Αρμονική Ανάλυση (2023–24)
13 Σεπτεμβρίου 2024

1. (1+1.5 μ.) (α) Έστω $(K_\delta)_{\delta>0}$ οικογένεια καλών πυρήνων στον $\mathbb{R}^n$ και $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση. Έστω επίσης $x_0\in\mathbb{R}^n$ ώστε η f να είναι συνεχής στο x_0. Δείξτε ότι $(f*K_\delta)(x_0)\overset{\delta\to0^+}{\longrightarrow} f(x_0)$.

(β) Έστω $S(t)=\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_ke^{ikt}$, $t\in\mathbb{T}$, τριγωνομετρική σειρά ($c_k\in\mathbb{C}$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$) με Cesàro μέσους $\sigma_n(t)=\displaystyle\sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)c_ke^{ikt}$, $t\in\mathbb{T}$. Δείξτε ότι η $S(t)$ είναι σειρά Fourier μιας συνεχούς συνάρτησης $f\in C(\mathbb{T})$ αν και μόνο αν η $(\sigma_n)_{n\geqslant1}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στον $\mathbb{T}$.

2. (1+1.5 μ.) (α) Έστω $f,g\in L^1(\mathbb{R}^n)$. Δείξτε ότι $f*g\in L^1(\mathbb{R}^n)$ και ότι $\widehat{f*g}(\xi)=\widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$ για κάθε $\xi\in\mathbb{R}^n$.
(β) Εξετάστε αν υπάρχει $g\in L^1(\mathbb{R}^n)$ ώστε $f*g=f$ για κάθε $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$.

3. (1+1.5 μ.) (α) Έστω $f\in L^1(\mathbb{R})$ και έστω T_f το σύνολο

$$T_f=\left\{g\in L^1(\mathbb{R}):g(x)=\sum_{k=1}^{n}a_kf(x+b_k),\ x\in\mathbb{R},\ \text{για κατάλληλα } a_k,b_k\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N},k=1,2,\dots,n\right\}$$

των πεπερασμένων γραμμικών συνδυασμών μεταφορών της f. Θεωρούμε επίσης το σύνολο $\overline{T_f}$, την κλειστή θήκη του T_f στον $(L^1(\mathbb{R}),\|\cdot\|_1)$. Δείξτε ότι αν για κάποιο $\xi_0\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $\widehat{f}(\xi_0)=0$ τότε $\widehat{g}(\xi_0)=0$ για κάθε $g\in\overline{T_f}$.
(β) Αν $f\in L^1(\mathbb{R})$ και $\overline{T_f}=L^1(\mathbb{R})$ τότε δείξτε ότι $\widehat{f}(\xi)\neq0$ για κάθε $\xi\in\mathbb{R}$.
Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε αν θέλετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\pi t^2}e^{2\pi itx}dt=e^{-\pi x^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\pi t^2}dt=e^{-\pi x^2}.$$

4. (1+1.5 μ.) (α) Έστω $f,g\in L^2(\mathbb{R})$. Δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)g(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\xi)\widehat{g}(-\xi)\,d\xi.$$

(β) Υπολογίστε τον μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $f(x)=(1-|x|)\chi_{[-1,1]}(x)$, $x\in\mathbb{R}$ και κατόπιν υπολογίστε το $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^4dx$.

5. (1+1.5 μ.) (α) Έστω $f\in L^1(\mathbb{T})$ και $A\subseteq\mathbb{T}$ μετρήσιμο. Δείξτε ότι η σειρά $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k(f)\int_A e^{ikt}dt$ είναι Cesàro αθροίσιμη στον αριθμό $\displaystyle\int_A f(t)\,dt$.
(β) Έστω $f\in L^2(\mathbb{T})$. Ορίζουμε

$$F(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|s_n(f,x)-\sigma_n(f,x)|^2}{n}\right)^{1/2},\quad x\in\mathbb{T}.$$

Δείξτε ότι $F\in L^2(\mathbb{T})$ και $\|F\|_2\le\|f\|_2$. Ειδικότερα, συμπεράνατε ότι $F(x)<\infty$ σχεδόν για κάθε $x\in\mathbb{T}$.

Καλή Επιτυχία!