Ορισμός: Μια (εσωτερική) πράξη είναι μια απεικόνιση $A \times A \longrightarrow A$

$$* : A \times A \longrightarrow A$$
$$(a, b) \longmapsto c = a * b$$

Παραδείγματα:

- Πρόσθεση

  $A = \mathbb{N}$ ή $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

  $\mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$

  $\mathbb{K}[X]$ σύνολο πολυωνύμων

  } προσεταιριστική, μεταθετική

- Πολλαπλασιασμός

  $A = \mathbb{N}$ ή $\mathbb{K}$ — προσεταιριστική, μεταθετική

  $\mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ — προσεταιριστική, ΜΗ ΜΕΤΑΘΕΤΙΚΗ

  $\mathbb{K}[X]$ — προσεταιριστική, μεταθετική

- Σύνθεση συναρτήσεων $A \longrightarrow A$ — προσεταιριστική, ΜΗ ΜΕΤΑΘΕΤΙΚΗ $\overset{e^{\sin\theta}}{\sin * (e^{\theta})}$

Ορισμός: Έστω $* : A \times A \longrightarrow A$ μια πράξη

- Η πράξη $*$ ονομάζεται <u>προσεταιριστική</u> αν

  $(a * b) * c = a * (b * c) \quad \forall a, b, c \in A$

- Η πράξη $*$ ονομάζεται <u>μεταθετική</u> αν

  $a * b = b * a \quad \forall a, b \in A$

- Ένα στοιχείο $e \in A$ ονομάζεται <u>ουδέτερο</u> για την πράξη $*$ αν:

  $\underset{\uparrow \text{αριστερό}}{e * a} = \underset{\uparrow \text{δεξιό}}{a * e} = a \quad \forall a \in A$

<u>Λήμμα</u>: Αν υπάρχει ουδέτερο στοιχείο, τότε είναι μοναδικό.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω e, e' δύο ουδέτερα στοιχεία. Τότε:

$$\underset{\uparrow e' \text{ ουδέτερο}}{e = e * e'} \underset{\uparrow e \text{ ουδέτερο}}{=} e'$$

<u>Παραδείγματα</u>:

- Στην πρόσθεση, το ουδέτερο στοιχείο συμβολίζεται με 0.
- Στον πολλαπλασιασμό, το ουδέτερο στοιχείο συμβολίζεται με 1
- Στη σύνθεση συναρτήσεων, το ουδέτερο στοιχείο είναι η ταυτοτική απεικόνιση $id_A : A \longrightarrow A$, $x \mapsto x$.

<u>Ορισμός</u> Έστω $* : A \times A \longrightarrow A$ μια πράξη με ουδέτερο στοιχείο e.
Ένα στοιχείο $a \in A$ είναι <u>αντιστρέψιμο</u> αν υπάρχει $a' \in A$ τέτοιο ώστε

$$\underset{\uparrow \text{αριστερό}}{a' * a} = \underset{\uparrow \text{δεξιό}}{a * a'} = e$$

Το στοιχείο a' ονομάζεται <u>αντίστροφο</u> του a.

<u>Λήμμα</u> Αν ένα στοιχείο $a \in A$ είναι αντιστρέψιμο, τότε το αντίστροφό του είναι μοναδικό ΑΝ η πράξη είναι προσεταιριστική.

<u>Απόδειξη</u> Έστω a', a'' δύο αντίστροφα του a. Τότε

$$a' = a' * e = a' * (a * a'') = (a' * a) * a'' = e * a'' = a''.$$

Παραδείγματα:

- Στην πρόσθεση, το αντίστροφο του a συμβολίζεται με $-a$ (αντίθετος του a)
- Στον πολλαπλασιασμό, το αντίστροφο του a συμβολίζεται με a^{-1} ή $1/a$.
- Στη σύνθεση συναρτήσεων, το αντίστροφο μιας απεικόνισης f συμβολίζεται με f^{-1}.

