26/5/23

Πυρήνας του Fejer

$F_n = \dfrac{D_0 + D_1 + \dots + D_{n-1}}{n}$ είναι ο n-οστός πυρήνας του Fejer

Παρατήρηση: για $t \neq 0$

$$F_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(k+\frac{1}{2})t}{\sin(\frac{t}{2})} = \frac{1}{2n\sin^2(\frac{t}{2})} \sum_{k=0}^{n-1} 2\sin(\tfrac{t}{2})\cdot\sin(k+\tfrac{1}{2})t$$

$2\sin a \cdot \sin b = \cos($

$\frac{t}{2} - (k+1)\frac{t}{2}$

$\frac{t}{2} - \frac{t}{2} - \frac{kt}{2}$

$$= \frac{1}{2n\sin^2(\frac{t}{2})} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\cos(kt) - \cos((k+1)t)\right) \rightarrow \text{τηλεσκοπικό}$$

$$= \frac{1}{2n\cdot\sin^2(\frac{t}{2})}\left(1 - \cos(nt)\right) = \frac{2\sin^2(\frac{nt}{2})}{2n\sin^2(\frac{t}{2})}$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{\sin(\frac{nt}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}\right)^2 \geq 0$$

Πρόταση1: Ο πυρήνας του Fejer είναι καλός πυρήνας. Για την ακρίβεια είναι προσέγγιση της μονάδας

↳ Απόδειξη: (i)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\,dt = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_k(t)\,dt = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dt$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 1 = \frac{n}{n} = 1$$

(ii)

$$|F_n(t)| \leq \frac{|D_0(t)| + |D_1(t)| + \dots + |D_{n-1}(t)|}{n} \leq \frac{\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{n} = \frac{2\frac{(n-1)n}{2} + n}{n}$$

$|D_k(t)| \leq 2k+1$

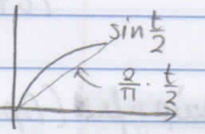
$$= \frac{(n-1)n + n}{n} = n - 1 + 1 = n \quad (n = \delta_n)$$

(iii)

$$|F_n(t)| = \left|\frac{1}{n}\left(\frac{\sin(\frac{nt}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}\right)^2\right| \leq \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{(\sin\frac{t}{2})^2} \leq \frac{\pi^2}{nt^2}, \quad t \in \mathbb{T}\setminus\{0\}$$

$\sin(\frac{nt}{2})^2 \leq$

$\left(|t| \leq \pi \Rightarrow |\frac{t}{2}| \leq \frac{\pi}{2}.\right.$ Για $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ είναι $\left.\sin t \geq \frac{2}{\pi}t\right)$



Έτσι $\sin(\frac{t}{2}) \geq \frac{2}{\pi}\cdot\frac{t}{2} = \frac{t}{\pi}$, για $t \in (0, \pi)$.

Άρα για $0 < |t| \leq \pi$ έχω: $|F_n(t)| \leq \frac{1}{n}\cdot\frac{\pi^2}{t^2}$ ($\sin^2\frac{t}{2}$ άρτια συνάρτηση)

<u>Παρατήρηση:</u> Ορίζοντας $K_{\delta_n} = F_n$, όπου $\delta_n = \frac{1}{n}$, έχουμε:

- $\int K_{\delta_n} = 1$, $\forall \delta_n = \frac{1}{n} > 0$
- $|K_{\delta_n}(t)| \leq \frac{1}{\delta_n}$, $\forall \delta_n > 0$, $\forall t \in \mathbb{T}$
- $|K_{\delta_n}(t)| \leq \pi^2 \frac{\delta_n}{t^2}$ και $\delta_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Θεώρημα (Fejer) Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $x \in Leb(f)$. Τότε, $\sigma_n(f,x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$

↳ <u>Απόδειξη:</u> Είδαμε ότι $\sigma_n(f,x) = (f * F_n)(x)$ και η $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι προσέγγιση της μονάδας.

