Ορισμοί

Παραδείγματα

• Ένας ακέραιος αριθμός n ονομάζεται <u>άρτιος</u> αν υπάρχει ακέραιος αριθμός m τέτοιος ώστε $n = 2m$.

Ισοδύναμα: ένας ακέραιος αριθμός n ονομάζεται άρτιος αν το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του n με το 2 είναι ίσο με 0.

• Ένας ακέραιος αριθμός είναι <u>περιττός</u> αν δεν είναι άρτιος.

Ισοδύναμα: ένας ακέραιος αριθμός n ονομάζεται περιττός αν υπάρχει ακέραιος αριθμός m τέτοιος ώστε $n = 2m+1$.

Ισοδύναμα: ένας ακέραιος αριθμός n ονομάζεται περιττός αν υπάρχει ακέραιος αριθμός m τέτοιος ώστε $n = 2m-1$.

Ισοδύναμα: ένας ακέραιος αριθμός n ονομάζεται περιττός αν του υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του n με το 2 είναι ίσο με 1.

<u>Παρατήρηση:</u> Το «αν» στον ορισμό είναι πάντα «αν και μόνο αν»

• $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ όπου $n,k \in \mathbb{N}$ με $k \leq n$ και $m! = m \cdot (m-1) \cdots 2 \cdot 1$
$0! = 1$

Ισοδύναμα (;) : $\binom{n}{k}$ είναι ο αριθμός των τρόπων που μπορώ να διαλέξω k στοιχεία από τα n, όπου $n,k \in \mathbb{N}$ με $k \leq n$.

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΣ

ΠΡΟΣΟΧΗ : Δεν υπάρχει ορισμός «περίπου» σωστός.

Παράδειγμα:

Ένας πραγματικός αριθμός α ονομάζεται αλγεβρικός ακέραιος αν υπάρχει μονικό πολυώνυμο $f(x)$ με ακέραιους συντελεστές, $f(x) \neq 0$, τέτοιο ώστε $f(\alpha) = 0$. μεγιστοβάθμιος συντελεστής $= 1$

Π.χ. Το $\sqrt{2}$ είναι αλγεβρικός ακέραιος γιατί είναι ρίζα του πολυωνύμου $x^2 - 2$.

Αν ξεχάσουμε τη συνθήκη $f(x) \neq 0$, τότε όλοι οι πραγματικοί είναι αλγεβρικοί ακέραιοι.

Αν ξεχάσουμε τη συνθήκη «μονικό», τότε όλοι οι ρητοί είναι αλγεβρικοί ακέραιοι (π.χ. το $\frac{1}{2}$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $2x - 1$)

Παράδειγμα πιο πολύπλοκου ορισμού

Ενα πολυώνυμο $f(x) \in \mathbb{R}[X]$ ονομάζεται ανάγωγο αν ικανοποιούνται οι δύο παρακάτω συνθήκες:

(1) $f(x) \notin \mathbb{R}$ $(\Leftrightarrow \deg f(x) \geq 1)$

(2) Αν $f(x) = g(x)h(x)$ με $g(x), h(x) \in \mathbb{R}[X]$ τότε
$\deg g(x) = 0$ ή $\deg h(x) = 0$.

Π.χ. Το πολυώνυμο $x^2 - 1$ δεν είναι ανάγωγο, το πολυώνυμο x^2+1 είναι.

Ενα πολυώνυμο $f(x) \in \mathbb{R}[X]$ είναι ανάγωγο αν και μόνο αν $\deg f(x) = 1$ ή $\deg f(x) = 2$ και το $f(x)$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Η παραπάνω φράση δεν είναι ορισμός, αλλά ΘΕΩΡΗΜΑ

Θεωρήματα

Μια αληθής συνεπαγωγή είναι ένα θεώρημα
(ή πρόταση ή λήμμα ή πόρισμα)

Ένα θεώρημα χρειάζεται απόδειξη.
Ένα αξίωμα όχι.