Παρατηρήσεις:

- Η αφαίρεση $a-b$ είναι η πρόσθεση $a+(-b)$
- Η διαίρεση a/b είναι ο πολλαπλασιασμός $a\cdot(b^{-1})$
- Στην άλγεβρα χρησιμοποιούμε τα σύμβολα του πολλαπλασιασμού $(\cdot, 1, a^{-1})$ για πράξεις που δεν έχουν standard συμβολισμό.

Παραδείγματα:

- Στην πρόσθεση σε όλα τα παραδείγματα που δώσαμε εκτός του $\mathbb{N}$ όλα τα στοιχεία έχουν αντίθετο.
- Στον πολλαπλασιασμό, τα πράγματα είναι πιο πολύπλοκα.

- Στο $\mathbb{N}$, το μόνο αντιστρέψιμο στοιχείο είναι το 1.
- Στο $\mathbb{Z}$, τα μόνα αντιστρέψιμα στοιχεία είναι το 1 και το -1.
- Στο $\underbrace{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}}_{\text{σώματα}}$, όλα τα στοιχεία εκτός του 0 είναι αντιστρέψιμα
- Στο $Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$, οι αντιστρέψιμοι πίνακες είναι αυτοί των οποίων η ορίζουσα είναι αντιστρέψιμη στο $\mathbb{K}$.

- Στο $\mathbb{K}[X]$, τα αντιστρέψιμα πολυώνυμα είναι τα αντιστρέψιμα στοιχεία του $\mathbb{K}$ (ως προς τον πολλαπλασιασμό)

- Μια απεικόνιση $f: A \longrightarrow A$ είναι αντιστρέψιμη αν και μόνο αν η f είναι 1-1 και επί.

<u>Συμβολισμός</u>: $A^{\times} = \{a \in A \mid a \text{ αντιστρέψιμο}\}$

<u>Παραδείγματα</u>: Για την πράξη του πολλαπλασιασμού:

$\mathbb{R}^{\times} = \mathbb{R}^{*} = (\mathbb{R}[X])^{\times}$

$\mathbb{Z}^{\times} = \{1, -1\} = (\mathbb{Z}[X])^{\times}$

$$(Mat_{2\times 2}(\mathbb{Z}))^{\times} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, ad - bc = \pm 1 \right\}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Θεμέλια Άλγεβρας και Γεωμετρίας (Εαρινό εξάμηνο 2022-23) (MATH120)

Ασκήσεις

Προεπισκόπηση

Άσκηση 4

Δέκα ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής που θα απαντήσετε online. Κάθε ερώτηση έχει μόνο μία σωστή απάντηση.

Ερώτηση: 1

Μπορείτε να αποδείξετε την παρακάτω ισότητα με επαγωγή στο n;

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1)k = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}.$$

	Απάντηση	**Σχόλιο**
☐	Ναι. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	Όχι, γιατί δεν ισχύει η βάση της επαγωγής. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	Όχι, γιατί δεν ισχύει η υπόθεση της επαγωγής. **(Βαθμολογία: 0)**	
☑	Όχι, γιατί δεν ισχύει το επαγωγικό βήμα. **(Βαθμολογία: 1)**	

☐	Όχι, γιατί η υπόθεσης της επαγωγής δεν αρκεί για να αποδειχτεί το επαγωγικό βήμα. **(Βαθμολογία: 0)**	

Σχόλιο ανατροφοδότησης:

Βαθμολογία ερώτησης: 1

Ερώτηση: 2

Μπορείτε να αποδείξετε την παρακάτω ισότητα με επαγωγή στο n;

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)k = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Απάντηση		**Σχόλιο**
☑	Ναι. **(Βαθμολογία: 1)**	
☐	Όχι, γιατί δεν ισχύει η βάση της επαγωγής. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	Όχι, γιατί δεν ισχύει η υπόθεση της επαγωγής. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	Όχι, γιατί δεν ισχύει το επαγωγικό βήμα. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	Όχι, γιατί η υπόθεση επαγωγής δεν αρκεί για να αποδειχτεί το επαγωγικό βήμα. **(Βαθμολογία: 0)**	