(προηγούμενο μάθημα)
Από προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι: $\sigma_n(f,x) = (f*F_n)(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$ $\forall x \in Leb(f)$

Πόρισμα: $\forall f \in L^1(\mathbb{T})$ είναι: $\sigma_n(f,x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$ σχεδόν $\forall x \in \mathbb{T}$

Θεώρημα 2 (Fejer) Έστω $f \in C(\mathbb{T})$. Τότε, $\sigma_n(f,x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$ ομοιόμορφα επί του $\mathbb{T}$.

↳ <u>Απόδειξη:</u> $\sigma_n(f) = f * F_n$ και η $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι καλός πυρήνας.

Θεώρημα 3 (Fejer) Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $x \in \mathbb{T}$: $\exists \lim\limits_{y\to x^-} f(y) = f(x^-)$ και $\exists \lim\limits_{y\to x^+} f(y) = f(x^+)$

Τότε: $\sigma_n(f,x) \xrightarrow{n\to+\infty} \dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$

Θεώρημα (Προσέγγισης): Έστω $f \in C(\mathbb{T})$, τότε $\exists$ τριγωνομετρικά πολυώνυμα $(p_m)_{m\in\mathbb{N}}$, ώστε $\|f - p_m\|_\infty \xrightarrow{m\to\infty} 0$

↳ <u>Απόδειξη:</u> Γνωρίζουμε ότι $\sigma_n(f) \xrightarrow{n\to\infty} f$ ομοιόμορφα, δηλαδή $\|f - \sigma_n(f)\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Όμως, $\sigma_n(f,x) = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \hat{f}(k) e^{ikx}$ είναι τριγ. πολυώνυμο.

Θεώρημα Αν $f \in L^p(\mathbb{T})$, $p \geq 1$ τότε $\|\sigma_n(f) - f\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$

<u>Παρατήρηση:</u> Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ με $\hat{f}(k) = 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Τότε $f \equiv 0$ σχεδόν παντού

↳ <u>Απόδειξη:</u> Αφού $\hat{f}(k) = 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, τότε:

$$\sigma_n(f,x) = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \underbrace{\hat{f}(k)}_{=0} e^{ikx} = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Όμως, $\|\sigma_n(f) - f\|_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow \|f\|_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow \|f\|_1 = 0$

$\Rightarrow f = 0$ σ.π.

↳ <u>Απόδειξη Θεωρήματος 3 (Fejer):</u>

Έχουμε: $\sigma_n(f,x) = (f * F_n)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \cdot F_n(t)\,dt$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} f(x-t) F_n(t)\,dt + \int_{-\pi}^{0} f(x-t) F_n(t)\,dt \right)$$

↓ αλλαγή μεταβλητής

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} f(x-t) F_n(t)\,dt + \int_0^{\pi} f(x+t) F_n(-t)\,dt \right)$$

↓ άρτια

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} f(x-t) F_n(t)\,dt + \int_0^{\pi} f(x+t) F_n(t)\,dt \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left(f(x+t) + f(x-t) \right) F_n(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} F_n(t)\,dt$$

Όμως: $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} F_n(t)\,dt}_{=1}$

άρα: $\left| \sigma_n(f,x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \right| = \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{f(x+t) - f(x^+)}{2} + \frac{f(x-t) - f(x^-)}{2} \right) F_n(t)\,dt \right|$

$$\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|f(x+t) - f(x^+)|}{2} F_n(t)\,dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|f(x-t) - f(x^-)|}{2} F_n(t)\,dt$$

Θδο και τα δύο ολ/ματα $\xrightarrow{n} 0$

· Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε $\exists\, 0<\eta<\pi$: αν $0<t<\eta$, τότε:

$|f(x+t) - f(x^+)| \le \varepsilon$, άρα: $\displaystyle\int_0^\pi |f(x+t)-f(x^+)| F_n(t)\,dt =$

$$\int_0^\eta |f(x+t)-f(x^+)|\, F_n(t)\,dt + \int_\eta^\pi |f(x+t)-f(x^+)|\, F_n(t)\,dt$$

$|F_n(t)| \le \frac{\pi^2}{nt^2}$

$$\le \varepsilon \int_0^\eta F_n(t)\,dt + \frac{\pi^2}{n}\int_\eta^\pi \frac{|f(x+t)-f(x^+)|}{t^2}\,dt$$

$$\le \varepsilon \underbrace{\int_0^\pi F_n(t)\,dt}_{=\pi} + \frac{\pi^2}{n}\underbrace{\int_\eta^\pi \frac{|f(x+t)-f(x^+)|}{t^2}\,dt}_{\text{ολοκλήρωμα συνάρτησης του } t}$$