Έστω Ε μια ευθεία και Σ ένα σημείο που δεν ανήκει στην ευθεία Ε.

Αξίωμα Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Από το Σ περνάει μοναδική ευθεία παράλληλη στην Ε.

Αξίωμα Ελλειπτική Γεωμετρίας

Από το Σ δεν περνάει καμία ευθεία παράλληλη στην Ε.

Αξίωμα Υπερβολικής Γεωμετρίας

Από το Σ περνούν τουλάχιστον δύο ευθείες παράλληλες στην Ε.

Παραλληλισμοί με το σκάκι

Ορισμοί ⇝ Πώς λέγονται τα πιόνια, τι είναι το ματ...

Αξιώματα ⇝ Πώς κινούνται τα πιόνια...

Θεωρήματα ⇝ Αν η βασίλισσα πάει εκεί, τότε σε 2 κινήσεις θα κάνουν ματ τα λευκά...

Μια συνεπαγωγή είναι ΑΛΗΘΗΣ αν έχει ΑΠΟΔΕΙΞΗ.
ΨΕΥΔΗΣ αν έχει ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. (Διάψευση πρότασης)

Παρα πολλά παραδείγματα δεν αποτελούν απόδειξη.

Το να μην μπορεί να αποδείξει κάποιος κάτι δεν είναι αντιπαράδειγμα.

Ένα αποτέλεσμα το οποίο πιστεύουμε ότι είναι αληθές, αλλά δεν έχει αποδειχθεί ονομάζεται <u>εικασία</u> ή <u>υπόθεση</u>.

<u>Παραδείγματα:</u>

(1742)

- Η εικασία του Goldbach, που λέει ότι κάθε άρτιος ακέραιος μεγαλύτερος του 2 είναι το άθροισμα δύο πρώτων, έχει τσεκαριστεί μέχρι το 400.000.000.000.000

(1637)

- Το τελευταίο θεώρημα του Fermat λεγόταν εσφαλμένα θεώρημα μέχρι το 1995.

- $f: A \longrightarrow B$ μια συνάρτηση

  Αν $X \subseteq A$, τότε $f(X) := \{f(x) \mid x \in X\}$

  Αν $Y \subseteq B$, τότε $f^{-1}(Y) := \{a \in A \mid f(a) \in Y\}$

  Ισχύει $f(f^{-1}(Y)) = Y$; ορισμός

  Έστω $a \in f^{-1}(Y)$. Τότε $f(a) \in Y$.

  Άρα $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$ (*)

  Έστω $y \in Y$. Δεν ξέρω αν υπάρχει $a \in A$ τέτοιο ώστε $f(a) = y$.

  ΔΕΝ ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΣΤΑΜΑΤΗΣΟΥΜΕ ΕΚΕΙ.

  Έστω $f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση που ορίζεται ως $f(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

  Τότε $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{Q}$ και $f(f^{-1}(\mathbb{R})) = \{0\} \neq \mathbb{R}$.

• Αν υπήρχε επιπλέον η υπόθεση ότι η f είναι επί, τότε για κάθε $y \in Y$ υπάρχει $a \in A$ τέτοιο ώστε $f(a) = y$. Εξ ορισμού $a \in f^{-1}(Y)$, οπότε $y \in f(f^{-1}(Y))$.

Καταλήγουμε ότι $Y \subseteq f(f^{-1}(Y))$ $(**)$

$(*), (**) \Rightarrow Y = f(f^{-1}(Y))$

Παρατήρηση: Για να δείξουμε ότι 2 σύνολα A και B είναι ίσα, είναι σύνηθες να αποδεικνύουμε ότι $A \subseteq B$ (αν $x \in A$, τότε $x \in B$) και $B \subseteq A$ (αν $x \in B$, τότε $x \in A$).

Κάποιες συνηθισμένες τεχνικές απόδειξης

Η ευθεία απόδειξη

Το τελευταίο παράδειγμα πιο πάνω είναι παράδειγμα ευθείας απόδειξης. Ας κάνουμε ένα ακόμα πιο απλό παράδειγμα.

