Διάλεξη 5 {Θεωρήματα Προσέγγισης Συναρτήσεων Sobolev Μέσω C^∞ συναρτήσεων, ή ισοδύναμα Θεωρήματα Πυκνότητ

1. Η παρούσα διάλεξη έχει κάποια κοινά με την Διάλεξη 4, και καλό είναι να προηγηθεί η ανάγνωση της, ή παράλληλα

1. Ακριβής Αντιπρόσωπος f^* (χρήσιμη για $\int f\,dx$, $\mathcal{L}^n$-μέτρο

Θεώρημα Διαφόρισης του Lebesgue μέτρο Lebesgue, $\mathcal{L}^n$

Έστω $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

$\Longrightarrow$

$$\lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} f\,dy \to f(x), \quad \text{a.e. } x \text{ στο } \mathbb{R}^n$$

Συμβολισμός: $\fint_\Omega f\,dy = \frac{1}{\mathcal{L}^n(\Omega)} \int_\Omega f\,dy$ (μέσος όρος).

Ορ: $f \in L^1_{loc}$ $\left(\Rightarrow \mathcal{L}^n(\{x \mid |f| = \infty\}) = 0 \right)$

$$f^*(x) := \begin{cases} \lim\limits_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} f\,dy, & \text{αν το όριο } \exists \text{ (πεπερασμένο)} \\ 0, & \text{αν το όριο } \nexists \end{cases}$$

$\left(f = \frac{1}{\sqrt{|x|}}, \ (-1,1), \quad f^* = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|x|}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \right)$

Η f^* ορίζεται $\forall x$.

- $f^*(x) = f(x)$, a.e. (Θεώρημα Lebesgue)
- Έστω $f = g$ a.e.

$\Longrightarrow$

$$f^*(x) = g^*(x) \quad \forall x$$

$$\left(\lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} f\,dy = \lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} g\,dy \quad (f = g \text{ a.e.}) \right)$$

$\therefore$ Η f^* ορίζεται $\forall x$ και αντιπροσωπεύει την κλάση ισοδυναμίας

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ a.e.}$$

• Οι συναρτήσεις Sobolev $f \in W^{k,p}(U)$ ορίζονται a.e.

Δηλαδή αν $g = f$ a.e. στο U

$\Rightarrow$

$$g \in W^{k,p}.$$

($f \in W^{k,p}(U) \Rightarrow f \in L^p(U)$ και έτσι ώστε

$$\int_U f D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v \phi \, dx \quad \forall \phi \in C_c^\infty(U)$$

$v \in L^p(U)$ (και $D^\alpha f := v$)

$$\int_U |f|^p dx = \int_U |g|^p dx \quad (g = f \text{ a.e.})$$

$\Rightarrow g \in L^p(U)$

$$\int_U f D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v \phi \, dx \quad \forall \phi \in C_c^\infty(U)$$

$\parallel$ ($f = g$ a.e.)

$$\int_U g D^\alpha \phi \, dx$$

$$\therefore \quad D^\alpha g = v = D^\alpha f.$$

<u>Συμπέρασμα</u>: Δοθείσης $f \in W^{k,p}(U)$ μπορούμε να θεωρούμε την f^*, που ορίζεται <u>παντού στο U</u>, $f^* \in W^{k,p}(U)$

3. Θεωρήματα Πυκνότητας C^∞ συναρτήσεων

A) Έστω $u \in W^{k,p}_{loc}(U)$, $1\le p<\infty$, U ανοικτό, $U\subset\mathbb{R}^n$
$\exists$ $\{u^\varepsilon\}\subset C^\infty(U)$ τ.ω. $u^\varepsilon \to u$ στο $W^{k,p}_{loc}(U)$

(Αρκεί να υποθέσουμε $u\in W^{k,p}_{loc}(U)$)
(Στην Απόδειξη του Θ1, σ 26, αρκεί $u\in W^{k,p}_{loc}(U)$)

• $\|\eta_\varepsilon * u\|_p \le \|u_\varepsilon\|_p$ ($1\le p<\infty$, Ziemer σ 22, $\|\cdot\|_p=\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$)

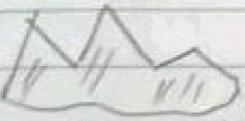
B) Έστω $u\in W^{k,p}(U)$, $1\le p<\infty$, U ανοικτό, $U\subset\mathbb{R}^n$
$\exists$ $\{u_k\}\subset W^{k,p}(U)\cap C^\infty(U)$ τ.ω.

$$u_k\to u \text{ στο } W^{k,p}(U).$$

Γ) Έστω U ανοικτό, φραγμένο, ∂U Lipschitz(*), και $u\in W^{k,p}(U)$, $1\le p<\infty$. Τότε $\exists$

$$\{f_k\}\subset W^{k,p}(U)\cap C^\infty(\bar U) \text{ τ.ω.}$$

$$f_k\to f \text{ στο } W^{k,p}(U).$$

(*) ναι   όχι

4. Θεωρήματα Προσέγγισης C^1 ή C^k, τύπου Lusin (Θεώρημα Whitney)

Θεώρημα (Lusin)
Έστω $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ μετρήσιμη, $A\subset\mathbb{R}^n$ | $\mathcal{L}^n(A)<\infty$
Δοθέντος $\varepsilon>0$ $\exists$ $\bar f$ συνεχής, $\bar f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, τ.ω.

$$\mathcal{L}^n(\{x\in X \mid f(x)\ne\bar f(x)\})<\varepsilon.$$

□

Θεώρημα (Whitney)
Έστω $f\in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $1\le p<\infty$. Δοθέντος $\varepsilon>0$ $\exists$ C^1 συνάρτηση $\bar f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ τ.ω. $\mathcal{L}^n(\{x \mid f(x)\ne \bar f(x)\}\cup\{Df(x)\ne D\bar f(x)\})\le\varepsilon$ και $\|f-\bar f\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}\le\varepsilon$.

C^∞ Διαμέριση της Μονάδας (Ziemer Lemma 23.1.)

Έστω $E \subset \mathbb{R}^n$, και $\mathcal{G}$ μια οικογένεια ανοικτών συνόλων V τ.ω.

$$E \subset \{\cup V : V \in \mathcal{G}\}$$

Τότε $\exists$ οικογένεια $\mathcal{F}$ μη αρνητικών συναρτήσεων f,

$$f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad 0 \leq f \leq 1,$$

με τις εξής ιδιότητες:

(i) $\forall f \in \mathcal{F} \ \exists V \in \mathcal{G}$ τ.ω. $\operatorname{spt} f \subset V$

(ii) αν $K \subset E$ συμπαγές $\operatorname{spt} f \cap K \neq \emptyset$ για πεπερασμένο # $f \in \mathcal{F}$

(iii) $\sum_{f \in \mathcal{F}} f(x) = 1 \quad \forall x \in E$

#