Ασκήσεις (Κεφ. 3)

3) Έστω E μετρήσιμο, $1 \le p < +\infty$, $f_n, f \in L^p(E)$ τ.ω: $f_n \longrightarrow f$ σχεδόν παντού. Δ.ό: $\|f_n - f\|_p \longrightarrow 0 \Leftrightarrow \|f_n\|_p \longrightarrow \|f\|_p$

Λύση: • "$\Rightarrow$": $\big|\|f_n\|_p - \|f\|_p\big| \le \|f_n - f\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow \|f_n\|_p \to \|f\|_p$

• "$\Leftarrow$": Παραλλαγή του ΘΚΣ: Αν $f_n \longrightarrow f$, $g_n \longrightarrow g$, $|f_n| \le g_n$ και $g_n, g \in L^1$ με $\int g_n \, d\lambda \longrightarrow \int g \, d\lambda$, τότε $f_n, f \in L^1$ και $\int f_n d\lambda \longrightarrow \int f d\lambda$.

Θεωρούμε τις $\|f_n - f\|_p \longrightarrow 0$ (από υπόθεση)

Φράσσουμε το $|f_n - f|^p \le (|f_n| + |f|)^p \le (2\max\{|f_n|, |f|\})^p$

$$\le 2^p \cdot (|f_n|^p + |f|^p) \xrightarrow{n\to\infty} 2^p \cdot (|f|^p + |f|^p)$$
$$= 2^p \cdot 2|f|^p$$
$$= 2^{p+1}|f|^p$$

Θέτω $g = 2^{p+1}|f|^p$ και $g_n = 2^p(|f_n|^p + |f|^p)$

Τότε g, g_n ολοκληρώσιμες, αφού f, f_n ολοκληρώσιμες, και $g_n \xrightarrow{n\to\infty} g$, $|f_n - f|^p \le g_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Από γενικευμένο Θ.Κ.Σ.: $\int |f_n - f|^p \, d\lambda \longrightarrow 0 \Rightarrow \|f_n - f\|_p \longrightarrow 0$

5) Έστω E μετρήσιμο, με $0 < \lambda(E) < +\infty$ και $1 \le p < q < +\infty$

(α) Αν $f: E \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη νδο: $\|f\|_q \le \|f\|_p \cdot \lambda(E)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$

(β) Νδο: $L^q(E) \subseteq L^p(E)$

(γ) Νδο: $L^q(E) \ne L^p(E)$

Συζυγής εκθέτης z: $\frac{1}{z} + \frac{1}{q/p} = 1$
$\Leftrightarrow z = 1 - \frac{p}{q} = \frac{q-p}{q}$

Λύση: (α) $\int_E |f|^p = \int_E |f|^p \cdot 1 \overset{\text{Hölder}}{\le} \left(\int_E (|f|^p)^{q/p}\right)^{p/q} \cdot \left(\int_E 1^{\frac{q-p}{q}}\right)^{1-\frac{p}{q}}$

$= \left(\int_E |f|^q\right)^{p/q} \cdot \left(\int_E 1\right)^{1-\frac{p}{q}} = \left(\int_E |f|^q\right)^{p/q} \lambda(E)^{1-\frac{p}{q}} \Longrightarrow$

$$\|f\|_p \leq \left(\int_E |f|^q\right)^{1/q} \cdot \lambda(E)^{\frac{1}{p}\left(1-\frac{p}{q}\right)} = \left(\int_E |f|^q\right)^{1/q} \cdot \lambda(E)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$$
$$= \|f\|_q \cdot \lambda(E)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$$

β) Αν $f \in L^q \xRightarrow{(\alpha)} \|f\|_p \leq \underbrace{\|f\|_q}_{<+\infty} \cdot \underbrace{\lambda(E)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}_{<+\infty} < +\infty \Rightarrow f \in L^p$

(*) Αν $\lambda(E) = +\infty$ δεν ισχύει το (β).

