

Έστω $\tau_g \in In(G)$ και $\varphi \in Aut(G)$ τότε $\varphi \circ \tau_g \circ \varphi^{-1} = ???\, \tau_{\varphi(g)} \in In(G)$. Άρα $In(G) \lhd Aut(G)$. Τελειώσαμε; Όχι, εκκρεμούν τα ???.

Ας απαντήσουμε στο δεύτερο ??? .

Πότε δύο απεικονίσεις είναι ίσες; Αν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού, το ίδιο πεδίο τιμών και για κάθε στοιχείο του πεδίου ορισμού έχουν την ίδια εικόνα. Αυτό θα ελέγξουμε εδώ.

Έστω $x \in G$, τότε $(\varphi \circ \tau_g \circ \varphi^{-1})(x) = (\varphi \circ \tau_g)(\varphi^{-1}(x)) = \varphi(g \cdot (\varphi^{-1}(x) \cdot g^{-1}) = \varphi(g) \cdot (\varphi(\varphi^{-1}(x)) \cdot \varphi(g^{-1}) = \varphi(g) \cdot x \cdot \varphi(g^{-1}) = \tau_{\varphi(g)}(x)$, τέλος.

Ωραία! είπαμε ότι δεν μπορούμε, γενικά, να υπολογίσουμε την ομάδα αυτομορφισμών $Aut(G)$ της τυχαίας ομάδας G. Μήπως όμως μπορούμε να υπολογίσουμε την ομάδα των εσωτερικών της αυτομορφισμών;

Πρόταση. Έστω G ομάδα. Τότε ισχύει $G/\zeta(G) \approx In(G)$.

Πριν ξεκινήσουμε την απόδειξη. Μπορούμε να υπολογίσουμε την ομάδα εσωτερικών αυτομορφισμών μιας αβελιανής ομάδας;

Απόδειξη. Έστω $f : G \longrightarrow In(G)$ η εξής απεικόνιση: $f(g) = \tau_g$. Η f είναι ομομορφισμός ομάδων (γιατί;).

Πράγματι, για g_1, $g_2 \in G$ έχουμε $f(g_1g_2) = \tau_{g_1g_2}$. Ποίος είναι ο εσωτερικός αυτομορφισμός $\tau_{g_1g_2}$; Έστω $x \in G$, τότε $\tau_{g_1g_2}(x) = g_1g_2 \cdot x \cdot (g_1g_2)^{-1} = g_1g_2 \cdot x \cdot g_2^{-1}g_1^{-1} = \tau_{g_1}(g_2 \cdot x \cdot g_2^{-1}) = \tau_{g_1}(\tau_{g_2}(x)) = (\tau_{g_1} \circ \tau_{g_2})(x)$. Συνεπώς $f(g_1g_2) = \tau_{g_1g_2} = \tau_{g_1} \circ \tau_{g_2} = f(g_1)f(g_2)$. Άρα πράγματι η f είναι ομομορφισμός.

Προφανώς (γιατί;) η f είναι επί.

Ας υπολογίσουμε τον πυρήνα $Ker\, f$. Έστω $g \in Ker\, f$, τότε $f(g) = i$ (το i εδώ σημαίνει την ταυτοτική απεικόνιση). Αλλά $f(g) = \tau_g$, συνεπώς $\tau_g = i$ τί σημαίνει αυτό; $\tau_g(x) = i(x) = x$ για όλα τα $x \in G$, δηλαδή $gxg^{-1} = x$ για όλα τα $x \in G$. Από την τελευταία ισότητα έχουμε ότι $g \in \zeta(G)$. Άρα $Ker\, f = \zeta(G)$.

Μπορούμε να συνεχίσουμε για να τελειώσουμε;

Μπορούμε να υπολογίσουμε την ομάδα αυτομορφισμών κάποιων ομάδων;

Έστω $G = \langle a \mid a^n = 1 \rangle$ η κυκλική ομάδα τάξης n. Αναζητούμε την ομάδα αυτομορφισμών της.

Αν ϑ είναι ένας αυτομορφισμός της G, με $\vartheta(a) = a^k$ τότε αναγκαστικά το a^k είναι γεννήτορας της G. Πράγματι, επειδή η ϑ είναι επί έχουμε ότι για $a \in G$ υπάρχει $a^m \in G$, ώστε $\vartheta(a^m) = a$, δηλαδή $(a^k)^m = a$ (γιατί;). Επομένως, $k \cdot m - 1 = n \cdot \lambda$ (γιατί;). Συνεπώς, $\mu \cdot \kappa \cdot \delta(n, k) = 1$ (γιατί;). Αντίστροφα, αν k είναι ένας θετικός ακέραιος, πρώτος προς τον n προφανώς(;) η απεικόνιση $\varphi : G \longrightarrow G$ με $\varphi(a) = a^k$ ορίζει έναν αυτομορφισμό της ομάδας G.

Άρα η ομάδα αυτομορφισμών της G είναι αβελιανή και έχει τάξη ίση με ..... (Είναι η άσκηση 30 ii))

Έστω τώρα η άπειρη κυκλική ομάδα $C = \langle a \rangle = \{\ldots, a^{-2}, a^{-1}, a^0 = 1, a, a^2, \ldots\}$. Αναζητούμε την ομάδα αυτομορφισμών της.

Αν φ είναι ένας αυτομορφισμός της C με $\varphi(a) = a^k$, τότε, όπως προηγουμένως, αναγκαστικά $\varphi(a) = a$, ή $\varphi(a) = a^{-1}$. Επομένως η ομάδα αυτομορφισμών της άπειρης κυκλικής ομάδας αποτελείται από μόνο δύο αυτομορφισμούς.