Άρα: $\displaystyle\limsup_{n\to+\infty} \int_0^\pi |f(x+t)-f(x^+)| \cdot F_n(t)\,dt \le \varepsilon\cdot\pi + 0 = \varepsilon\cdot\pi$, και αφού το ε ήταν τυχόν έχω ότι $\displaystyle\exists \lim_{n\to\infty}\int_0^\pi |f(x+t)-f(x^+)| F_n(t)\,dt = 0$

· Ομοίως, δείχνουμε ότι $\displaystyle\int_0^\pi |f(x-t)-f(x^-)|\, F_n(t)\,dt = 0$

Άρα, έχουμε το ζητούμενο.

Πρόταση: Αν $f \in L^p(\mathbb{T})$ με $p \ge 1$ τότε $\|\sigma_n(f) - f\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$

↳ Απόδειξη: $\exists\, h_n \in L^q(\mathbb{T})$ με $\|h_n\|_q \le 1$, όπου q ο συζυγής εκθέτης του p

$$\|\sigma_n(f,x) - f(x)\|_p = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\sigma_n(f,x) - f(x))\, h_n(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Big(\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) F_n(t)\,dt}_{f * F_n} - f(x) \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\,dt}_{=1}\Big) \cdot h_n(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}\Big(\int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x))\, F_n(t)\,dt\Big) h_n(x)\,dx$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\Big(\int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x))\, h_n(x)\,dx\Big)dt$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\Big(\int_{-\pi}^{\pi} (f_{-t}(x) - f(x))\, h_n(x)\,dx\Big)\,dt$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\le} \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} \|f_{-t} - f\|_p \cdot \|h_n\|_q \cdot F_n(t)\,dt$$

Έστω $\varepsilon>0$. Τότε $\exists\, 0<\eta<\pi \overset{|t|<\eta}{:} \|f_{-t}-f\|_p \leq \varepsilon$

Άρα $\|\sigma_n(f)-f\|_p \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta}\|f_{-t}-f\|_p F_n(t)dt + \int_{\eta\leq|t|\leq\pi}\|f_{-t}-f\|_p F_n(t)dt$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta}F_n(t)dt + 2\|f\|_p\int_{\eta\leq|t|\leq\pi}F_n(t)dt$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2\pi}\cdot 2\pi + 2\|f\|_p\int_{\eta\leq|t|\leq\pi}F_n(t)dt \xrightarrow{n\to\infty} \varepsilon$$

$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty}\|\sigma_n(f)-f\|_p \leq \varepsilon,\ \forall\varepsilon>0 \Longrightarrow \exists \lim_{n\to\infty}\|\sigma_n(f)-f\|_p = 0$

Ασκήσεις (Κεφ. 6)

9) Έστω $f\in C(\mathbb{T})$ με πραγματικές τιμές, τέτοια, ώστε: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k\sqrt{a_k^2+b_k^2}=0$. Τότε νδο $s_n(f)\xrightarrow{\text{ομ.}} f$

Λύση: Βασική παρατήρηση: $s_n(f,x)-\sigma_n(f,x)=$

$$= n\cdot\frac{s_n}{n} - \frac{s_0+s_1+\dots+s_{n-1}}{n} = \frac{n\cdot s_n - s_0 - s_1 - \dots - s_{n-1}}{n}$$

$$\frac{(s_n-s_0)+(s_n-s_1)+\dots+(s_n-s_{n-1})}{n}$$

και: $s_n - s_0 = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\cos(jx)+b_j\sin(jx)$

$$s_n - s_1 = \sum_{j=2}^{n}\alpha_j\cos(jx)+b_j\sin(jx)$$

$$s_n - s_{n-1} = \sum_{j=n-1}^{n}\alpha_j\cos(jx)+b_j\sin(jx) = \alpha_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$$