π.χ. $E = (1, +\infty)$, $f = \frac{1}{x}$. Τότε $f \notin L^1$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = +\infty$, αλλά $f \in L^2$: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1$

γ) Θέλουμε να βρούμε $f \in L^p \setminus L^q$

Γράφουμε $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, E_n ξένα ανά δύο με $\lambda(E_n) = \frac{\lambda(E)}{2^n}$

Ορίζουμε $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot \chi_{E_n}$, για κάποια $\alpha_n > 0$

Τότε έχω: $f \in L^p \Leftrightarrow \|f\|_p < +\infty \Leftrightarrow \left(\int |f|^p\right)^{1/p} < +\infty \Leftrightarrow$

$$\left(\int \Big|\overbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot \chi_{E_n}}^{>0}\Big|^p\right)^{1/p} < +\infty \Leftrightarrow$$

$$\left(\int \left(\sum_{n=1}^{p} \alpha_n \cdot \chi_{E_n}\right)^p\right)^{1/p} < +\infty \Leftrightarrow$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^p \int \chi_{E_n}^p\right)^{1/p} < +\infty \Leftrightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^p \cdot \lambda(E_n) < +\infty$$

και $f \notin L^q \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^q \lambda(E_n) = +\infty$, αντίστοιχα.

Άρα θέλουμε: $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^p \cdot \frac{\lambda(E)}{2^n} < +\infty$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^q \frac{\lambda(E)}{2^n} < +\infty \overset{\lambda(E)<\infty}{\Leftrightarrow}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^p}{2^n} < +\infty \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^q}{2^n} < +\infty$$

Για $a_n^q = 2^n \Rightarrow a_n = 2^{n/q}$ είναι: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^p}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\frac{p \cdot n}{q}}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(\frac{p}{q}-1)} =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(1-\frac{p}{q})}} < +\infty$, διότι $1 - \frac{p}{q} < 1$

Και: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^q}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty$

Οπότε $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n/q} \cdot \chi_{E_n} \in L^p(E) \setminus L^q(E) \Rightarrow L^q \subsetneq L^p$.

6) Έστω E μετρήσιμο, $1 \le p < q < r < +\infty$. Νδο $\forall f \in L^q(E)$ γράφεται στη μορφή $f = g + h$ για κάποιες $g \in L^p(E)$ και $h \in L^r(E)$.

Υπόδειξη: Θεωρήστε το $B = \{|f| > 1\}$ και τις $g = f \cdot \chi_B$, $h = f - g$

Λύση: • Αν $|f(x)| \ge 1 \Rightarrow |f(x)|^p \le |f(x)|^q$

• Αν $|f(x)| \le 1 \Rightarrow |f(x)|^r \le |f(x)|^q$

Θεωρούμε το $B = \{|f| > 1\}$, $g = f \cdot \chi_B$ και $h = f - g = f - f \cdot \chi_B = f \cdot \chi_{B^c}$

Τότε $f = g + h$

Επιπλέον: • $\int_E |g|^p = \int_E |f \cdot \chi_B|^p = \int_E |f|^p \cdot \chi_B^p = \int_B |f|^p \overset{\text{στο } B = \{|f|>1\}}{\le} \int_B |f|^q < +\infty$

διότι $f \in L^q(E)$, άρα $g \in L^p(E)$.

• $\int_E |h|^r = \int_E |f \cdot \chi_{B^c}|^r = \int_E |f|^r \cdot \chi_{B^c}^r = \int_{B^c} |f|^r \overset{\text{στο } B^c = \{|f| \le 1\}}{\le} \int_{B^c} |f|^q < +\infty$

άρα $h \in L^r(E)$.

7) Έστω E μετρήσιμο, $1 \le p < r < +\infty$. Νδο: αν $f \in L^p(E) \cap L^r(E)$ τότε $f \in L^q(E)$ για κάθε $p \le q \le r$.

10) Έστω E μετρήσιμο, $p, r \ge 1$. Αν $t \in (0,1)$ και $q = tp + (1-t)r$ νδο: για κάθε μετρήσιμη $f: E \to \mathbb{R}$ ισχύει

$\|f\|_q^q \le \|f\|_p^{tp} + \|f\|_r^{(1-t)r}$ (1)

<u>Λύση:</u> Έστω $f \in L^p(E) \cap L^r(E) \Rightarrow \exists t \in (0,1)$ ώστε
$q = tp + (1-t)r \quad (p \leq q \leq r)$