Μια άλλη άσκηση.

Έστω G μη αβελιανή ομάδα. Δείξτε ότι η ομάδα αυτομορφισμών της G ($AutG$) δεν είναι κυκλική. (Είναι η άσκηση 29).

Η απάντηση είναι προφανής (γιατί;)
Μια άλλη άσκηση.

Έστω $G = (\mathbb{Q}, +)$ η προσθετική ομάδα των ρητών. Ας προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε την ομάδα αυτομορφισμών της.

Πώς θα ξεκινήσουμε; Θα αρχίσουμε να "πειραματιζόμαστε". Έστω φ ένας αυτομορφισμός της G. Υποθέτουμε ότι $\varphi(1) = k/m$. Προφανώς (;) $k/m \neq 0$. Έστω τώρα ένας ρητός αριθμός της μορφής $1/n$. Ποία είναι η εικόνα του μέσω του φ;

Έστω $\varphi(1/n) = s/t$, τότε $\varphi(1) = \varphi(n \cdot 1/n) = n \cdot \varphi(1/n) = n \cdot s/t$, αλλά $\varphi(1) = k/m$, επομένως έχουμε $k/m = n \cdot s/t$. Άρα η εικόνα $\varphi(1/n) = 1/n \cdot k/m = s/t$ είναι πλήρως καθορισμένη από το n και το k/m.

Προφανώς (;), τώρα η εικόνα του τυχαίου ρητού αριθμού u/v είναι ίση με $\varphi(u/v) = u/v{\cdot}k/m$. Συνεπώς η είκονα του τυχαίου ρητού αριθμού u/v είναι είναι πλήρως καθορισμένη από τον ρητό αριθμό $\varphi(1) = k/m$.

Αντίστροφα, έστω ένας (μη μηδενικός) ρητός αριθμός w/z, τότε η απεικόνιση $\vartheta : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ με $\vartheta(x/y) = x/y{\cdot}w/z$ ορίζει έναν αυτομορφισμό της ομάδας $G = (\mathbb{Q}, +)$ (γιατί;). Συνεπώς, "ανακαλύψαμε" μια 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ των αυτομορφισμών της $G = (\mathbb{Q}, +)$ και του συνόλου $\mathbb{Q}^*$ των μη μηδενικών ρητών αριθμών. Την $f : Q^* \longrightarrow Aut(G)$ με $w/z \longrightarrow \vartheta_{w/z} \in Aut(G)$, που ορίζεται ως εξής: $\vartheta_{w/z}(x/y) = x/y \cdot w/z$.

Προφανώς, η f ομομορφισμός ομάδων. Πράγματι, για w_1/z_1, $w_2/z_2 \in Q^*$ έχουμε $f(w_1/z_1 \cdot w_2/z_2) = \vartheta_{w_1/z_1 \cdot w_2/z_2} = \vartheta_{w_1/z_1} \circ \vartheta_{w_2/z_2}$ (γιατί ισχύει η τελευταία ισότητα;;;). Οπότε τελειώσαμε. Αποδείξαμε την εξής πρόταση.

Η ομάδα αυτομορφισμών της προσθετικής ομάδας $(\mathbb{Q}, +)$ **των ρητών αριθμών είναι ισομορφη με την πολλαπλασιαστική ομάδα** $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ **των ρητών αριθμών.**

Ως άσκηση εσείς θα αποδείξετε την εξής πρόταση:

Η ομάδα αυτομορφισμών της προσθετικής ομάδας $(\mathbb{R}, +)$ **των πραγματικών αριθμών είναι ισομορφη με την πολλαπλασιαστική ομάδα** $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ **των πραγματικών αριθμών αριθμών.**

Προσοχή! Για να "αντιγράψουμε" τα επιχειρήματα, που εφαρμόσαμε στην περίπτωση των ρητών αριθμών, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το"βαρύ" Θεώρημα ότι κάθε πραγματικός αριθμός είναι το όριο μιας ακολουθίας.....

Έχετε ήδη παρατηρήσει κάτι στα προηγούμενα;;

Στην περίπτωση των πεπερασμένων κυκλικών ομάδων υπολογίσαμε την ομάδα αυτομορφισμών τους.

Ας το δούμε υπό το εξής πρίσμα. Έστω ο δακτύλιος των ακεραίων $mod\, m$. Η προσθετική του ομάδα $(\mathbb{Z}_m, +)$ είναι πεπερασμένη κυκλική. Η πολλαπλασιαστική του ομάδα $(U(\mathbb{Z}_m), \cdot)$ αποτελείται από όλους τους ακεραίους $k\,(mod\, m)$, όπου οι k, m είναι σχετικά πρώτοι, αλλά, σύμφωνα με τα προηγούμενα, κάθε απεικόνιση $(\mathbb{Z}_m, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}_m, +)$ με $x \longrightarrow kx$, όπου ο k είναι πρώτος προς τον m ορίζει έναν αυτομορφισμό και αντίστροφα, δηλαδή ισχύει ότι $\mathrm{A}ut(\mathbb{Z}_m, +) \sim (U(\mathbb{Z}_m), \cdot)$.