Άρα: $|s_n(f,x)-\sigma_n(f,x)| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}s_n-s_k\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n}\alpha_j\cos(jx)+b_j\sin(jx)\right|$

$$= \left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j\cos jx+b_j\sin jx)\underbrace{\sum_{k=0}^{j-1}1}_{=j}\right| = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}j\left|\alpha_j\cos(jx)+b_j\sin(jx)\right|$$

$$\leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}j\sqrt{\alpha_j^2+b_j^2}\underbrace{\sqrt{\cos^2(jx)+\sin^2(jx)}}_{=1} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{\alpha_j^2+b_j^2}\xrightarrow{n\to+\infty}0$$

Έτσι: $\|s_n(f)-f\|_\infty \leq \underbrace{\|s_n(f)-\sigma_n(f)\|_\infty}_{\text{το δείξαμε } \to\, 0} + \underbrace{\|\sigma_n(f)-f\|_\infty}_{\text{Fejer } \to\, 0} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

11) Έστω $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ τ.ώ: $\forall k \in \mathbb{Z}$: $|k\hat{f}(k)| \le A$, για κάποιο $A>0$.
Δ.ό.: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{T}$: $|s_n(f,x)| \le \|f\|_\infty + 2A$

<u>Λύση</u>: Έχουμε $s_n(f,x) - \sigma_{n+1}(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ikx} - \sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)\hat{f}(k)e^{ikx}$

$$= \sum_{k=-n}^{n} \frac{|k|}{n+1}\hat{f}(k)e^{ikx} \Longrightarrow |s_n(f,x) - \sigma_{n+1}(f,x)| \le \frac{1}{n+1}\sum_{k=-n}^{n}|k|\cdot|\hat{f}(k)|\cdot|e^{ikx}|$$

$$\le \frac{1}{n+1}\sum_{k=-n}^{n} A = \frac{2n+1}{n+1}A \le 2A$$

$$|\sigma_{n+1}(f,x)| = |(f*F_{n+1})(x)| \le \|f\|_\infty \cdot \|F_{n+1}\|_1 = \|f\|_\infty$$

Τελικά: $|s_n(f,x)| \le |s_n(f,x) - \sigma_{n+1}(f,x)| + |\sigma_{n+1}(f,x)|$
$\le 2A + \|f\|_\infty$

<u>Παρατηρήσεις</u>: 1) $\|f*g\|_\infty \le \|f\|_\infty \cdot \|g\|_1$

2) $\|s_n(f)\|_\infty = \|f*D_n\|_\infty \le \|f\|_\infty \cdot \|D_n\|_1 \le c\cdot \log n \|f\|_\infty$

3) $\|\sigma_n(f)\|_\infty = \|f*F_n\|_\infty \le \|f\|_\infty \cdot \|F_n\|_1 = \|f\|_\infty$.

12) Έστω $p \ge 1$, $f \in L^p(\mathbb{T})$. τ.ώ: $n \cdot \|\sigma_n(f) - f\|_p \xrightarrow{n\to+\infty} 0$
Νδο f σταθερή.

<u>Λύση</u>: $|\widehat{(\sigma_n(f)-f)}(k)| \le \|\sigma_n(f) - f\|_1 \overset{\text{Hölder}}{\le} \|\sigma_n(f) - f\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Έτσι, $n\cdot|\widehat{(\sigma_n(f)-f)}(k)| \le n\|\sigma_n(f)-f\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Όμως: $\widehat{(\sigma_n(f)-f)}(k) = \left(1-\frac{|k|}{n}\right)\hat{f}(k) - \hat{f}(k) = -\frac{|k|}{n}\hat{f}(k)$

Δηλαδή, έχουμε ότι $n\cdot\left|-\frac{|k|}{n}\hat{f}(k)\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Longrightarrow |k|\cdot\hat{f}(k) \xrightarrow{n\to\infty} 0$
$\Longrightarrow k\cdot\hat{f}(k) = 0,\ \forall k \in \mathbb{Z}$

$\Longrightarrow \forall k \ne 0 : \hat{f}(k) = 0$

Τότε, για την $g(x) = f(x) - \hat{f}(0)$ έχουμε:

$\hat{g}(k) = \hat{f}(k) = 0$, $\forall k \neq 0$, και για $k=0$ $\hat{g}(0) = \hat{f}(0) - \hat{f}(0) = 0$

$\Longrightarrow g(x) = 0$ σ.π $\Longrightarrow f(x) = \hat{f}(0)$ σ.π.

