Αρμονική Ανάλυση (2022–23)
9 Ιουνίου 2023

1. (1+1 μον.) (α) Έστω $1 \leqslant p < \infty$ και $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $f_t(x) = f(x+t)$. Αποδείξτε ότι $\|f_t - f\|_p \xrightarrow{t \to 0} 0$.
(β) Έστω $(K_\delta)_{\delta > 0}$ οικογένεια καλών πυρήνων και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ μετρήσιμη και φραγμένη συνάρτηση. Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $t_0 \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $(f * K_\delta)(t_0) \xrightarrow{\delta \to 0^+} f(t_0)$.

2. (1.5+1.5 μον.) (α) Έστω $f \in C(\mathbb{T})$ και $g \in L^1(\mathbb{T})$ με $f * g = f$. Δείξτε ότι η f είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο.
(β) Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι

$$\sup\{\|f * g\|_1 : g \in L^1(\mathbb{T}),\ \|g\|_1 \leqslant 1\} = \|f\|_1.$$

[*Υπόδειξη:* Για το (β) μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το γεγονός ότι $\|f * F_n - f\|_1 \xrightarrow{n \to \infty} 0$.]

3. (1+1+1.5 μον.) (α) Έστω $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| < +\infty$. Αποδείξτε ότι $s_n(f) \xrightarrow{n \to \infty} f$ ομοιόμορφα επί του $\mathbb{T}$.
(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-περιοδική συνάρτηση και $M > 0$, $\alpha \in (0,1]$ τέτοια ώστε $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|^\alpha$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχει $C > 0$ ώστε για κάθε $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ να ισχύει ότι $|\widehat{f}(k)| \leqslant \frac{C}{|k|^\alpha}$.
(γ) Έστω $f \in C^1(\mathbb{T})$ με $|f'(x) - f'(y)| \leqslant M|x-y|^\alpha$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ (για κάποιο $M > 0$ και $0 < \alpha \leqslant 1$). Αποδείξτε ότι $s_n(f) \xrightarrow{n \to \infty} f$ ομοιόμορφα επί του $\mathbb{T}$.

4. (1+1 μον.) (α) Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι για κάθε $A \subseteq \mathbb{T}$ μετρήσιμο η σειρά $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) \int_A e^{ikt} dt$ είναι Cesàro αθροίσιμη στο $\int_A f(t)\, dt$, δηλαδή οι μέσοι όροι των μερικών αθροισμάτων αυτής της σειράς συγκλίνουν στο $\int_A f(t)\, dt$.
(β) Έστω $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n \in \{-1, 1\}$. Δείξτε ότι αν $f(t) = \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j e^{ijt}$, $t \in \mathbb{T}$, τότε $\|f\|_\infty \geqslant \sqrt{n}$.

5. (1.5+1 μον.) (α) Έστω $g : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ ώστε $g(x) = x(\pi - x)$. Βρείτε τη σειρά Fourier της g και κατόπιν αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6} = \frac{\pi^6}{960} \qquad \text{και} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

(β) Έστω $f \in L^2(\mathbb{T})$. Για κάθε $\alpha > \frac{1}{2}$ δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\widehat{f}(k)|}{k^\alpha} < +\infty.$$

Καλή Επιτυχία!