

Ασκήσεις Α

Ορολογία: Έστω ότι η ομάδα G δρα επί του συνόλου X , τότε το σύνολο θα ονομάζεται G -σύνολο και μια απεικόνιση $\varphi : X \rightarrow Y$ μεταξύ δύο G -συνόλων θα ονομάζεται G -απεικόνιση αν για κάθε $x \in X$ ισχύει: $g \cdot \varphi(x) = \varphi(g \cdot x)$ για κάθε $g \in G$ και $x \in X$. Ένα υποσύνολο Y ενός G -συνόλου θα ονομάζεται G -υποσύνολο, αν είναι G -σύνολο ως προς τον περιορισμό της δράσης της G στο σύνολο Y .

1. Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα, η οποία δρα πιστά στο πεπερασμένο σύνολο X , με τροχιές X_1, X_2, \dots, X_k . Υποθέτουμε ότι κάθε τροχιά έχει πληθικό αριθμό $|X_i| = n_i$. Δείξτε ότι η G μπορεί να εμφυτευθεί στην $S_{n_1} \times S_{n_2} \times \dots \times S_{n_k}$.
2. Έστω V διανυσματικός χώρος επί ενός σώματος F διάστασης n . Να μελετήσετε την δράση της πολλαπλασιαστικής ομάδος F^* του σώματος F επί του V (τροχιές, σταθεροποιούσες, ...). Είναι πιστή;
Να εντυφείσετε περισσότερο όταν το σώμα είναι πεπερασμένο.
3. Έστω G πεπερασμένη απλή ομάδα και H υποομάδα της δείκτου πρώτου αριθμού p . Δείξτε ότι ο p είναι ο μεγαλύτερος πρώτος διαιρέτης της G και ότι ο p^2 δεν διαιρεί την τάξη της G .
4. Ένα (μη κενό) G -σύνολο θα ονομάζεται *ανάγωγο* αν το μόνο (μη κενό) G -υποσύνολο είναι το X .
 - (α') Έστω X ένα G -σύνολο. Δείξτε ότι οι τροχιές είναι τα μόνα ανάγωγα G -υποσύνολα του X . Δηλαδή η δράση είναι μεταβατική αν και μόνο αν το X είναι ανάγωγο.
 - (β') Έστω φ μια G -απεικόνιση μεταξύ των G -συνόλων X και Y . Δείξτε ότι η εικόνα $Im\varphi$ είναι G -υποσύνολο του Y . Συνεπώς αν το Y είναι ανάγωγο, τότε αναγκαστικά η φ είναι επί.
 - (γ') Έστω X ένα πεπερασμένο G -σύνολο. Δείξτε ότι το σύνολο, έστω S_X^G , των 1-1 και επί G -απεικονίσεων από το X στο X αποτελεί υποομάδα της S_X . Μάλιστα δε, αν το X είναι ανάγωγο, τότε $|S_X^G| \leq |X|$.
 - (δ') Έστω G ομάδα και $H \leq G$. Αν X είναι το G -σύνολο των αριστερών συμπλόκων της H στην G , δείξτε ότι το X είναι ανάγωγο και $S_X^G \approx N_G(H)/H$.
5. Έστω G πεπερασμένη ομάδα, η οποία δρα μεταβατικά επί του πεπερασμένου συνόλου X με $|X| = n$. Δείξτε ότι $|G|$ είναι πολλαπλάσιο του n . Δώστε ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε $|G| = n$.
6. Έστω G ομάδα με τάξη ίση με $2r$, όπου $r > 1$ περιττός. Έστω g ένα στοιχείο της G με τάξη ίση με 2 (*). Αν ρ είναι η αναπαράσταση της G , δείξτε ότι $\rho(g)$ είναι περιττή μετάθεση. Επομένως η G δεν είναι απλή ομάδα.
(* Δείξτε (χωρίς το Θεώρημα Sylow) ότι πράγματι υπάρχει στοιχείο τάξης 2.
7. Έστω \mathbb{F} ένα σώμα με χαρακτηριστική διάφορο του 2 και $G = GL_n(\mathbb{F})$. Για $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, ορίζουμε T_i τον διαγώνιο πίνακα όπου τα i πρώτα στοιχεία της διαγωνίου είναι ίσα με 1 και τα υπόλοιπα ίσα με -1. Δείξτε ότι κάθε στοιχείο τάξης 2 της ομάδας G είναι συζυγές με έναν από τους πίνακες T_i και ότι δύο πίνακες T_i, T_j δεν είναι συζυγείς μεταξύ τους.
8. Έστω G μια ομάδα με $k(G)$ θα συμβολίζουμε τον αριθμό των κλάσεων συζυγίας της.

(α') Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα και p ο μικρότερος πρώτος διαιρέτης της τάξης της G . Υποθέτουμε ότι $k(G) > |G|/p$, δείξτε ότι $Z(G) \neq 1$.

(β') Έστω G πεπερασμένη μη αβελιανή ομάδα.

Δείξτε ότι $k(G) > |Z(G)| + 1$.

Αν $|G| = p^3$, p -πρώτος, δείξτε ότι $|Z(G)| = p$ και

$k(G) = p^2 + p - 1$.

Αν $H \triangleleft G$, δείξτε ότι $k(G/H) \leq k(G) - j + 1$, όπου j είναι ο αριθμός των G -κλάσεων συζυγίας των στοιχείων της H .

Αν το πηλίκο $G/Z(G)$ είναι αβελιανή ομάδα, τότε

$k(G) \geq |G/Z(G)| + |Z(G)| - 1$.

Αν ο $k(G)$ είναι άρτιος, τότε η τάξη της G είναι άρτια. Δώστε παράδειγμα όπου το αντίστροφο δεν ισχύει.

9. (Θεώρημα του Cauchy) Έστω G πεπερασμένη ομάδα και p ένας πρώτος διαιρέτης της τάξης της G . Δείξτε ότι υπάρχει στοιχείο της G με τάξη ίση με p .

(Η απόδειξη να γίνει χωρίς το Θεώρημα του Sylow.)