Αρμονική Ανάλυση (2023–24)
21 Ιουνίου 2024

1. (1+1.5 μ.) (α) Έστω $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ και $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ δύο σ-πεπερασμένοι χώροι μέτρου και $f : X_1 \times X_2 \to [0, +\infty)$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι

$$\left\| \int_{X_2} f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \right\|_{L^p(X_1)} \leqslant \int_{X_2} \|f(x_1, x_2)\|_{L^p(X_1)}\, d\mu_2(x_2).$$

(β) Έστω (K_n) ακολουθία καλών πυρήνων στον κύκλο $\mathbb{T} = (-\pi, \pi]$ και έστω $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 \leqslant p < \infty$. Δείξτε ότι $\|f * K_n - f\|_p \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ και συμπεράνατε ότι $\|\sigma_n(f) - f\|_p \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

2. (1.5+1 μ.) (α) Έστω $(K_\delta)_{\delta>0}$ προσέγγιση της μονάδας στον $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ υπάρχει $C > 0$ ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ να ισχύει ότι

$$\sup_{\delta>0} |(f * K_\delta)(x)| \leqslant C f^*(x).$$

(β) Έστω $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g_n(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1 - \cos nx}{nx^2}$, $x \neq 0$ και $g_n(0) = \frac{n}{2\pi}$, $n \geqslant 1$. Δείξτε ότι για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R})$ ισχύει ότι $\|g_n * f - f\|_1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. [Θεωρήστε γνωστό το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 du = \pi$.]

3. (1+1.5 μ.) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-περιοδική Lipschitz συνάρτηση.

(α) Δείξτε ότι υπάρχει $A > 0$ ώστε $|k c_k(f)| \leqslant A$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ στε $\|s_n(f)\|_\infty \leqslant M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

4. (1.5+1 μ.) (α) Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \ a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & , \ x \notin [a, b] \end{cases},$$

όπου $-\pi < a < b < \pi$, την οποία επεκτείνουμε σε 2π-περιοδική συνάρτηση. Δείξτε ότι η σειρά Fourier της f είναι η

$$S(f, x) \sim \frac{b - a}{2\pi} + \sum_{k \neq 0} \frac{e^{-ika} - e^{-ikb}}{2\pi i k}\, e^{ikx}$$

με $S(f, x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{T} \setminus \{a, b\}$.
(β) Δίνεται $a \in (-\pi, \pi)$. Υπολογίστε, με τη βοήθεια του (α), τα αθροίσματα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(ka)}{k} \qquad \text{και} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2(ka)}{k^2}.$$

5. (1+1 μ.) (α) Έστω $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Ορίζουμε $F(x) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x + k)$, $\quad x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η σειρά $F(x)$ συγκλίνει απολύτως για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ότι η F είναι 1-περιοδική και $F \in L^1([0, 1])$ με $\displaystyle\int_0^1 F(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt$.
(β) Υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της F

$$c_k(F) := \int_0^1 F(x) e^{-2\pi i k x} dx.$$

Συγκεκριμένα, δείξτε ότι $c_k(F) = \widehat{f}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Καλή Επιτυχία!