Παρομοίως, αν πάρουμε τον δακτύλιο των ακεραίων. Η προσθετική του ομάδα $(\mathbb{Z}, +)$ είναι άπειρη κυκλική και η πολλαπλασιαστική του ομάδα $(U(\mathbb{Z}), \cdot)$ ισούται με $(U(\mathbb{Z}), \cdot) = \{\, 1, -1 \,\}$. Δηλαδή, πάλι σύμφωνα με τα προηγούμενα, ισχύει ότι $\mathrm{A}ut(\mathbb{Z}, +) \sim (U(\mathbb{Z}), \cdot)$.

Άρα ο καθένας θα μπορούσε να κάνει την εικασία ”Εστω μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα, τότε ......”

Μπορείτε/θέλετε να ασχοληθείτε λίγο;

Ας δούμε κάτι άλλο. Έστω G μια ομάδα και $Aut(G)$ η ομάδα αυτομορφισμών της. Δεν ξεχνάμε ότι $In(G) \sim G/\zeta(G)$.

Στην περίπτωση όπου το κέντρο της G είναι τεριμμένο, τότε $G \sim In(G) \leq Aut(G)$, δηλαδή η ομάδα G εμφυτεύται (μέσω ισομορφισμού) στην ομάδα αυτομορφισμών της.

Αλλά, ας δούμε και κάτι άλλο. Αν το κέντρο μιας ομάδας G είναι τετριμμένο, τότε τί ισχύει για το κέντρο $\zeta(Aut(G))$ της ομάδας αυτομορφισμών της;

Έστω $\varphi \in \zeta(Aut(G))$, τότε ο φ μετατίθεται με κάθε άλλο αυτομορφισμό της G (δεν ξεχνάμε η πράξη στην $Aut(G)$ είναι η σύνθεση απεικονίσεων), οπότε ο φ μετατίθεται και με κάθε εσωτερικό αυτομορφισμό της G. Άρα έχουμε $\varphi \circ \tau_g \circ \varphi^{-1} = \tau_g$ για όλα τα $g \in G$. Αυτό σημαίνει ότι $\varphi(g)x(\varphi(g))^{-1} = gxg^{-1}$ για όλα τα g, $x \in G$ (γιατί;;;). Τί σημαίνει η τελευταία σχέση; Σημαίνει ότι $g^{-1}\varphi(g) \in \zeta(G)$ για όλα τα $g \in G$. Αλλά το κέντρο της G έχει υποτεθεί τετριμένο, άρα $\varphi(g) = g$, για όλα τα $g \in G$. Δηλαδή η φ (το τυχαίο στοιχείο του $\zeta(Aut(G)$) είναι η ταυτοτική απεικόνιση.

Άρα αποδείξαμε την εξής σημαντική πρόταση:

Αν η ομάδα G έχει τετριμμένο κέντρο, τότε και η ομάδα $Aut(G)$ αυτομορφισμών της έχει τεριμμένο κέντρο.

Επομένως, έχουμε την εξής κατάσταση:

Έστω G μια ομάδα με τετριμένο κέντρο, τότε ορίζουμε $A^1(G) = Aut(G)$, $A^2(G) = Aut(Aut(G)) = Aut(A^1(G)$ και γενικά $A^{i+1}(G) = Aut(A^i(G))$, οπότε χηματίζεται μια ακολουθία

$G \leq A^1(G) \leq A^2(G) \leq \cdots$.

Ερώτημα: Η ακολουθία αυτή τερματίζει;;

Το ερώτημα αυτό είναι πολύ ενδιαφέρον και **δεν** έχει απαντηθεί πλήρως. Στην περίπτωση των πεπερασμένων ομάδων έχει απαντηθεί (από τον Wieland) ότι πράγματι η ανωτέρω ακολουθία τερματίζει σε πεπερασμένα βήματα. Η απόδειξη ......δεν είναι επί του παρόντος....

Η κανονικοποιούσα, η κεντροποιούσα μιας υποομάδας

Έστω G μια ομάδα και $H \leq G$.

Θα ορίσουμε κάποιες άλλες υποομάδες, οι οποίες έχουν σχέση με τις H και G.

Ως γνωστόν, η H ονομάζεται κανονική ($H \lhd G$) αν $gHg^{-1} = H$, γι όλα τα $g \in G$.

Επίσης, πάντα ισχύει ότι $hHh^{-1} = H$, για όλα τα $h \in H$, είναι δεν είναι η H κανονική υποομάδα. Επομένως αναζητούμε την ”μεγαλύτερη” υποομάδα της G ως προς την οποία η H να είναι κανονική. Συγκεκριμένα ορίζουμε $N_G(H) = \{\, g \in G \mid gHg^{-1} = H \,\}$.

Προφανώς(;) η $N_G(H)$ είναι υποομάδα της G και ισχύει $H \lhd N_G(H)$. Η $N_G(H)$ θα ονομάζεται **κανονικοποιούσα** υποομάδα της H ως προς την ομάδα G.

Προφανώς ισχύει ότι η H είναι κανονική στην G αν και μόνο αν $N_G(H) = G$.

Έστω $H_G = \cap_{g\in G} gHg^{-1}$.

Ισχύει (γιατί;) ότι $H_G \lhd G$ και αν $L \lhd G$ με $L \leq H$, τότε $L \leq H_G$. Δηλαδή, η H_G είναι η ”μεγαλύτερη” κανονική υποομάδα της G, η οποία περιέχεται στην G.

Η H_G ονομάζεται **”καρδιά”/”ψύχα”** (core) της H.