Θεώρημα 1: Αν ο ακέραιος n είναι περιττός, τότε ο n^2 είναι περιττός.

Απόδειξη: Υπάρχει ακέραιος m τέτοιος ώστε $n = 2m+1$

Έχουμε $n^2 = (2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2+2m) + 1$

Άρα ο n^2 είναι περιττός

Η απόδειξη εξαντλώντας όλες τις περιπτώσεις

Θεώρημα 2 : Το τετράγωνο ενος ακεραιου είναι της μορφής $4k$ ή $4k+1$ για $k \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη : Έστω $n \in \mathbb{Z}$.

Αν n είναι άρτιος, τότε υπάρχει $m \in \mathbb{Z}$ τ.ώ. $n = 2m$.

Έχουμε $n^2 = 4m^2$.

Αν n είναι περιττός, τότε υπάρχει $m \in \mathbb{Z}$ τ.ώ. $n = 2m+1$

Έχουμε $n^2 = 4(m^2+m)+1$

Η απόδειξη της αντιθετοαντιστροφης

Έχουμε δει ότι $(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

Στο Θεώρημα 1 αυτό σημαίνει να δείξουμε το εξής :

Αν n^2 άρτιος, τότε n άρτιος.

Έστω m τέτοιος ώστε $n^2 = 2m$.

Δεν είναι πολύ απλό να συνεχίσουμε χωρίς στο τέλος να κάνουμε μια ευθεία απόδειξη ή να εξαντλήσουμε όλες τις περιπτώσεις.

Θεώρημα 3 : Αν $x^3+x^2+x+1 > 0$, τότε $x \neq -1$.

Απόδειξη Αν $x=-1$, τότε $x^3+x^2+x+1 = (-1)^3+(-1)^2+(-1)+1=0$.

Η εις άτοπο απαγωγή

Μοιάζει με την προηγούμενη τεχνική. Ξεκινάμε με την υπόθεση ότι το συμπέρασμα δεν ισχύει και καταλήγουμε σε κάτι που είναι πασιφανώς ψευδές (π.χ. $0=1$). Αυτό λέγεται άτοπο.

Άρα η υπόθεσή μας είναι ψευδής, δηλ. το συμπέρασμα είναι αληθές.

Θεώρημα 4 : Υπάρχουν άπειροι ρητοί μεταξύ του 0 και του 1.

Απόδειξη: Έστω ότι υπάρχει πεπερασμένο πλήθος ρητών μεταξύ του 0 και του 1. Έστω $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_r$ όλοι οι ρητοί μεταξύ του 0 και του 1 διατεταγμένοι ώστε $a_1 < a_2 < \ldots < a_r$.

Έχουμε $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in \{a_1, \ldots, a_r\}$, και άρα $r \geq 2$.

Τότε $a_1 < \frac{a_1+a_2}{2} < a_2$ και $\frac{a_1+a_2}{2} \in \mathbb{Q}$, οπότε βρήκαμε ένα ρητό που δε συμπεριλαμβάνεται στους $\{a_1, \ldots, a_r\}$ αλλά βρίσκεται μεταξύ του 0 και του 1 : ΑΤΟΠΟ

Μια άλλη προσέγγιση είναι η εξής.

Έχουμε $0 < \frac{1}{n} < 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$.

Άρα $\frac{1}{n} \in \{a_1, \ldots, a_r\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$

Συμπεραίνουμε ότι το σύνολο $\mathbb{N}$ είναι πεπερασμένο : ΑΤΟΠΟ

Θεώρημα 5 Ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος (Αν $x=2$, τότε $\sqrt{x} \notin \mathbb{Q}$)

Απόδειξη: Έστω ότι υπάρχουν $m,n \in \mathbb{N}^*$ με $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ και $\mu\kappa\delta(m,n) = 1$, ή έστω οι m,n δεν είναι και οι δύο άρτιοι.

