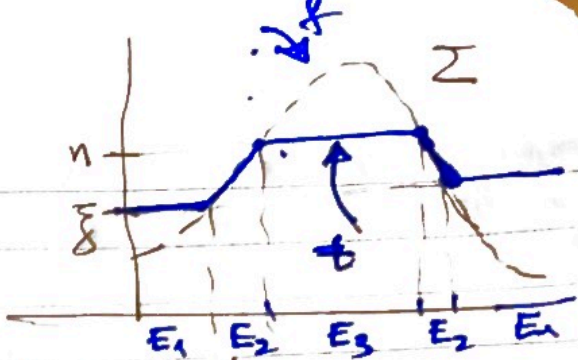

Παρατηρηση 1

Εστω $f_1, f_2 \in W^{1,p}(U) \Rightarrow$

$M(x) := \max\{f_1, f_2\}$, $m(x) := \min\{f_1, f_2\}$

$M, m \in W^{1,p}(U)$

Αποδειξη

$\max\{f_1(x), f_2(x)\} = f_2(x) + (f_1(x) - f_2(x))^+$

Ασ 18 Evans $\Longrightarrow M(\cdot) \in W^{1,p}(U)$

$\min\{a,b\} = -\max\{-a,-b\} \longrightarrow m(\cdot) \in W^{1,p}(U)$

Λυση της (1)

Εστω με εις ατοπον απαγωγη οτι $\mathcal{L}^n(E_2)=0$.

Κατα συνεπεια η $t(x)$ ειναι συναρτηση βηματος, αρα $\nabla t(x) = 0$ a.e.

Ομως $t(\cdot) \in W^{1,p}(U)$ μεσω Παρατηρησης 1.

Απο συνεκτικοτητα μεσω Ασ 11 του Evans προκυπτει οτι

$t(x) \equiv$ σταθερα. (a.e.)

Γνωριζουμε οτι $\mathcal{L}^n(E_3) > 0$, $E_3 = U \cap \{\eta < f\}$

Αρα $t(\cdot) \equiv \eta$ (a.e.). Επεται οτι $\mathcal{L}^n(E_1)=0$.
$E_1 = U \cap \{f \le \xi\}$, και $f > \eta$ στο U a.e.

Αυτό συγκρούεται με την υπόθεση ότι $f \le \xi$ στο ∂U, $\xi < \eta$.
Για να είμαστε αυστηροί εδώ χρειαζόμαστε το εξής αποτέλεσμα (βλ. Evans-Gariepy, Traces):

$$\lim_{r \to 0} \fint_{B(x,r)\cap U} |f - Tf(x)|\, dy = 0, \quad \mathcal{H}^{n-1} \text{ a.e., } x \in \partial U,$$

που βεβαίως δεν ικανοποιείται εφόσον $f > \eta$ στο $B(x,r)\cap U$, ενώ $Tf(x) \le \xi$ a.e $\mathcal{H}^{n-1}$ στο ∂U.
Οδηγηθήκαμε σε άτοπο υποθέτοντας $\mathcal{L}^n(E_2) = 0$.
Η απόδειξη είναι πλήρης.

$\square$

Σωστή Έκφραση της (1)

Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, φραγμένο, συνεκτικό, ∂U ομαλό.
Έστω $f \in W^{1,2}(U)$ ικανοποιεί

$$f \le \xi \quad \text{στο } \partial U$$

$$\mathcal{L}^n(U \cap \{\eta < f\}) > 0, \quad \eta > \xi$$

ξ, η φιξαρισμένα,

Δείξτε ότι $\mathcal{L}^n(U \cap \{\xi < f \le \eta\}) > 0$

Let $s, t : U \to \mathbb{R}$

$$s(x) = \min\{f(x), \eta\}, \quad t(x) = \max\{s(x), \xi\},$$

#

Λυση χωρις Minkowski

$\Rightarrow$ $u \in W^{1,p}(0,1)$, $1<p<\infty$, $u(0)=0$

$$\left\| \frac{u(x)}{x} \right\|_{L^p(0,1)} \leq \frac{p}{p-1} \|u'\|_{L^p(0,1)}$$

Απ

$$\int_0^1 \frac{|u(x)|^p}{|x|^p} dx = \int_0^1 |u(x)|^p \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right) dx$$

$$= \frac{1}{-p+1}\left[\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(|u(x)|^p x^{-p+1}\right) dx - \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x}|u(x)|^p\right) x^{-p+1} dx\right]$$

$$= \cancel{\frac{1}{-p+1}\left(\frac{|u(x)|}{x}\right)^p x \Bigg|_0^1} + \frac{1}{p-1}\int_0^1 p\,|u(x)|^{p-1} u_x\, x^{-p+1} dx$$

$$= \frac{p}{p-1}\int_0^1 |u|^{p-1} u_x\, x^{-p+1} dx$$

$$\leq \frac{p}{p-1}\left(\int_0^1 \frac{|u|^p}{x^p} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_0^1 |u_x|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

#