Ας δούμε το (γιατί;)

Επιλέγουμε ένα $r \in G$. Προφανώς $\{\, rg \mid g \in G \,\} = G$. Συνεπώς $rH_Gr^{-1} = r(\cap_{g\in G} gHg^{-1})r^{-1} = \cap_{g\in G}(rg)H(g^{-1}r^{-1}) = \cap_{g\in G} gHg^{-1} = H_G$. Αυτό ισχύει για κάθε επιλογή του $r \in G$. Συνεπώς

$H_G \lhd G$.

Τώρα, αν $L \lhd G$, έχουμε ότι για κάθε $g \in G$ ισχύει $L = gLg^{-1} \leq gHg^{-1}$. Άρα $L \leq \cap_{g\in G} gHg^{-1} = H_G$.

Να θυμόμαστε, την υποομάδα H_G θα την συναντήσουμε σε λίγο υπό άλλη θεώρηση.

Δυϊκά ορίζεται η εξής υποομάδα. $H^G = \cap\{\, K \mid K \lhd G,\ H \leq K\,\}$.

Προφανώς η H^G είναι η "μικρότερη" κανονική υποομάδα της G, η οποία περιέχει την H και ονομάζεται η **κανονική θήκη** της H.

Μια άλλη υποομάδα που θα μας απασχολήσει είναι η εξής:

$C_G(H) = \{\, g \in G \mid gh = hg$, για κάθε $h \in H\,\}$. Δηλαδή η $C_G(H)$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία της G, τα οποία μετατίθενται με κάθε στοιχείο της H. Η $C_G(H)$ ονομάζεται η **κεντροποιούσα** της H στην G.

Προφανώς(;) Το κέντρο της ομάδας G περιέχεται στην κεντροποιούσα κάθε υποομάδας ($Z(G) \leq C_G(H)$). Μάλιστα δε, $Z(G) = \cap_{\{\,H\leq G\,\}} C_G(H)$.

Πρόταση 0.0.1. *Ισχύει ότι $C_G(H) \lhd N_G(H)$ και η $N_G(H)/C_G(H)$ είναι ισόμορφη με μια υποομάδα της $Aut(H)$.*

Η απόδειξη αφίεται ως (μια μάλλον δύσκολη) άσκηση. Θα επανέλθουμε... Προς το παρόν προσπαθήστε την!!

Έστω G μια ομάδα $H \leq G$ και ϑ ένας ενδομορφισμός της G. Η H θα ονομάζεται αναλλοίωτη ως προς τον ενδομορφισμό ϑ (ϑ-αναλλοίωτη) αν $\vartheta(a) \in H$ για όλα τα $a \in H$. Αν η H είναι ϑ-αναλλοίωτη για κάθε ενδομορφισμό, τότε η H θα ονομάζεται **πλήρως αναλλοίωτη** υποομάδα.

Αν η H είναι φ-αναλλοίωτη για κάθε $\varphi \in Aut(G)$, τότε η H θα ονομάζεται **χαρακτηριστική** υποομάδα της G (συμβολικά γράφουμε $H \lhd | G$.

Προφανώς η H είναι χαρακτηριστική, αν και μόνο αν $\varphi(H) = H\ \varphi \in Aut(G)$.

Προφανώς κάθε πλήρως αναλλοίωτη υποομάδα είναι χαρακτηριστική και κάθε χαρακτηριστική υποομάδα είναι κανονική (γιατί;).

Είναι (;;) γνωστό ότι η κανονικότητα δεν είναι μεταβατική. Δηλαδή ενδέχεται να έχουμε $K \lhd H \lhd G$. αλλά $K \ntriangleleft G$.

Μπορείτε να δώσετε ένα παράδειγμα;

Τουναντίον η χαρακτηριστικότητα είναι μεταβατική.

Πρόταση 0.0.2. *Έστω K χαρακτηριστική υποομάδα της H και η H χαρακτηριστική υποομάδα της G, τότε η K είναι χαρακτηριστική υποομάδα της G.*

Απόδειξη. Έστω $\varphi \in AutG$. Θα δείξουμε ότι $\varphi(K) = K$.

Επειδή η H είναι χαρακτηριστική υποομάδα της G έχουμε ότι $\varphi(H) = H$, δηλαδή ο περιορισμός $\varphi_{|H} \in Aut(H)$. Αλλά η K είναι χαρακτηριστική υποομάδα της H. Συνεπώς $\varphi(K) = \varphi_{|H}(K) = K$.

□

Η χαρακτηριστική ιδιότητα είναι πολύ ισχυρή ιδιότητα. Συγκεκριμένα ισχύει.

Έστω H χαρακτηριστική υποομάδα της G και $\varphi \in Aut(G)$, στην ομάδα πηλίκων G/H ορίζουμε την εξής απεικόνιση $\bar{\varphi} : G/H \longrightarrow G/H$ με $\bar{\varphi}(gH) = \varphi(g)H$. Δείξτε ότι η $\bar{\varphi}$ είναι αυτομορφισμός της G/H.

Πράγματι, για $gH,\ rH \in G/H$ έχουμε ότι $\bar{\varphi}(gH{\cdot}rH) = \bar{\varphi}(grH) = \varphi(gr)H = \varphi(g)\varphi(r)H = \varphi(g)H \cdot \varphi(r)H = \bar{\varphi}(gH) \cdot \bar{\varphi}(rH)$. Δηλαδή η $\bar{\varphi}$ είναι ομομορφισμός ομάδων.

(Να ελέγξετε όλες τις ισότητες!)

Προφανώς (να το ελέγξετε !) η $\bar{\varphi}$ είναι 1-1 και επί, άρα $\bar{\varphi} \in Aut(G/H)$.

