Απόδειξη ισοδυναμιών

Για να αποδείξουμε ότι $P_1 \Leftrightarrow P_2$
αποδεικνύουμε ότι $P_1 \Rightarrow P_2$ και $P_2 \Rightarrow P_1$

Για να αποδείξουμε ότι $P_1 \Leftrightarrow P_2 \Leftrightarrow P_3 \Leftrightarrow P_4$
αρκεί να αποδείξουμε ότι $P_1 \Rightarrow P_2$, $P_2 \Rightarrow P_3$, $P_3 \Rightarrow P_4$.

Θεώρημα 6: Έστω A, B δύο σύνολα. Οι παρακάτω τρεις προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(i) $A \subseteq B$

(ii) $A \cap B = A$

(iii) $A \cup B = B$

Απόδειξη (i) $\Rightarrow$ (ii)

Έχουμε πάντα $A \cap B \subseteq A$.

Αν τώρα $a \in A$, τότε $a \in B$ (αφού $A \subseteq B$) και άρα $a \in A \cap B$

Καταλήγουμε ότι $A \subseteq A \cap B$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Έχουμε πάντα $B \subseteq A \cup B$.

Αν τώρα $x \in A \cup B$, τότε διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

- αν $x \in B$, δε χρειάζεται να δείξουμε κάτι.

• αν $x \in A$, τότε $x \in A \cap B$ και άρα $x \in B$.

Και στις δύο περιπτώσεις $x \in B$, οπότε $A \cup B \subseteq B$.

(iii) $\Rightarrow$ (i)

Αν $a \in A$, τότε $a \in A \cup B$ και άρα $a \in B$.

Οπότε έχουμε $A \subseteq B$.

Η μαθηματική επαγωγή

Απόδειξη πρότασης $P(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$

« εξαντλώντας όλες τις περιπτώσεις »

Λογική: Αποδεικνύουμε ότι ισχύει η πρόταση $P(0)$ (ΑΛΗΘΗΣ)

και ότι ισχύει η συνεπαγωγή $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$

Οπότε $P(0)$ $P(1)$ $P(2)$ $P(3)$ . . . .

A A A A

Είναι ένας κομψός τρόπος να αποφύγουμε τις « τελίτσες »

και το « και ούτω καθεξής ».

Τι γράφουμε;

Πρώτο βήμα ή βάση της επαγωγής :

Απόδειξη ότι η πρόταση $P(0)$ είναι αληθής.

Υπόθεση επαγωγής ή επαγωγική υπόθεση :

Έστω ότι ισχύει η $P(n)$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$

(ή η $P(k)$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$, αν προτιμάτε)

Επαγωγικό βήμα :

Απόδειξη ότι η $P(n+1)$ είναι αληθής

(αντίστοιχα, η $P(k+1)$)

Θεώρημα 7: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, n^2+n είναι άρτιος

Απόδειξη : $P(n)$: n^2+n είναι άρτιος

ΒΗΜΑ 1 : $P(0)$: 0^2+0 είναι αρτιος : ΑΛΗΘΗΣ

ΒΗΜΑ 2 : Έστω ότι ισχύει n^2+n είναι άρτιος για καποιο $n \in \mathbb{N}$

ΒΗΜΑ 3 : Θα δείξουμε ότι ο $(n+1)^2+(n+1)$ είναι άρτιος.

Έχουμε $(n+1)^2+(n+1) = n^2+2n+1+n+1 = n^2+n+2n+2$

Από την υπόθεση επαγωγής, ο n^2+n είναι άρτιος

Επίσης ο $2n+2 = 2(n+1)$ είναι άρτιος.

Το άθροισμα δυο άρτιων αριθμών είναι άρτιος.

Επομένως, ο $(n+1)^2+(n+1)$ είναι άρτιος.

Παρατήρηση: Το ότι $n(n+1)$ είναι άρτιος δε χρειάζεται απαραίτητα επαγωγή

<u>Παρατήρηση:</u> Αν επιθυμούμε να δείξουμε μια πρόταση για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq n_0$, τότε η βάση της επαγωγής είναι η απόδειξη της $P(n_0)$

<u>Θεώρημα 8:</u> Για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 5$, $2^n > n^2$.

<u>Απόδειξη:</u> $P(n): 2^n > n^2$

ΒΗΜΑ 1 : $P(5): 2^5 > 5^2$ ΑΛΗΘΗΣ γιατί $2^5 = 32$, $5^2 = 25$

ΒΗΜΑ 2 : Έστω ότι $2^n > n^2$ για κάποιο $n \geq 5$.

ΒΗΜΑ 3 : Θα δείξουμε ότι $2^{n+1} > (n+1)^2$.

Εχουμε $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$.

Από την υπόθεση επαγωγής έχουμε $n^2 < 2^n$, και άρα (πολλαπλασιάζοντας επι 2 και τις δύο πλευρές) $2n^2 < 2^{n+1}$.

Τώρα, $2n^2 - (n+1)^2 = n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2 > 0$

αφου $(n-1)^2 \geq (5-1)^2 > 2$ ⊛

Οποτε έχουμε $2^{n+1} > 2n^2 > (n+1)^2$,

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ:</u> Το ότι η ⊛ ισχύει για $n \geq 3$, δε σημαίνει ότι η αρχική πρόταση ισχύει για $n \geq 3$. Το πρώτο βήμα δεν ισχύει ούτε για $n=3$ ούτε για $n=4$. Από την άλλη το πρώτο βήμα ισχύει για $n \in \{0,1\}$ αλλά τότε δεν ισχύει η ⊛

Θεώρημα 9 Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Ισοδύναμα, $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Απόδειξη: $P(n): \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

ΒΗΜΑ 1 : $P(1)$: $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$ ΑΛΗΘΗΣ

ΒΗΜΑ 2 : Έστω ότι $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$

ΒΗΜΑ 3 : Θα δείξουμε ότι $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Από την υπόθεση επαγωγής, έχουμε ότι : $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Άρα $\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = \frac{n^2+n+2n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

όπως θέλουμε.

Η ίδια λογική μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε υποσύνολα των φυσικών αριθμών, π.χ. στους άρτιους. Τότε μπορούμε να κάνουμε ένα από τα παρακάτω αν θέλουμε να αποδείξουμε μια πρόταση $P(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ άρτιο:

- είτε θέτουμε $n = 2m$ και κάνουμε επαγωγή στο m
- είτε αποδεικνύουμε τη βάση της επαγωγής και την συνεπαγωγή $P(n) \Rightarrow P(n+2)$.

Θεώρημα 10: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ άρτιο, το n^2 είναι πολλαπλάσιο του 4, δηλαδή υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $n^2 = 4m$. Γράφουμε $4 \mid n^2$.

Απόδειξη: $P(n): \ 4 \mid n^2$

ΒΗΜΑ 1 : $4 \mid 0^2$ αφού $0 = 4 \cdot 0$.

ΒΗΜΑ 2 : Έστω ότι $4 \mid n^2$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ άρτιο.

ΒΗΜΑ 3 : Θα δείξουμε ότι $4 \mid (n+2)^2$.

Εχουμε $(n+2)^2 = n^2 + 4n + 4 = n^2 + 4(n+1)$

Από την υπόθεση επαγωγής υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $n^2 = 4m$

Αρα $(n+2)^2 = 4m + 4(n+1) = 4(m+n+1)$, οπότε $4 \mid (n+2)^2$.