8) Ορίζουμε $G_n(x) = F_n(x)\sin(nx)$. Δ.ο. αν p είναι τριγ. πολ. βαθμού $\leq n$, τότε $p'(x) = -2n\,(p * G_n)$ $(*)$

Χρησιμοποιώντας την $(*)$ δ.ό. $\|p'\|_\infty \leq 2n\|p\|_\infty$

(Ανισότητα Bernstein: $\|p'\|_\infty \leq n \cdot \|p\|_\infty$)

<u>Λύση</u>: Αν δείξουμε την $(*)$, τότε:

$$\|p'\|_\infty = \|-2n(p*G_n)\|_\infty = 2n\|p*G_n\|_\infty \leq 2n\,\|p\|_\infty \cdot \|G_n\|_1 \leq 2n \cdot \|p\|_\infty$$

διότι: $\|G_n\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |F_n(x)\underbrace{\sin(nx)}_{\leq 1}|\,dx$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |F_n(x)|\,dx = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi = 1$$

Για την $(*)$: Παρατηρούμε ότι είναι γραμμική ως προς p, άρα αρκεί να δείξουμε την $(*)$ για $p(x) = e^{ikx}$, $|k| \leq n$

Δηλαδή; αρκεί νδο: $ike^{ikx} = -2n \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(x-t)\,G_n(t)\,dt$

$$= -2n \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik(x-t)} F_n(t)\sin(nt)\,dt$$

$$= -\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik(x-t)} \sum_{s=-(n-1)}^{n-1}\left(1-\frac{|s|}{n}\right)e^{ist}\,\frac{e^{int}-e^{-int}}{2i}\,dt$$

Υπολογίζω: $-\frac{n}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik(x-t)}\left(\sum_{s=-(n-1)}^{n-1}\left(1-\frac{|s|}{n}\right)e^{ist}\right)\left(e^{int}-e^{-int}\right)dt =$

$$-\frac{n}{2\pi i}\,e^{ikx}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt}\left(\sum_{s=-(n-1)}^{n-1}\left(1-\frac{|s|}{n}\right)e^{ist}\right)\left(e^{int}-e^{-int}\right)dt$$

$$= -\frac{n}{2\pi i}\,e^{ikx}\sum_{s=-(n-1)}^{n-1}\left(1-\frac{|s|}{n}\right)\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt}e^{ist}\left(e^{int}-e^{-int}\right)dt$$

$$= -\frac{n}{2\pi i}\,e^{ikx}\sum_{s=-(n-1)}^{n-1}\left(1-\frac{|s|}{n}\right)\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{i(-k+s+n)t} - e^{i(-k+s-n)t}\right)dt\right)$$

επιβιώνει • είτε για $k = s+n \Rightarrow s = k-n$

• είτε για $k = s-n \Rightarrow s = k+n$

$$= \begin{cases} \frac{n}{2\pi i} e^{ikx}\left(1 - \frac{|k-n|}{n}\right) \cdot 2\pi \cdot 1 = in\left(1 - \frac{n-k}{n}\right)e^{ikx} = i\cancel{n}\,\frac{k}{\cancel{n}}e^{ikx} = ike^{ikx}, \; k>0 \\ \frac{n}{2\pi i}e^{ikx}\left(1 - \frac{|k+n|}{n}\right)2\pi\cdot(-1) = -in\left(1 - \frac{n+k}{n}\right)e^{ikx} = \cancel{+}in\cdot\frac{\cancel{+}k}{\cancel{n}}e^{ikx} \\ \qquad = ike^{ikx}, \; k<0 \end{cases}$$

Για $k=0$: $0 = (e^{i0x})'$.