Σχόλιο ανατροφοδότησης:

Βαθμολογία ερώτησης: 1

Ερώτηση: 3

Έστω P(n) η πρόταση 1+3+5+...+(2n-1)=n^2. Αν η επαγωγική υπόθεση είναι ότι η P(n) ισχύει για κάποιο φυσικό αριθμό n, τότε στο επαγωγικό βήμα πρέπει να αποδείξετε ότι το (n+1)^2 είναι ίσο με:

	Απάντηση	Σχόλιο
☐	1+3+5+...+2n **(Βαθμολογία: 0)**	
☑	1+3+5+...+2n+1 **(Βαθμολογία: 1)**	
☐	1+3+5+...+n+1 **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	1+3+5+...+2n-1 **(Βαθμολογία: 0)**	

Σχόλιο ανατροφοδότησης:

Βαθμολογία ερώτησης: 1

Ερώτηση: 4

Έστω P(n) μια πρόταση που εξαρτάται από τον φυσικό αριθμό n. Αν η P(0) δεν ισχύει, αλλά ισχύει η P(100) και το επαγωγικό βήμα, τότε πότε ισχύει σίγουρα η P(n);

	Απάντηση	Σχόλιο
☐	Ποτέ. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	Για κάθε φυσικό αριθμό n. **(Βαθμολογία: 0)**	

☐	Για κάθε φυσικό αριθμό n>0. **(Βαθμολογία: 0)**	
☑	Για κάθε φυσικό αριθμό n>99. **(Βαθμολογία: 1)**	

Σχόλιο ανατροφοδότησης:

Βαθμολογία ερώτησης: 1

Ερώτηση: 5

Έστω P(n) μια πρόταση που εξαρτάται από τον φυσικό αριθμό n. Αν η P(0) δεν ισχύει, αλλά ισχύει το επαγωγικό βήμα, τότε πότε ισχύει σίγουρα η P(n);

Απάντηση		Σχόλιο
☑	Ποτέ. **(Βαθμολογία: 1)**	
☐	Για κάθε φυσικό αριθμό n. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	Για κάθε φυσικό αριθμό n>0. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	Για κάθε φυσικό αριθμό n>1. **(Βαθμολογία: 0)**	

Σχόλιο ανατροφοδότησης:

Βαθμολογία ερώτησης: 1

Ερώτηση: 6

Έστω P(n) μια πρόταση που εξαρτάται από τον φυσικό αριθμό n. Αν η P(0) και η P(100) ισχύουν, αλλά δεν ισχύει το επαγωγικό βήμα, τότε πότε ισχύει σίγουρα η P(n);

Απάντηση	Σχόλιο

☐	Ποτέ. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	Για κάθε φυσικό αριθμό n. **(Βαθμολογία: 0)**	
☑	Για n=0 και n=100. **(Βαθμολογία: 1)**	
☐	Για κάθε φυσικό αριθμό μέχρι το 100. **(Βαθμολογία: 0)**	

Σχόλιο ανατροφοδότησης:

Βαθμολογία ερώτησης: 1

Ερώτηση: 7

Αν θέλετε να αποδείξετε ότι η παρακάτω πρόταση ισχύει με επαγωγή στο n, ποια θα είναι η βάση της επαγωγής;

Αν $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι η ακολουθία ακεραίων που δίνεται από $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ και $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ για $n \geq 2$, τότε $a_n < 2^{n+2}$ για κάθε $n \geq 5$.

