Αρμονική Ανάλυση
Εξέταση περιόδου Σεπτεμβρίου 2023

Θέμα 1ο (1,5+1 = 2,5 μον.)

(α) Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο με $\lambda(E) = 1$. Θεωρούμε συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη με $\|f\|_\infty < +\infty$. Ορίζουμε $g : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $g(p) = \|f\|_p$, $p \geq 1$. Δείξτε ότι η g είναι αύξουσα συνάρτηση με $\lim_{p\to+\infty} g(p) = \|f\|_\infty$.

(β) Έστω $f : [0, 1] \to [0, +\infty)$ με $0 < \|f\|_\infty < +\infty$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^1 f^{n+1}\, d\lambda}{\int_0^1 f^n\, d\lambda} = \|f\|_\infty.$$

Θέμα 2ο (1,5+1 = 2,5 μον.)

(α) Έστω $f \in C(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι η f είναι περιττή συνάρτηση αν και μόνο αν

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\, dx = 0 \;\; \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

(β) Έστω $p \geq 1$ και $f \in L^p(\mathbb{T})$ ώστε: $n\|\sigma_n(f) - f\|_p \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Δείξτε ότι η f είναι σταθερή (σχεδόν παντού).

Θέμα 3ο (1+1,5 = 2,5 μον.)

(α) Αν η $(a_k)_{k\geq 1}$ είναι ακολουθία μιγαδικών αριθμών τέτοια ώστε $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < +\infty$, δείξτε ότι υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ με $\widehat{f}(k) = a_k \;\; \forall k \in \mathbb{N}$.

(β) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ ώστε $\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{k}} \;\; \forall k \in \mathbb{N}$, αλλά υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ ώστε $\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{k}}$ για άπειρα $k \in \mathbb{N}$.

Θέμα 4ο (1+1 = 2 μον.)

(α) Δείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\, dx = -\int_0^{2\pi} f\left(x + \frac{\pi}{n}\right)\sin(nx)\, dx$$

και συμπεράνατε ότι $\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\, dx \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

(*Υπόδειξη:* Αν $f_t(x) = f(x+t)$, $t \in \mathbb{T}$, $x \in \mathbb{T}$, τότε $\|f_t - f\|_1 \overset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$.)

(β) Έστω $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε υπάρχει $A > 0$ με $|k\widehat{f}(k)| \leq A \;\; \forall k \in \mathbb{Z}$. Δείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, για κάθε $x \in \mathbb{T}$, ισχύει $|s_n(f, x)| \leq \|f\|_\infty + 2A$.

Θέμα 5ο (1,5+2 = 3,5 μον.)

(α) Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η f είναι πραγματική συνάρτηση αν και μόνο αν $\overline{\widehat{f}(k)} = \widehat{f}(-k)$, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

(β) Θεωρούμε την περιττή επέκταση f της συνάρτησης $\cos x$, $x \in (0, \pi)$ στο $[-\pi, \pi]$. Υπολογίστε τη σειρά Fourier της f και δειίξτε ότι το $\cos x$ εκφράζεται στο $(0, \pi)$ ως σειρά ημιτόνων. Τέλος, υπολογίστε το $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(4k^2-1)^2}$.

Καλή επιτυχία!