Άρα, για κάθε $|k| \leq n$: $ike^{ikx} = p'(x) = -2n(p * G_n)(x)$

31/5/23

4) Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-περιοδική, άρτια, συνεχής ή απλώς φραγμένη με $\alpha_k \geq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Δ.ό.: $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k < +\infty$

__Λύση:__ Έχουμε $s_n(f,x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos(kx)$

Για $x=0$ έχουμε $s_n(f,0) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$. Αρκεί, λοιπόν, νδο η $s_n(f,0)$ είναι άνω φραγμένη

Παρατηρούμε ότι: $|\sigma_n(f,0)| = |(f * F_n)(0)| = \|f\|_\infty \cdot \underbrace{\|F_n\|_1}_{=1} = \|f\|_\infty$

$\Rightarrow \sigma_n(f,0)$ φραγμένη

Επειδή $\alpha_k \geq 0 \Rightarrow s_n(f,0)$ αύξουσα

Γράφουμε $\sigma_{2n-1}(f,0) = \frac{1}{2n-1} \sum_{k=0}^{2n-2} s_k(f,0) \geq \frac{1}{2n-1} \sum_{k=n}^{2n-2} s_k(f,0)$

$$\geq \frac{1}{2n-1} \sum_{k=n}^{2n-2} s_n(f,0)$$

$$= \frac{n-1}{2n-1} s_n(f,0) \geq \frac{1}{3} s_n(f,0)$$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ είναι $s_n(f,0) \leq 3\sigma_{2n-1}(f,0)$, η οποία είναι άνω φραγμένη

$\Rightarrow s_n(f,0)$ άνω φραγμένη $\xrightarrow[s_n(f,0) \text{ αύξουσα}]{} s_n(f,0)$ συγκλίνει

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k < +\infty$.

Ο Πυρήνας του Poisson

Ορισμός: Έστω $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στο $\mathbb{C}$. Λέμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ συγκλίνει κατά Cesaro αν: $\exists \alpha\in\mathbb{C}$ ώστε $\sigma_n = \frac{s_1+s_2+\cdots+s_n}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \alpha$ όπου s_n τα μερικά αθροίσματα της $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$.

• Έστω ότι $\forall r\in(0,1)$ η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\cdot r^k$ συγκλίνει. Αν υπάρχει το $\lim_{r\to 1^-}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\cdot r^k = \alpha$, τότε λέμε ότι η σειρά είναι Abel-αθροίσιμη στο α.

<u>Παράδειγμα:</u> Η $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\cdot k = 1-2+3-4+\ldots$ αποκλίνει $\left(|\alpha_k| = k \xrightarrow{k\to\infty} +\infty\right)$

Έστω $r\in(0,1)$. Τότε: $A(r) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\cdot k\cdot r^k = r\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\cdot k\cdot r^{k-1}$ και γνωρίζουμε ότι για $x\in(-1,1)$ είναι:

$$\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty}(x^k)' = \left(\sum_{k=1}^{\infty}x^k\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = +\frac{1}{(1-x)^2}$$

Οπότε $A(r) = r\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\cdot k\cdot r^{k-1} = r\sum_{k=1}^{\infty}k(-r)^{k-1} \overset{\text{για } x=-r}{=} \frac{r}{(1+r)^2} \xrightarrow{r\to 1^-} \frac{1}{4}$

• Έστω $f\in L^1(\mathbb{T})$ τους Abel μέσους της $s(f,x)$:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}r^{|k|}\cdot\hat{f}(k)e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}r^{|k|}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)e^{-iky}dy\right)e^{ikx} \qquad (1)$$

(Θέλω να αλλάξω σειρά Σ και $\int$)

Η $\sum_{k=-\infty}^{\infty}r^{|k|}\hat{f}(k)e^{ikx}$ συγκλίνει ομοιόμορφα ως σειρά συναρτήσεων

Πράγματι, αν $f_k(x) = r^{|k|}\hat{f}(k)e^{ikx}$, $k\in\mathbb{Z}$, έχω ότι: $\|f_k\|_\infty = r^{|k|}\|f\|_1$, που συγκλίνει, γιατί είναι γεωμετρική σειρά

Συνεχίζοντας στην (1): $= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\sum_{k=-\infty}^{\infty}r^{|k|}e^{ik(x-y)}dy$

