Αν $z=a+bi$, τότε $z\cdot\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2-(bi)^2 = a^2+b^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

<u>Ορισμός:</u> Έστω $z \in \mathbb{C}$. Ο αριθμός $|z| := \sqrt{z\bar{z}}$ λέγεται μέτρο του z.

<u>Λήμμα:</u> Έστω $z, z' \in \mathbb{C}$.

(i) $|\bar{z}| = |z|$

(ii) Αν $z = x \in \mathbb{R}$, τότε $|z| = |a|$ (η απόλυτη τιμή του x)

(iii) Αν $z = yi \in \mathbb{R}i$, τότε $|z| = |y|$ (—— " —— y)

(iv) $|zz'| = |z||z'|$

(v) $|z+z'| \leq |z| + |z'|$

<u>Απόδειξη:</u> (i) $|\bar{z}| = \sqrt{\bar{z}\,\bar{\bar{z}}} = \sqrt{\bar{z}z} = |z|$

Τα (ii) και (iii) είναι προφανή

Αν $z = a+bi$, $z' = c+di$, τότε

$$\left.\begin{aligned} |zz'|^2 &= (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 = a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 \\ |z|^2|z'|^2 &= (a^2+b^2)(c^2+d^2) = a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (iv)$$

$$|z+z'|^2 = (a+c)^2 + (b+d)^2 = a^2+c^2+2ac+b^2+d^2+2bd$$

$$(|z|+|z'|)^2 = |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2 = a^2+b^2+2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}+c^2+d^2$$

Αρκεί να δείξουμε ότι

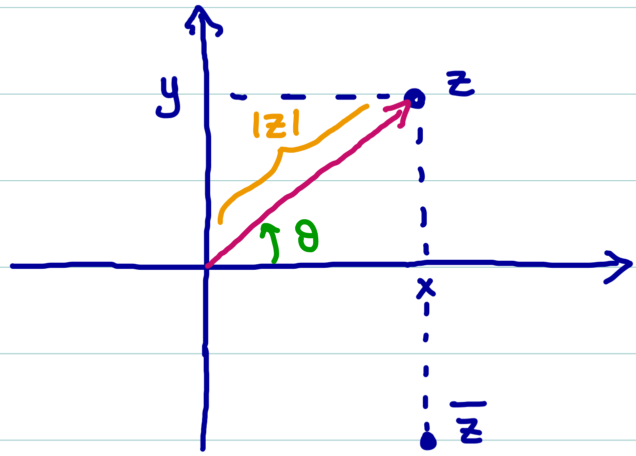
$(ac+bd)^2 \leq (a^2+b^2)(c^2+d^2) \Leftrightarrow$

$a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd \leq a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2 \Leftrightarrow$

$2abcd \leq a^2d^2 + b^2c^2 \Leftrightarrow$

$0 \leq (ad-bc)^2$ το οποίο είναι αληθές

Ο μιγαδικός αριθμος $x+yi$ αντιστοιχεί στο σημείο $(x,y) \in \mathbb{R}^2$



$x = |z| \cos\theta$

$y = |z| \sin\theta$

Αρα $z = \underbrace{x+yi}_{\text{αλγεβρική μορφή}} = \underbrace{|z|(\cos\theta + i\sin\theta)}_{\text{τριγωνομετρική μορφή}}$

Ορισμός: Η γωνία θ λέγεται όρισμα του μιγαδικού αριθμού $x+yi$.

Συμβολίζεται με $\arg(z)$

Π.χ. $1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

Εξίσωση κύκλου με κέντρο $z_0 = x_0 + y_0 i$ και ακτίνα $r > 0$:

$|z - z_0| = r$

Ισοδύναμα: $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$

Εκθετική μορφή μιγαδικού αριθμού

$\vartheta \in \mathbb{R}$

$e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$

Αν $z \in \mathbb{C}$ και $\vartheta = \arg(z)$, τότε $z = \underbrace{|z|\, e^{i\vartheta}}_{\text{εκθετική μορφή}}$

$e^{i\vartheta} \cdot e^{i\vartheta'} = e^{i\vartheta + i\vartheta'} = e^{i(\vartheta+\vartheta')}$

$(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)(\cos\vartheta' + i\sin\vartheta') = \cos(\vartheta+\vartheta') + i\sin(\vartheta+\vartheta')$ Θεώρημα de Moivre

$\Leftrightarrow \cos(\vartheta+\vartheta') = \cos\vartheta\cos\vartheta' - \sin\vartheta\sin\vartheta'$

$\sin(\vartheta+\vartheta') = \cos\vartheta\sin\vartheta' + \sin\vartheta\cos\vartheta'$

Εφαρμογές:

- $|e^{i\vartheta}|^2 = \cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta = 1 \Rightarrow e^{i\vartheta}\,\overline{e^{i\vartheta}} = 1 \Rightarrow \overline{e^{i\vartheta}} = (e^{i\vartheta})^{-1}$
- $(e^{i\vartheta})^{-1} = e^{-i\vartheta} = \cos(-\vartheta) + i\sin(-\vartheta) = \cos\vartheta - i\sin\vartheta$

  $\rotatebox{90}{=}\ \overline{e^{i\vartheta}} = \cos\vartheta - i\sin\vartheta$
- $e^{i(\vartheta+\pi/2)} = e^{i\vartheta} e^{i\pi/2} = e^{i\vartheta} \cdot i = -\sin\vartheta + i\cos\vartheta$

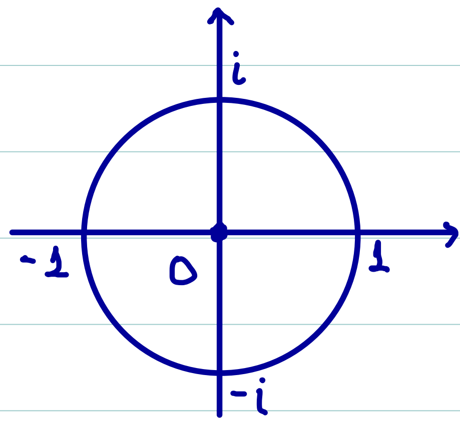
  $\Rightarrow \cos(\vartheta + \frac{\pi}{2}) = -\sin\vartheta$

  $\sin(\vartheta + \frac{\pi}{2}) = \cos\vartheta$

Π.χ. Ποια είναι η εκθετική μορφή του $z = 1 + \sqrt{3}i$;

$|z| = \sqrt{1+3} = 2$. Άρα $z = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = 2\, e^{\frac{i\pi}{3}}$

Έχουμε $z = e^{i\theta} \Leftrightarrow |z| = 1 \Leftrightarrow z$ ανήκει στον μοναδιαίο κύκλο



Έστω $\nu \in \mathbb{N}^*$. Λέμε ότι το $z \in \mathbb{C}$ είναι ν-οστή ρίζα της μονάδας αν $z^\nu = 1$.

$$z^\nu = 1 \Leftrightarrow z = e^{i\frac{2\kappa\pi}{\nu}} \quad \kappa = 0, 1, \dots, n-1$$

αφού $\cos 2\kappa\pi + i\sin 2\kappa\pi = 1$

Λέμε ότι το $z \in \mathbb{C}$ είναι πρωταρχική ν-οστή ρίζα της μονάδας αν $z^\nu = 1$ και $z^\mu \neq 1$ για κάθε $\mu < \nu \Leftrightarrow z = e^{i\frac{2\kappa\pi}{\nu}}$ και $\text{μκδ}(\kappa, \nu) = 1$

Επίσης παρατηρούμε ότι $e^{i\frac{2\kappa\pi}{\nu}} = \left(e^{i\frac{2\pi}{\nu}}\right)^\kappa$

<u>Άσκηση:</u> Οι ν-οστές ρίζες της μονάδας αποτελούν υποομάδα του $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

Παραδείγματα:

$\nu = 1 \quad : \quad \{ 1 \}$

$\nu = 2 \quad : \quad \{ 1 , -1 = e^{i\pi} \}$

$\nu = 3 \quad : \quad \{ 1 , -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} , -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \}$

$\nu = 4 \quad : \quad \{ 1 , i , -1 , -i \}$ $\quad \boxed{i^3 = -i}$

Η εξίσωση $z^\nu = a$ για $\nu \in \mathbb{N}^*, a \in \mathbb{C}$

Έστω $r, r', \vartheta, \vartheta' \in \mathbb{R}$ με $r, r' > 0$.

Έχουμε $re^{i\vartheta} = r'e^{i\vartheta'} \iff r = r'$ και $\vartheta = \vartheta' + 2k\pi$ για $k \in \mathbb{Z}$

Έστω z_0 μια λύση της εξίσωσης $z^\nu = a$.

Τότε οι υπόλοιπες λύσεις της εξίσωσης είναι $z_0 e^{i\frac{2k\pi}{\nu}}, k = 1, \dots, \nu - 1$

$z_0 = re^{i\vartheta} \ , \ a = \rho e^{i\varphi}$

$z_0^\nu = r^n e^{i\vartheta\nu} = \rho e^{i\varphi} \Leftarrow r = \sqrt[\nu]{\rho} \ , \ \vartheta = \frac{\varphi}{\nu}$

Παράδειγμα: Βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $z^4 = 1 + i$

$z_0^4 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \Leftarrow z_0 = 2^{1/8} e^{i\frac{\pi}{16}}$

Οι λύσεις της εξίσωσης είναι: $z_0, iz_0, -z_0, -iz_0$

$iz_0 = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot 2^{1/8} e^{i\frac{\pi}{16}} = 2^{1/8} \cdot e^{i\frac{9\pi}{16}}$

<u>Παράδειγμα</u>: Βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $z^3 = 2$

Οι λύσεις είναι $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\, e^{\frac{2\pi i}{3}}, \sqrt[3]{2}\, e^{\frac{4\pi i}{3}}$

<u>Παρατήρηση:</u> Θα δούμε την επόμενη φορά ότι η εξίσωση $z^{\nu} = a$ έχει το πολύ ν ρίζες στο $\mathbb{C}$, οι οποίες αντιστοιχούν στις ρίζες του πολυωνύμου $x^n - a \in \mathbb{C}[x]$.