Απάντηση		Σχόλιο
☐	$a_0 < 2^2$. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	$a_0 < 2^2$, $a_1 < 2^3$. **(Βαθμολογία: 0)**	
☑	$a_5 < 2^7$, $a_6 < 2^8$. **(Βαθμολογία: 1)**	
☐	$a_5 < 2^7$. **(Βαθμολογία: 0)**	

Σχόλιο ανατροφοδότησης:

Βαθμολογία ερώτησης: 1

Ερώτηση: 8

Μπορείτε να αποδείξετε την παρακάτω πρόταση με επαγωγή στο n;

Αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι η ακολουθία ρητών που δίνεται από $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ και $x_n = (x_{n-1} + x_{n-2})/2$ για $n \geq 2$, τότε

$$x_n = \frac{2^{n-1} + (-1)^n}{3 \cdot 2^{n-2}} \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}^*.$$

	Απάντηση	Σχόλιο
☑	Ναι. **(Βαθμολογία: 1)**	
☐	Όχι, γιατί δεν ισχύει η βάση της επαγωγής. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	Όχι, γιατί δεν ισχύει η υπόθεση της επαγωγής. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	Όχι, γιατί δεν ισχύει το επαγωγικό βήμα. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	Όχι, γιατί η υπόθεση επαγωγής δεν αρκεί για να αποδειχτεί το επαγωγικό βήμα. **(Βαθμολογία: 0)**	

Σχόλιο ανατροφοδότησης:

Βαθμολογία ερώτησης: 1

Ερώτηση: 9

Μπορείτε να αποδείξετε ότι οποιοσδήποτε περιττός αριθμός 2n+1 μεγαλύτερος του 2 γράφεται ως άθροισμα τουλάχιστον δύο πρώτων αριθμών με επαγωγή στο n;

	Απάντηση	Σχόλιο
☐	Ναι. **(Βαθμολογία: 0)**	

☑	Όχι, γιατί δεν ισχύει η βάση της επαγωγής. **(Βαθμολογία: 1)**	
☐	Όχι, γιατί δεν ισχύει η υπόθεση της επαγωγής. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	Όχι, γιατί δεν ισχύει το επαγωγικό βήμα. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	Όχι, γιατί η υπόθεση επαγωγής δεν αρκεί για να αποδειχτεί το επαγωγικό βήμα. **(Βαθμολογία: 0)**	

Σχόλιο ανατροφοδότησης:

Βαθμολογία ερώτησης: 1

Ερώτηση: 10

Μπορείτε να αποδείξετε ότι οποιοσδήποτε άρτιος αριθμός 2n μεγαλύτερος του 2 γράφεται ως άθροισμα τουλάχιστον δύο πρώτων αριθμών με επαγωγή στο n;

Απάντηση		Σχόλιο
☑	Ναι. **(Βαθμολογία: 1)**	
☐	Όχι, γιατί δεν ισχύει η βάση της επαγωγής. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	Όχι, γιατί δεν ισχύει η υπόθεση της επαγωγής. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	Όχι, γιατί δεν ισχύει το επαγωγικό βήμα. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	Όχι, γιατί η υπόθεση επαγωγής δεν αρκεί για να αποδειχτεί το επαγωγικό βήμα. **(Βαθμολογία: 0)**	

Σχόλιο ανατροφοδότησης:

Βαθμολογία ερώτησης: 1

Ερώτηση: 11

Μπορείτε να αποδείξετε ότι οποιοσδήποτε άρτιος αριθμός 2n μεγαλύτερος του 2 γράφεται ως άθροισμα δύο πρώτων αριθμών με επαγωγή στο n;

Απάντηση		Σχόλιο
☐	Ναι. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	Όχι, γιατί δεν ισχύει η βάση της επαγωγής. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	Όχι, γιατί δεν ισχύει η υπόθεση της επαγωγής. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	Όχι, γιατί δεν ισχύει το επαγωγικό βήμα. **(Βαθμολογία: 0)**	
☑	Όχι, γιατί η υπόθεση επαγωγής δεν αρκεί για να αποδειχτεί το επαγωγικό βήμα. **(Βαθμολογία: 0)**	

Σχόλιο ανατροφοδότησης:

Βαθμολογία ερώτησης: 0

Συνολική βαθμολογία: 10