$= (f * P_r)(x)$

όπου $P_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}r^{|k|}e^{ikt}$

Μας ενδιαφέρει το $\lim_{r\to 1^-} (f * P_r)(x)$

· Η $\{P_r\}_{0<r<1}$ λέγεται <u>πυρήνας του Poisson</u>

Πρόταση: $P_r(t) = \dfrac{1-r^2}{(1-r\cos t)^2 + r^2\sin^2 t} = \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t} = \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}$

$= \dfrac{1-r^2}{r^2 - 2r + 1 + 2r - 2r\cos t} = \dfrac{1-r^2}{(1-r)^2 + 2r(1-\cos t)}$

↳ <u>Απόδειξη:</u> $P_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ikt} = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \cdot e^{ikt} + \sum_{k=-\infty}^{-1} r^k e^{ikt}$

$= \sum_{k=0}^{\infty} r^k \cdot e^{ikt} + \sum_{k=1}^{\infty} r^{-k} e^{-ikt}$ (2)

Θέτουμε $w = re^{it} \Rightarrow \overline{w} = re^{-it}$

Άρα $(2) \Rightarrow P_r(t) = \sum_{k=0}^{\infty} w^k + \sum_{k=1}^{\infty} (\overline{w})^k$

$= \dfrac{1}{(1-w)^2} + \dfrac{\overline{w}}{1-\overline{w}} = \dfrac{1-|w|^2}{|1-w|^2}$

Πρόταση 2: Ο πυρήνας του Poisson είναι άρτιος, καλός πυρήνας

↳ <u>Απόδειξη:</u> • $P_r(-t) = \dfrac{1-r^2}{(1-r\cos(-t))^2 + r^2\sin^2(-t)} = \dfrac{1-r^2}{(1+\cos t)^2 + r^2(-\sin t)^2}$

$= \dfrac{1-r^2}{(1-r\cos t)^2 + r^2\sin^2 t} = P_r(t) \Rightarrow$ άρτιος

i) $\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)\,dt = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ikt}\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dfrac{r^{|k|}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\,dt$ επιβιώνει μόνο για $k=0$

$= 1$

ii) Αφού $P_r(t) \geq 0$ για $r \in (0,1)$ έχουμε:

$\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |P_r(t)|\,dt = 1$ φραγμένο ως προς r

iii) Έστω $\eta \in (0,\pi)$. Ζητάμε $\lim_{r\to 1^-} \int_{\eta \le |t| \le \pi} P_r(t)dt = 0$.

Αφού η $P_r(t)$ είναι άρτια συνάρτηση, αρκεί:
$\lim_{r\to 1^-} \int_{\eta}^{\pi} P_r(t)dt = 0$

Στο $[\eta,\pi]$ είναι $\cos t \le \cos\eta \Rightarrow 1-\cos t \ge 1-\cos\eta$
Μπορούμε να υποθέσουμε ότι: $r > \frac{1}{2}$ (αφού $r \to 1^-$)
Τότε: $P_r(t) \le \dfrac{1-r^2}{(1-r)^2+2r(1-\cos t)} \le \dfrac{1-r^2}{2r(1-\cos t)} \le \dfrac{1-r^2}{2r(1-\cos\eta)}$

$\overset{\substack{r>\frac{1}{2} \Rightarrow \\ 2r>1 \Rightarrow \\ \frac{1}{2r}<1}}{\le} \dfrac{1-r^2}{1-\cos\eta}$

Συνεπώς: $\int_{\eta}^{\pi} P_r(t)dt \le \dfrac{1-r^2}{1-\cos\eta}(\pi-\eta) \xrightarrow{r\to 1^-} 0$.

Θεώρημα: Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ φραγμένη και $x \in \mathbb{T}$, ώστε f συνεχής στο x
Τότε $f * P_r \xrightarrow{r\to 1^-} f(x)$

(Αν $f \in C(\mathbb{T})$ τότε $f * P_r \xrightarrow[r\to 1^-]{\text{ομ.}} f(x)$
Δηλαδή, $S(f,x)$ είναι Abel-αθροίσιμη στον $f(x)$)

Άσκηση 62 Αν $f,g \in L(\mathbb{T})$, τότε $s_n(f)*g = s_n(f*g) = f*s_n(g)$

Λύση: $s_n(f)*g = (f*D_n)*g = f*(D_n*g) = f*(g*D_n)$
$= f*s_n(g)$

και $s_n(f)*g = (f*D_n)*g = f*(D_n*g) = f*(g*D_n)$
$= (f*g)*D_n = s_n(f*g)$.