Θεμέλια Άλγεβρας και Γεωμετρίας (Εαρινό εξάμηνο 2022-23) (MATH120)

Ασκήσεις

Προεπισκόπηση

Άσκηση 7

Δέκα ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής που θα απαντήσετε online. Αυτή τη φορά οι απαντήσεις στις 9 πρώτες ερωτήσεις δίνονται σε μορφή drop-down menu.

Ερώτηση: 1

Ποιο είναι το φανταστικό μέρος του παρακάτω μιγαδικού αριθμού;

$$\left(\frac{3-i}{1-2i}\right)^2$$

Απάντηση

[0|1|2|3|4|5] **(Βαθμολογία: 1)**

Σχόλιο ανατροφοδότησης:

Βαθμολογία ερώτησης: 1

Ερώτηση: 2

Ποιο είναι το πραγματικό μέρος του παρακάτω μιγαδικού αριθμού;

$$\left(\frac{3-i}{1-2i}\right)^2$$

Απάντηση

[0|1|2|3|4|5] **(Βαθμολογία: 1)**

Σχόλιο ανατροφοδότησης:

Βαθμολογία ερώτησης: 1

Ερώτηση: 3

Ποιο είναι το φανταστικό μέρος του παρακάτω μιγαδικού αριθμού;

$$\frac{-2-5i}{1-i}+\frac{-2+5i}{1+i}$$

Απάντηση

[0|1|2|3|4|5] **(Βαθμολογία: 1)**

Σχόλιο ανατροφοδότησης:

Βαθμολογία ερώτησης: 1

Ερώτηση: 4

Ποιο είναι το πραγματικό μέρος του παρακάτω μιγαδικού αριθμού;

$$\frac{-2-5i}{1-i}+\frac{-2+5i}{1+i}$$

Απάντηση

[0|1|2|3|4|5] **(Βαθμολογία: 1)**

Σχόλιο ανατροφοδότησης:

Βαθμολογία ερώτησης: 1

Ερώτηση: 5

Ποιο είναι το φανταστικό μέρος του παρακάτω μιγαδικού αριθμού;

$$(3-2i)^4+(3+2i)^4$$

Απάντηση

[0|1|2|3|4|5] **(Βαθμολογία: 1)**

Σχόλιο ανατροφοδότησης:

Βαθμολογία ερώτησης: 1

Ερώτηση: 6

Αν z=x+yi με z^2=-9 και y>0, τότε το x είναι ίσο με:

Απάντηση

[0|1|2|3|4|5] **(Βαθμολογία: 1)**

Σχόλιο ανατροφοδότησης:

Βαθμολογία ερώτησης: 1

Ερώτηση: 7

Αν z=x+yi με z^2=-9 και y>0, τότε το y είναι ίσο με:

Απάντηση

[0|1|2|3|4|5] **(Βαθμολογία: 1)**

Σχόλιο ανατροφοδότησης:

Βαθμολογία ερώτησης: 1

Ερώτηση: 8

Αν z=x+yi με z^2-2z+2=0 και y>0, τότε το x είναι ίσο με:

Απάντηση

[0|1|2|3|4|5] **(Βαθμολογία: 1)**

Σχόλιο ανατροφοδότησης:

Βαθμολογία ερώτησης: 1

Ερώτηση: 9

Αν z=x+yi με z^2-2z+2=0 και y>0, τότε το y είναι ίσο με:

Απάντηση

[0|1|2|3|4|5] **(Βαθμολογία: 1)**

Σχόλιο ανατροφοδότησης:

Βαθμολογία ερώτησης: 1

Ερώτηση: 10

Αν z=x+yi είναι ένας μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός τέτοιος ώστε το πηλίκο (x+yi)/(x-yi) είναι πραγματικός αριθμός, τότε τι μπορούμε να συμπεράνουμε για τα x και y;

Απάντηση		**Σχόλιο**
☐	x=0. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	y=0. **(Βαθμολογία: 0)**	
☑	x=0 ή y=0. **(Βαθμολογία: 1)**	
☐	Τίποτα από τα παραπάνω. **(Βαθμολογία: 0)**	

Σχόλιο ανατροφοδότησης:

Βαθμολογία ερώτησης: 1

Συνολική βαθμολογία: 10