Ο αυτομορφισμός $\bar{\varphi}$ ονομάζεται ο επαγόμενος αυτομορφισμός από τον φ.

Πρόταση 0.0.3. *Έστω H χαρακτηριστική υποομάδα της G. Τότε η απεικόνιση f : $Aut(G) \longrightarrow Aut(G/H)$ με $f(\varphi) = \bar{\varphi}$ είναι ομομορφισμός ομάδων.*

Απόδειξη. Το μόνο που θέλουμε να αποδείξουμε ότι $\overline{\varphi \circ \vartheta} = \bar{\varphi} \circ \bar{\vartheta}$, το οποίο προφανώς(;) ισχύει, ελέγξτε το!

□

Εδώ γεννώνται τα ερωτήματα: Ποίος είναι ο πυρήνας της f, είναι η f επί;

Τα ερωτήματα αυτά **δεν** έχουν απαντηθεί στην γενικότητά τους.

Μερικά σχόλια για τον πυρήνα της f.

Έστω $\varphi \in Ker\, f$. Τί σημαίναι αυτό; Δηλαδή ο επαγόμενος αυτομορφισμός $\bar{\varphi}$ είναι ο ταυτοτικός αυτομορφισμός της G/H. Αλλά $\bar{\varphi}(gH) = \varphi(g)H$.Επομένως πρέπει να έχουμε $\varphi(g)H = gH$ για όλα τα $g \in G$. Τί σημαίνει η τελευταία ισότητα;

Για κάθε κάθε $g \in G$ υπάρχει $h = h_g \in H$ (εξαρτώμενο από το g), ούτως ώστε $\varphi(g) = gh$.

<u>Εφαρμογή:</u>

Έστω G ομάδα και $Z(G)$ το κέντρο της. Το κέντρο είναι χαρακτηριστική υποομάδα της G (γιατί;)

Πράγματι, έστω $\varphi \in Aut(G)$ και $z \in Z(G)$. Πρέπει να αποδείξουμε ότι $\varphi(z) \in Z(G)$. Έστω $g \in G$, επειδή ο φ είναι αυτομορφισμός της G, υπάρχει (μοναδικό) $r \in G$ με $g = \varphi(r)$. Συνεπώς $\varphi(z) \cdot g = \varphi(g) \cdot \varphi(r) = \varphi(z \cdot r) = \cdots = g \cdot \varphi(z)$, άρα $\varphi(z) \in Z(G)$.

Επομένως, μπορούμε να εφαρμόσουμε την προηγουμένη πρόταση.

Συνεπώς, για κάθε $\varphi \in Aut(G)$ επάγεται ένας αυτομορφισμός $\bar{\varphi} \in Aut(G/Z(G))$.

Να τον περιγράψετε και να υπολογίσετε τον πυρήνα του ομομορφισμού $f : Aut(G) \longrightarrow Aut(G/Z(G))$.

Τα Θεωρήματα ισομορφισμών

Πρώτο Θεώρημα ισομορφισμών.

Έστω $f : G \longrightarrow M$ ομομορφισμός ομάδων. Τότε υπάρχει ένας ισομορφισμός $\bar{f} = G/Kerf \longrightarrow Im\, f$.

Δεύτερο Θεώρημα ισομορφισμών.

Έστω G ομάδα και $A,\, B \leq G$. Υποθέτουμε ότι $B \lhd \langle A,\, B \rangle = \mathrm{AB}$. Τότε ισχύει $A \cap B \lhd A$ και $A/(A \cap B) \sim AB/B$.

Απόδειξη. Πρώτα απ' όλα $\langle A,\, B \rangle = \mathrm{AB}$ (γιατί;)

Τί σημαίνει η υποομάδα η παραγομένη από τις A και B; Κάθε στοιχείο της $\langle A,\, B \rangle$ είναι της μορφής $h = a_1 b_1 a_2 b_2 \cdots a_n b_n$ με $a_i \in A$ και $b_i \in B$. Αλλά η B έχει υποτεθεί κανονική υποομάδα της $\langle A,\, B \rangle$ συνεπώς στην ανωτέρω γραφή του h "τμήματα" της μορφής $a_i b i a_{i+1} = a_i a_{i+1} a_{i+1}^{-1} b i a_{i+1}$ μπορούν να "αντικατασταθούν" από το $\bar{a}_i \bar{b}_i$, όπου $\bar{a}_i = a_i a_{i+1} \in A$ και $\bar{b}_i = a_{i+1}^{-1} b i a_{i+1}$, οπότε τελικά $h = a \cdot b$ με $a \in A,\ b \in B$.

Τώρα ορίζουμε την εξής απεικόνιση $f : A \longrightarrow AB/B$ με $f(a) = aB$.

Δείξτε ότι η f είναι καλά ωρισμένη, ομομορφισμός ομάδων, επί και $Kerf = A \cap B$, οπότε από το πρώτο θεώρημα ισομορφισμών έπεται ότι $A/(A \cap B) \sim AB/B$.

□

Πριν προχωρήσουμε ας θυμηθούμε ορισμένα απλά αποτελέσματα.

Έστω $f : X \longrightarrow Y$ μια απεικόνιση συνόλων. Τότε για κάθε $A \subseteq X$ ορίζεται το σύνολο εικόνα $f(A) = \{\, f(a) \mid a \in A \,\} \subseteq Y$.