Κεφάλαιο 7 - L^2 σύγκλιση σειρών Fourier

Θεώρημα Έστω $f \in L^2(\mathbb{T})$. Τότε $\|s_n(f) - f\|_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Δηλαδή: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |s_n(f,x) - f(x)|^2 dx \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Χώροι με Εσωτερικό Γινόμενο

Ορισμός: Έστω X διανυσματικός χώρος πάνω απ' το $\mathbb{C}$. Μια συνάρτηση $\langle\ ,\ \rangle : X\times X \longrightarrow \mathbb{C}$ λέγεται εσωτερικό γινόμενο αν ικανοποιεί:

i) $\langle x,x\rangle \geq 0$, $\forall x\in X$ και $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x=0$

ii) $\langle y,x\rangle = \overline{\langle x,y\rangle}$, $\forall x,y\in X$

iii) $\forall y \in X$ η $x \longmapsto \langle x,y\rangle$ είναι γραμμική, δηλαδή:
$\forall x_1,x_2\in X$, $\forall \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{C}$: $\langle \alpha_1x_1+\alpha_2x_2, y\rangle = \alpha_1\langle x_1,y\rangle + \alpha_2\langle x_2,y\rangle$

Παρατήρηση: • $\langle y,\alpha x\rangle = \bar{\alpha}\cdot\overline{\langle x,y\rangle}$

↳ Αποδ.: $\langle y,\alpha x\rangle = \overline{\langle \alpha x,y\rangle} = \overline{\alpha\langle x,y\rangle} = \bar{\alpha}\cdot\overline{\langle x,y\rangle}$

Πρόταση (Ανισότητα Cauchy-Schwarz) Για κάθε $x,y\in X$ είναι:
$$|\langle x,y\rangle| \leq \sqrt{\langle x,x\rangle}\cdot\sqrt{\langle y,y\rangle}$$

Πρόταση: Έστω X δ.χ. με εσωτερικό γινόμενο $\langle\ ,\ \rangle$.
Η $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ με $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ είναι νόρμα στον X.

Λήμμα: Αν $x_n \xrightarrow{\|\ \|} x$, $y_n \xrightarrow{\|\ \|} y$, τότε $\langle x_n,y_n\rangle \xrightarrow{n\to\infty} \langle x,y\rangle$

↳ Απόδειξη: $|\langle x_n,y_n\rangle - \langle x,y\rangle| = |\langle x_n,y_n-y\rangle + \langle x_n-x,y\rangle|$

$\overset{C-S}{\leq} \|x_n\|\cdot\|y_n-y\| + \|x_n-x\|\cdot\|y\| \xrightarrow{n\to\infty} \|x\|\cdot 0 + 0\cdot\|y\| = 0$

Ορισμός: Χώρος Hilbert είναι ένας διανυσματικός χώρος, H, πάνω από το $\mathbb{C}$ με εσωτερικό γινόμενο, που είναι πλήρης ως προς τη νόρμα που επάγει το εσωτερικό γινόμενο.

Παραδείγματα: (1) $\ell^2(\mathbb{Z})$ = ο χώρος όλων των ακολουθιών $\{\alpha_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ για τις οποίες $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k|^2 < +\infty$, $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$

είναι χώρος Hilbert, με:

- Εσωτερικό γινόμενο: αν $\alpha = (\alpha_k)_{k=-\infty}^{\infty}$, $b = (b_k)_{k=-\infty}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ τότε $\langle \alpha, b \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cdot \overline{b_k}$
- Νόρμα: $\|\alpha\|_2 = \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k|^2}$

(2) $L^2(\mathbb{T})$ είναι χώρος Hilbert με:

- Εσωτερικό γινόμενο: $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \bar{g}(t)\, dt$
- Νόρμα: $\|f\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx}$ (από Θ. Riesz-Fisher)