Θα δείξουμε την (1). Έχουμε:

$$\|f\|_q^q = \int |f|^q = \int |f|^{tp+(1-t)r} = \int |f|^{tp} \cdot |f|^{(1-t)r} = \left(\int |f|^p\right)^t \cdot \left(\int |f|^r\right)^{1-t}$$

$$= \big(\underbrace{\|f\|_p^p}_{<+\infty,\ f \in L^p}\big)^t \cdot \big(\underbrace{\|f\|_r^r}_{<+\infty,\ f \in L^r}\big)^{1-t} = \|f\|_p^{pt} \cdot \|f\|_r^{r(1-t)} < +\infty$$

$$\Rightarrow \|f\|_q < +\infty \Rightarrow f \in L^q(E)$$

12) Έστω (f_n) ακολουθία μετρήσιμων $f_n \geq 0$ στον $L^1(\mathbb{R})$ με $\int f_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$

Υποθέτουμε ότι: $\forall \delta > 0 \quad \lim_{n \to \infty} \int_{|x|>\delta} f_n = 0$

Νδο: $\forall p > 1 \quad \lim_{n \to \infty} \|f_n\|_p = +\infty$

<u>Λύση:</u> $\bullet \displaystyle\int_{|x|<\delta} f_n = \int_{-\delta}^{\delta} f_n = \int f_n \cdot \chi_{[-\delta,\delta]} \overset{\text{Hölder}}{\leq} \underbrace{\left(\int f_n^p\right)^{1/p}}_{=\left(\int |f_n|^p\right)^{1/p}} \cdot \left(\int \chi_{[-\delta,\delta]}^q\right)^{1/q}$

όπου p, q συζυγείς εκθέτες. αφού $f_n \geq 0$

$\bullet$Οπότε: $\displaystyle\int_{-\delta}^{\delta} f_n \leq \|f_n\|_p \cdot \left(\lambda([-\delta,\delta])\right)^{1/q} = \|f_n\|_p \cdot (2\delta)^{1/q}$

$$\Rightarrow \|f_n\|_p \geq \frac{1}{(2\delta)^{1/q}} \int_{-\delta}^{\delta} f_n = \frac{1}{(2\delta)^{1/q}} \left(\int f_n - \int_{|x|>\delta} f_n\right) = \frac{1}{(2\delta)^{1/q}} \left(1 - \int_{|x|>\delta} f_n\right)$$

$$\Rightarrow \liminf_{n \to \infty} \|f_n\|_p \geq \frac{1}{(2\delta)^{1/q}} (1-0) = \frac{1}{(2\delta)^{1/q}}, \text{ για κάθε } \delta > 0$$

Αφήνοντας το $\delta \to +\infty$ έχουμε: $\|f_n\|_p \xrightarrow{n \to \infty} 0$ (?)

13) Έστω E μετρήσιμο, $p \geq 1$ και $f \in L^p(E)$. Νδο:

$$\int |f|^p = p \int_0^\infty t^{p-1} \lambda(\{x \in E : |f(x)| > t\})\, dt$$

<u>Λύση</u>: $\displaystyle \int_E |f(x)|^p dx = \int_E \left(\int_0^{|f(x)|} p \cdot t^{p-1} dt \right) dx$

$$= \int_E \left(\int_0^{+\infty} p\, t^{p-1} \cdot \chi_{\{0 \leq t \leq |f(x)|\}}\, dt \right) dx$$

$$\overset{\text{Tonelli}}{=} \int_0^\infty p\, t^{p-1} \left(\int_E \chi_{\{0 \leq t \leq |f(x)|\}}\, dx \right) dt$$

$$= \int_0^\infty p\, t^{p-1} \left(\int_E \chi_{\{|f(x)| \geq t\}}\, dx \right) dt$$

$$= \int_0^\infty p\, t^{p-1} \cdot \lambda(\{x \in E : |f(x)| > t\})\, dt$$

$$= p \int_0^\infty t^{p-1} \lambda(\{x \in E : |f(x)| > t\})\, dt$$

16) Έστω E μετρήσιμο, $0 < \lambda(E) < +\infty$, $f : E \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη
Νδο: $\lim_{p \to \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$

<u>Λύση</u>: • Αρχικά υποθέτουμε $\|f\|_\infty < +\infty$
Έχουμε: $|f(x)| < \|f(x)\|_\infty$ σχεδόν $\forall x \in E$ και από ε-χαρ. infimum
$\forall\, 0 < \varepsilon < \|f\|_\infty$ είναι $\lambda(\{x \in E : |f(x)| > \|f\|_\infty - \varepsilon\}) > 0$