Επίσης, για κάθε $B \subseteq Y$ ορίζεται η (πλήρης) αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(B) = \{\, a \in A \mid f(a) \in B \,\} \subseteq X$ (Προσοχή!! Εδώ το f^{-1} **δεν** συμβολίζει την αντίστροφη απεικόνιση της f, δεδομένου ότι η f ενδέχεται να μην αντιστρέφεται).

Προφανώς ισχύουν οι εξής σχέσεις: Για κάθε $B \subseteq Y$ ισχύει ότι $f(f^{-1}(B)) = B$ (γιατί;;)
Για κάθε $A \subseteq X$ ισχύει ότι $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$ (γιατί;;)

Προσοχή!! Ενώ στην πρώτη περίπτωση έχουμε πάντα ισότητα, στην δεύτερη περίπτωση ενδέχεται να έχουμε γνήσιο εγκλεισμό. Μπορείτε να δώσετε ένα παράδειγμα όπου έχουμε γνήσιο εγκλεισμό;;

Ας δούμε τώρα τα προηγούμενα στην περίπτωση ομομορφισμών ομάδων.

Έστω $f : G \longrightarrow M$ ένας ομομορφισμός ομάδων. Τότε για κάθε $A \leq G$ ορίζεται ομάδα εικόνα $f(A) = \{ f(a) \mid a \in A \} \leq M$.

Επίσης, για κάθε $B \leq M$ ορίζεται η (πλήρης) αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(B) = \{ a \in A \mid f(a) \in B \} \leq G$.

Εδώ, όπως προηγουμένως, έχουμε $f(f^{-1}(B)) = B$ και $f^{-1}(f(A)) \geq A$.

Στην δεύτερη σχέση μπορούμε να "μετρήσουμε την διαφορά" μεταξύ $f^{-1}(f(A))$ και A.

Συγκεκριμένα ισχύει:

$f^{-1}(f(A)) = Kerf \cdot A$. Να το αποδείξετε !!!!!

Πόρισμα. (∗)   Αν η υποομάδα A περιέχει τον $Kerf$, τότε $f^{-1}(f(A)) = A$.

Αν ο ομομορφισμός f είναι μονομορφισμός, τότε $f^{-1}(f(A)) = A$ για κάθε υποομάδα A της G.

Θα δείξουμε ένα γενικό Θεώρημα: (*Θεώρημα της αντιστοιχίας*)

Θεώρημα 0.0.4. *Έστω $f : G \longrightarrow M$ ένας επιμορφισμός ομάδων. Έστω $\mathcal{T}$ το σύνολο όλων των υποομάδων της G, οι οποίες περιέχουν τον πυρήνα $Kerf$ και $\mathcal{S}$ το σύνολο των υποομάδων της M. Τότε υπάρχει μια απεικόνιση $\varrho : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{S}$, η οποία είναι 1-1 και επί.*

Επιπλέον, για $H \in \mathcal{T}$, η H είναι κανονική στην G, αν και μόνο αν η $\varrho(H)$ είναι κανονική στην M. Στην περίπτωση αυτή ισχύει $G/H \sim M/\varrho(H)$.

Απόδειξη. Ορίζουμε την απεικόνιση $\varrho : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{S}$ ως εξής:

$\varrho(A) = f(A)$, προφανώς η ϱ είναι καλά ορισμένη, 1-1 και επί (γιατί;;).

Όλα έχουν προηγηθεί. Να γράψετε κομψά την απόδειξη.

(Σημείωση: Μέχρι εδώ δεν χρησιμοποιήσαμε ότι η f είναι επί).

Έστω τώρα H μια κανονική υποομάδα της G. Θα δείξουμε ότι η $f(H)$ είναι κανονική υποομάδα της M.

Έστω $b \in f(H)$ και $r \in M$. Τότε υπάρχουν $a \in H$ και $g \in G$, ούτως ώστε $b = f(a)$ και $r = f(g)$ (εδώ χρησιμοποιούμε ότι η f είναι επί).

Οπότε, $rbr^{-1} = f(g)f(a)f(g^{-1}) = f(gag^{-1})$, αλλά η H έχει υποτεθεί κανονική υποομάδα της G, συνεπώς $rbr^{-1} \in f(H)$ και επομένως η $f(H)$ είναι κανονική υποομάδα της M.

Αντίστροφα, έστω K κανονική υποομάδα της M, τότε η υποομάδα $H = f^{-1}(K)$ έχει την ιδιότητα $f(H) = K = \varrho(H)$ και είναι η μοναδική με αυτή την ιδιότητα (γιατί;)

Πράγματι, η $H = f^{-1}(K) \in \mathcal{T}$ και αν υπήρχε μια άλλη $L \in \mathcal{T}$ με $f(L) = K$, τότε αφ' ενός $f^{-1}(f(L)) = f^{-1}(K) = H$, αφ' ετέρου $f^{-1}(f(L)) = KerfL = L$ αφού $Kerf \leq L$ (διαφορετικά, δεν ξεχνάμε ότι η απεικόνιση ϱ είναι 1-1 και επί).

Επίσης, η $H = f^{-1}(K)$ είναι κανονική στην G (μπορούμε να κάνουμε τον έλεγχο κανονικότητας).

Αλλά μπορούμε να δούμε ότι αν πάρουμε την σύνθεση απεικονίσεων $f : G \longrightarrow M$ και $\varphi : M \longrightarrow M/K$, τότε $Ker(\varphi \circ f) = H$ καθ' ότι $(\varphi \circ f)(H) = \varphi(f(H)) = \varphi(K) = K$. Συνεπώς, από το πρώτο θεώρημα τψν ισομορφισμών έχουμε $G/H = G/Ker(\varphi \circ f) \sim M/K$ ...και τέλος.