Εχουμε $(\sqrt{2})^2 = \frac{m^2}{n^2}$, οπότε $m^2 = 2n^2$ άρτιος.

Απο το Θεώρημα 1 (πιο συγκεκριμένα την αντιθετοαντίστροφη του Θεωρήματος 1) έχουμε ότι ο m πρέπει να είναι άρτιος.

Αρα υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ τ.ώ. $m = 2k$.

Τώρα, έχουμε $m^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2n^2$, και άρα $n^2 = 2k^2$.

Επίσης από το Θεώρημα 1, έχουμε ότι ο n πρέπει να είναι άρτιος: ΑΤΟΠΟ.

Αρα ο $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός.

Θεμέλια Άλγεβρας και Γεωμετρίας (Εαρινό εξάμηνο 2022-23) (MATH120)

Ασκήσεις

Προεπισκόπηση

Άσκηση 2

Δέκα ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής που θα απαντήσετε online. Κάθε ερώτηση έχει μόνο μία σωστή απάντηση.

Ερώτηση: 1

Ποια από τις παρακάτω φράσεις έχει το ίδιο ακριβώς νόημα με τη φράση "ό,τι λάμπει δεν είναι χρυσός";

Απάντηση		Σχόλιο
☐	Κάθε πράγμα που λάμπει δεν είναι χρυσός. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	Αν κάτι λάμπει, δεν είναι χρυσός. **(Βαθμολογία: 0)**	
☑	Υπάρχει κάτι που λάμπει και δεν είναι χρυσός. **(Βαθμολογία: 1)**	
☐	Αν κάτι δεν είναι χρυσός, λάμπει. **(Βαθμολογία: 0)**	

Βαθμολογία ερώτησης: 1

Ερώτηση: 2

Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0 αν και μόνο αν για κάθε ε>0 υπάρχει δ>0 τέτοιο ώστε για κάθε x στο διάστημα (-δ,δ) ισχύει |f(x)-f(0)|<ε. Άρα μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής αν και μόνο αν:

Απάντηση		**Σχόλιο**
☐	για κάθε ε>0 δεν υπάρχει δ>0 τέτοιο ώστε για κάθε x στο διάστημα (-δ,δ) ισχύει |f(x)-f(0)|<ε. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	υπάρχει ε>0 τέτοιο ώστε για κάθε δ>0 και για κάθε x στο διάστημα (-δ,δ) δεν ισχύει |f(x)-f(0)|<ε. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	υπάρχει ε>0 τέτοιο ώστε για κάθε δ>0 δεν υπάρχει x στο διάστημα (-δ,δ) για το οποίο ισχύει |f(x)-f(0)|<ε. **(Βαθμολογία: 0)**	
☑	υπάρχει ε>0 τέτοιο ώστε για κάθε δ>0 υπάρχει x στο διάστημα (-δ,δ) για το οποίο ισχύει |f(x)-f(0)|≥ε. **(Βαθμολογία: 1)**	

Βαθμολογία ερώτησης: 1

Ερώτηση: 3

Αποφανθείτε αν η παρακάτω φράση είναι αληθής ή ψευδής: "Υπάρχει θετικός πραγματικός αριθμός y τέτοιος ώστε xy=x^2 για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x".
Με x^2 συμβολίζουμε το x^2.

Απάντηση		**Σχόλιο**
☐	Αληθής. **(Βαθμολογία: 0)**	
☑	Ψευδής. Αν υπάρχει, τότε $1\cdot y = 1^2$, και άρα $y=1$. Όμως $2\cdot 1 \neq 2^2$. **(Βαθμολογία: 1)**	
☐	Εξαρτάται. **(Βαθμολογία: 0)**	

☐	Δεν έχουμε αρκετά δεδομένα για να κρίνουμε. **(Βαθμολογία: 0)**	

Βαθμολογία ερώτησης: 1

Ερώτηση: 4

Αποφανθείτε αν η παρακάτω φράση είναι αληθής ή ψευδής: "Για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x, υπάρχει θετικός πραγματικός αριθμός y τέτοιος ώστε xy=x^2".
Με x^2 συμβολίζουμε το x^2.