• $\displaystyle \int_E |f|^p d\lambda \leq \int_E \|f\|_\infty^p d\lambda = \lambda(E) \cdot \|f\|_\infty^p \Rightarrow \|f\|_p \leq \lambda(E)^{1/p} \cdot \|f\|_\infty$

$\displaystyle \Rightarrow \limsup_{p \to \infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$, διότι $\lambda(E)^{1/p} \xrightarrow{p \to \infty} 1$

• Έστω $0 < \varepsilon < \|f\|_\infty$ και $B := \{x \in E : |f(x)| > \|f\|_\infty - \varepsilon\}$
Τότε $\lambda(B) > 0$ και $\displaystyle \int_E |f|^p d\lambda \geq \int_B |f|^p d\lambda > \int_B (\|f\|_\infty - \varepsilon)^p d\lambda$

$$= \lambda(B) \cdot (\|f\|_\infty - \varepsilon)^p$$

$\displaystyle \Rightarrow \|f\|_p \geq \lambda(B)^{1/p} (\|f\|_\infty - \varepsilon) \Rightarrow \liminf_{p \to \infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty - \varepsilon$

Αφού το ε ήταν τυχόν, για $\varepsilon \to 0^+$ $\liminf\limits_{p\to\infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty$

Άρα $\liminf\limits_{p\to\infty} \|f\|_p = \limsup\limits_{p\to\infty} \|f\|_p = \lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

• Αν $\|f\|_\infty = +\infty$. Τότε $\forall M>0$ $\lambda(\{|f(x)|>M\})>0$

Έτσι: $\int_E |f|^p d\lambda \geq \int_{\{|f(x)|>M\}} |f|^p d\lambda = \int_{\{|f(x)|>M\}} M^p \, d\lambda = M^p \cdot \lambda(\{|f|>M\})$

$\Rightarrow \|f\|_p^p > M^p \lambda(\{|f|>M\}) \Rightarrow \|f\|_p > M \cdot \lambda(\{|f|>M\})^{1/p}$

Επίσης $\lambda(\{|f|>M\})^{1/p} \xrightarrow{p\to\infty} 1$ ή $+\infty$

Άρα $\liminf\limits_{p\to\infty} \|f\|_p \geq M$, $\forall M>0$

Το $M>0$ ήταν τυχόν, άρα αφήνοντας το $M \to +\infty$, έχουμε $\liminf\limits_{p\to\infty} \|f\|_p = +\infty = \|f\|_\infty \Rightarrow \lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$

29) Έστω $f \in L^1([0,1])$ με την εξής ιδιότητα: $\exists C>0$, ώστε: $\int_A |f| d\lambda < C \cdot \sqrt{\lambda(A)}$, για κάθε μετρήσιμο $A \subseteq [0,1]$.

Νδο: $f \in L^p([0,1])$ για κάθε $1 \leq p < 2$

<u>Λύση:</u> • $\int_0^1 |f|^p d\lambda = \int_0^{+\infty} p \cdot t^{p-1} \cdot \lambda(\{x\in[0,1] : |f| \geq t\}) dt$

• $\forall t \geq 0$, για $A = \{|f| \geq t\}$ είναι $\int_{\{|f|\geq t\}} |f| d\lambda < c\sqrt{\lambda(\{|f|\geq t\})}$

Από Markov: $t\lambda(\{|f|\geq t\}) \leq \int_{\{|f|\geq t\}} |f| d\lambda < c\sqrt{\lambda(\{|f|\geq t\})} \Rightarrow$

$\sqrt{\lambda(\{|f|\geq t\})} \leq \frac{c}{t} \Rightarrow \lambda(\{|f|\geq t\}) \leq \frac{c^2}{t^2}$

• Άρα: $\int_0^1 |f|^p d\lambda = \int_0^{+\infty} p t^{p-1} \lambda(\{|f|\geq t\}) dt = \int_0^1 p t^{p-1} \lambda(\{|f|\geq t\}) dt + \int_1^{+\infty} p t^{p-1} \lambda(\{|f|\geq t\}) dt$

$\leq \underbrace{\int_0^1 p t^{p-1} \lambda([0,1]) dt}_{\dots = 1} + \int_1^{+\infty} p t^{p-1} \frac{c^2}{t^2} dt = 1 + c^2 \int_1^{+\infty} p t^{p-3} dt < +\infty$

αν $p-3<-1 \Leftrightarrow p<2$ ✓ Άρα $f \in L^p([0,1])$