□

Τρίτο Θεώρημα ισομορφισμών. Έστω G ομάδα και K κανονική υποομάδα της G. Για κάθε $M \leq G/K$ υπάρχει $H \leq G$ με $K \leq H \leq G$, ούτως ώστε $M = H/K$. Αν επιπλέον η M είναι κανονική στην G/K, τότε η H είναι κανονική στην G και ισχύει $G/H \sim (G/K)/(H/K)$.

Απόδειξη. Είναι απλή εφαρμογή των προηγουμένων.

Εδώ έχουμε για τον φυσικό επιμορφισμό $f : G \longrightarrow G/K$ να πληρούνται όλες οι υποθέσεις του προηγουμένου θεωρήματος. Επομένως $Kerf = K$ και για κάθε $H \leq G$ με $K \leq H$ έχουμε ότι η $H/K = f(H) \leq G/K$ και αν H κανονική στην G, τότε H/K είναι κανονική στην G/K και $G/H \sim (G/K)/(H/K)$.

□

Μια άσκηση.

Έστω A, B πεπερασμένες υποομάδες της G. Δείξτε ότι $\mid A \cdot B \mid = \frac{|A| \cdot |B|}{|A \cap B|}$.

Μερικά σχόλια. Το σύνολο **δεν** είναι κατ' ανάγκη υποομάδα.

Αν όμως μια από τις δύο υποομάδες είναι κανονική στην G τότε το σύνολο $A \cdot B$ είναι υποομάδα και τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το δεύτερο θεώρημα των ισομορφισμών και να απαντήσουμε (παν)εύκολα στο προηγούμενο πρόβλημα. Πράγματι, έχουμε

$A/(A \cap B) \sim AB/B$, οπότε το αποτέλεσμα είναι εμφανές.

Να δώσετε μια απάντηση στο ανωτέρω ερώτημα όταν καμία από τις υποομάδες δεν είναι κανονική υποομάδα.

Η παράγωγος υποομάδα

Έστω G μια ομάδα, η οποία δεν είναι αβελιανή. Γεννάται το ερώτημα: Πώς μπορούμε να να αποφανθούμε "πόσο απέχει" από του να είναι αβελιανή;

Η φράση "πόσο απέχει" δεν είναι μαθηματική και μόνο διαισθητικά μπορούμε να την δεχθούμε,

Θα προσπαθήσουμε να της προσδώσουμε περιεχόμενο.

Έστω G μια ομάδα και $g, r \in G$. Πέρνουμε τα γινόμενα gr και rg. Γενικά $gr \neq rg$.

Παρατηρούμε ότι $gr(rg)^{-1} = grg^{-1}r^{-1}$. Επομένως ισχύει ότι $gr \neq rg$, αν και μόνο αν $grg^{-1}r^{-1} \neq 1$. Συνεπώς το στοιχείο $[a, b] = grg^{-1}r^{-1}$ "μετρά" κατά πόσον τα στοιχεία a, b απέχουν από το να μετατίθενται. Μάλιστα δε θα ονομάζεται στο εξής ως ο **μεταθέτης** των a, b.

Προφανείς ιδιότητες ενός μεταθέτη είναι: $([a, b])^{-1} = [b, a]$ και για κάθε ενδομορφισμό $\vartheta : G \longrightarrow G$ ισχύει ότι $\vartheta([a, b]) = [\vartheta(a), \vartheta(b)]$.

Προσοχή! Το γινόμενο δύο μεταθετών δεν είναι, κατ' ανάγκη μεταθέτης. Μπορείτε να δώσετε ένα παράδειγμα; (τώρα ίσως είναι δύσκολο αργότερα θα δούμε τέτοια παραδείγματα).

Επειδή το γινόμενο όλων των μεταθετών μιας ομάδας G δεν αποτελεί (κατ' ανάγκη) υποομάδα, λαμβάνουμε την υποομάδα $G' = \langle [g, r] \mid g, r \in G \rangle$, την παραγωμένη από όλους τους μεταθέτες της G. Η G' θα ονομάζεται **παράγωγος** υποομάδα της G, ή ομάδα μεταθετών της G (συνήθως θα την συμβολίζουμε και με $[G, G]$, ή $\gamma_2(G)$).

Γενικά, αν A, B είναι δύο (μη κενά) υποσύνολα μιας ομάδας G, τότε ορίζεται η ομάδα $[A, B] = \langle [a, b] \mid a \in A, b \in B \rangle$.

Η παράγωγος υποομάδα μιας ομάδας είναι πολύ σημαντική στην μελέτη της ομάδας.

Θα αναφέρουμε μερικές ιδιότητες.

Πρόταση 0.0.5. *Έστω G μια ομάδα, για την παράγωγο υποομάδα της ισχύουν:*

i) Η G' είναι πλήρως αναλλοίωτη υποομάδα (συνεπώς και κανονική).

ii) Η ομάδα πηλίκων G/G' είναι αβελιανή.

iii) Αν $N \lhd G$ και G/N αβελιανή, τότε $G' \leq N$.

iv) Αν $G' \leq N$, τότε $N \lhd G$ και η G/N είναι αβελιανή.