	Απάντηση	Σχόλιο
☑	Αληθής. Παίρνουμε $y=x$ **(Βαθμολογία: 1)**	
☐	Ψευδής. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	Εξαρτάται. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	Δεν έχουμε αρκετά δεδομένα για να κρίνουμε. **(Βαθμολογία: 0)**	

Βαθμολογία ερώτησης: 1

Ερώτηση: 5

Αποφανθείτε αν η παρακάτω φράση είναι αληθής ή ψευδής: "Υπάρχει θετικός πραγματικός αριθμός y τέτοιος ώστε xy=2x για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x".

	Απάντηση	Σχόλιο
☑	Αληθής. Παίρνουμε $y=2$ **(Βαθμολογία: 1)**	
☐	Ψευδής. **(Βαθμολογία: 0)**	

☐	Εξαρτάται. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	Δεν έχουμε αρκετά δεδομένα για να κρίνουμε. **(Βαθμολογία: 0)**	

Βαθμολογία ερώτησης: 1

Ερώτηση: 6

Αποφανθείτε αν η παρακάτω φράση είναι αληθής ή ψευδής: "Για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x, υπάρχει θετικός πραγματικός αριθμός y τέτοιος ώστε xy=2x".

	Απάντηση	**Σχόλιο**
☑	Αληθής. Παίρνουμε $y=2$. **(Βαθμολογία: 1)**	
☐	Ψευδής. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	Εξαρτάται. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	Δεν έχουμε αρκετά δεδομένα για να κρίνουμε. **(Βαθμολογία: 0)**	

Βαθμολογία ερώτησης: 1

Ερώτηση: 7

Αποφανθείτε αν η παρακάτω φράση είναι αληθής ή ψευδής: "Η εξίσωση (x-2)(x+2)=0 έχει μία πραγματική λύση".

	Απάντηση	**Σχόλιο**
☑	Αληθής. «Έχει μία» σημαίνει «έχει τουλάχιστον μία» **(Βαθμολογία: 1)** Δε σημαίνει ότι είναι μοναδική.	

☐	Ψευδής. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	Εξαρτάται. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	Δεν έχουμε αρκετά δεδομένα για να κρίνουμε. **(Βαθμολογία: 0)**	

Βαθμολογία ερώτησης: 1

Ερώτηση: 8

Είναι η πρόταση "P∨(Q∧R)" ισοδύναμη με την πρόταση "(P∨Q)∧R";

Απάντηση		Σχόλιο
☐	Ναι. **(Βαθμολογία: 0)**	
☑	Όχι. γιατί P Q R P∨(Q∧R) (P∨Q)∧R A * Ψ A Ψ **(Βαθμολογία: 1)**	
☐	Εξαρτάται. **(Βαθμολογία: 0)**	

Βαθμολογία ερώτησης: 1

Ερώτηση: 9

Η πρόταση "P⟹¬P" είναι:

Απάντηση		Σχόλιο
☐	ταυτολογία. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	αντίφαση. **(Βαθμολογία: 0)**	

☑	κανένα από τα παραπάνω. **(Βαθμολογία: 1)**	Αν P αληθής, τότε $P \Rightarrow \neg P$ ψευδής. Αν P ψευδής, τότε $P \Rightarrow \neg P$ αληθής.

Βαθμολογία ερώτησης: 1

Ερώτηση: 10

Η πρόταση "P⟹P" είναι:

Απάντηση		Σχόλιο
☑	ταυτολογία. **(Βαθμολογία: 1)**	Αν P αληθής, τότε $P \Rightarrow P$ αληθής. Αν P ψευδής, τότε $P \Rightarrow P$ αληθής.
☐	αντίφαση. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	κανένα από τα παραπάνω. **(Βαθμολογία: 0)**	

Βαθμολογία ερώτησης: 1

Συνολική βαθμολογία άσκησης: 10