Απόδειξη. *i)* Ο ισχυρισμός είναι προφανής από την επισήμανση ότι, για κάθε ενδομορφισμό $\vartheta : G \longrightarrow G$ ισχύει ότι $\vartheta([a, b]) = [\vartheta(a), \vartheta(b)]$.

ii) Έστω $gG',\, rG' \in G/G'$, τότε $(gG')\cdot(rG') = (gr)G'$ και $(rG')\cdot(gG') = (rg)rG'$, αλλά $(gr)\cdot(rg)^{-1} = [g,\, r] \in G'$. Συνεπώς $(gG')\cdot(rG') = (rG')\cdot(gG')$ (γιατί;; Πότε δύο σύμπλοκα είναι ίσα;)

iii) Υποθέτουμε ότι η ομάδα G/N είναι αβελιανή. Για $gN,\, rN \in G/N$ έχουμε $(gN)\cdot(rN) = (gr)N$ και $(rN)\cdot(gN) = (rg)N$. Συνεπώς από την υπόθεση $(gN)\cdot(rN) = (rN)\cdot(gN)$ έπεται ότι $(gr)(rg)^{-1} = [g,\, r] \in N$ και αυτό για κάθε $g,\, r \in G$ συνεπώς $G' \leq N$.

iv) Έστω $g \in G$ και $r \in N$, τότε $grg^{-1} = grg^{-1}rr^{-1} = [g,\, r]r$, αλλά έχει υποτεθεί ότι $G' \leq N$, οπότε από την τελευταία ισότητα έπεται ότι $grg^{-1} \in N$. Άρα $N \lhd G$.

Προφανώς, όπως στο *ii)*, η ομάδα πηλίκων G/N είναι αβελιανή.

$\square$

<u>Ερώτημα:</u> Θα μπορούσαμε στο *iv)* να δούμε με άλλο τρόπο ότι η G/N είναι αβελιανή;

Από την πρόταση αυτή έπεται ότι η παράγωγος υποομάδα G' είναι η "μικρότερη" κανονική υποομάδα της G, ούτως ώστε το πηλίκο να είναι αβελιανή ομάδα. (Εξ ου και το σχόλιο στην αρχή ότι η παράγωγος υποομάδα μας "δείχνει κατά πόσο απέχει η ομάδα από του να είναι αβελιανή").

Η υπολογισμός της παραγώγου υποομάδας μιας (τυχαίας) ομάδας τις περισσότερες φορές δεν είναι εφικτός. Ας δούμε όμως μερικά παραδείγματα.

i) Έστω $G = S_n,\ n \geq 3$ η συμμετρική ομάδα σε n σύμβολα. Θεωρούμε γνωστό το εξής:

$(*)$ Η εναλλάσουσα υποομάδα A_n, δηλαδή η ομάδα των αρτίων μεταθέσεων Παράγεται από τους κύκλους $(a,\, b,\, c)$ μήκους τρία.

Τώρα, είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι $(a,\, b,\, c) = (b,\, c)(a,\, b)(b,\, c)(a,\, b) = [(b,\, c),\, (a,\, c)] \in S'_n$. Συνεπώς $A_n \leq S'_n$.

Προφανώς ισχύει και ο αντίστροφος εγκλισμός $A_n \geq S'_n$ (γιατί;). Άρα $A_n = S'_n$.

ii) Έστω $G = D_n$
$langle \varphi,\, \beta \mid \beta\varphi\beta = \varphi^{n-1} \rangle$, όπου ως γνωστόν κάθε στοιχείο της είναι της μορφής $\varphi^i\beta^j$ με $i = 1,\, 2,\, \dots,\, n$ και $j = 1,\, 2$.

Παρατηρούμε ότι $D'_n \leq \langle \varphi \rangle$ (γιατί;)

Επίσης, για τυχαία στοιχεία $a,\, b \in D_n$ ο μεταθέτης $[a,\, b] = \cdots = \varphi^{2k} \in\leq \langle \varphi^2 \rangle$ (γιατί;). Συνεπώς $D'_n \leq \langle \varphi^2 \rangle$.

Μπορούμε να συμπληρώσουμε τα $\cdots$ και να απαντήσουμε στα (γιατί;)

Θα μπορούσαμε να προσεγγίσουμε το πρόβλημα χωρίς να μπούμε στον κόπο να κάνουμε πράξεις.

Η υποομάδα $\langle \varphi^2 \rangle$ είναι κανονική στην D_n (γιατί;).

Το πηλίκο $D_n/\langle \varphi^2 \rangle$ είναι αβελιανή ομάδα (γιατί;)

Άρα $D'_n \leq \langle \varphi^2 \rangle$.

Τώρα, $[\varphi,\, \beta] = \varphi^2 \in D'_n$ (γιατί;).

Άρα τελικά $D'_n = \langle \varphi^2 \rangle$.

Ας απαντήσουμε στο

$(*)$ Η εναλλάσουσα υποομάδα A_n, δηλαδή η ομάδα των αρτίων μεταθέσεων Παράγεται από τους κύκλους $(a,\, b,\, c)$ μήκους τρία. $(*)$

Προφανώς κάθε άρτια μετάθεση (το λέει και το όνομά της) είναι γινόμενο από μεταθέσεις της μορφής

$(a,\, b)(c,\, d)$.Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. Οι αντιμεταθέσεις έχουν κοινό στοιχείο. Στην περίπτωση αυτή έχουμε $(a,\, b)(b,\, d) = (b,\, d,\, a)$

2. Οι αντιμεταθέσεις είναι ξένες μεταξύ τους. Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$(a,\, b)(c,\, d) = (a,\, b)(a,\, c)(c,\, a)(c,\, d) = (a,\, c,\, b)(c,\, d,\, a)$

και τέλος.