[Λεπτομερής Απ. του Θ 3, Evans p349] -1-

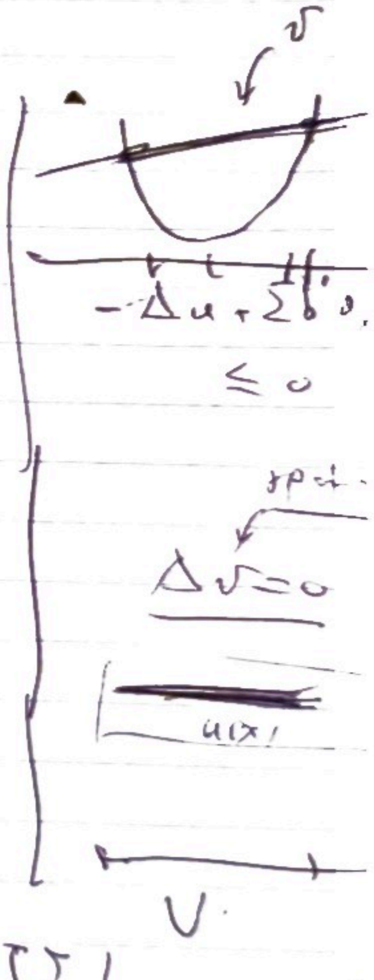
Πόρισμα (Ισχυρή Αρχή Μεγίστου) $\boxed{a^{ij}, b^i, c \in C(\bar{U})}$

$$Lu = -\sum a^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + b^i \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x) u \quad (E) \quad / \quad a^{ij}\xi_i\xi_j \geq \theta |\xi|^2$$

$\boxed{c(x) \equiv 0}$

Υπ:
1) $Lu \leq 0 \quad x \in U$
2) U ανοικτό, φραγμένο, συνεκτικό, $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$
3) $M := \max_{\bar{U}} u = u(x_0)$, $x_0 \in U$

Συμπέρασμα: $u(x) \equiv$ σταθερά.



Απ.

Με Άτοπο. Έστω $u \not\equiv$ σταθερά

$C := \{x \in U \mid u(x) = M\}$

$V := \{x \in U \mid u(x) < M\}$

Υπόθεση Ατόπου λέει ότι $V \neq \emptyset$

(δηλαδή $u \not\equiv M$ — υπόθεση ατόπου).

C = κλειστό στο U (σχετικά)

(λόγω συνέχειας της u: Αν $x_n \to \xi \in U$, $x_n \in C$ $\Rightarrow \xi \in C$

$M = u(x_n)$, $\boxed{u(x_n) \xrightarrow{\text{συνεχ}} u(\xi)}$

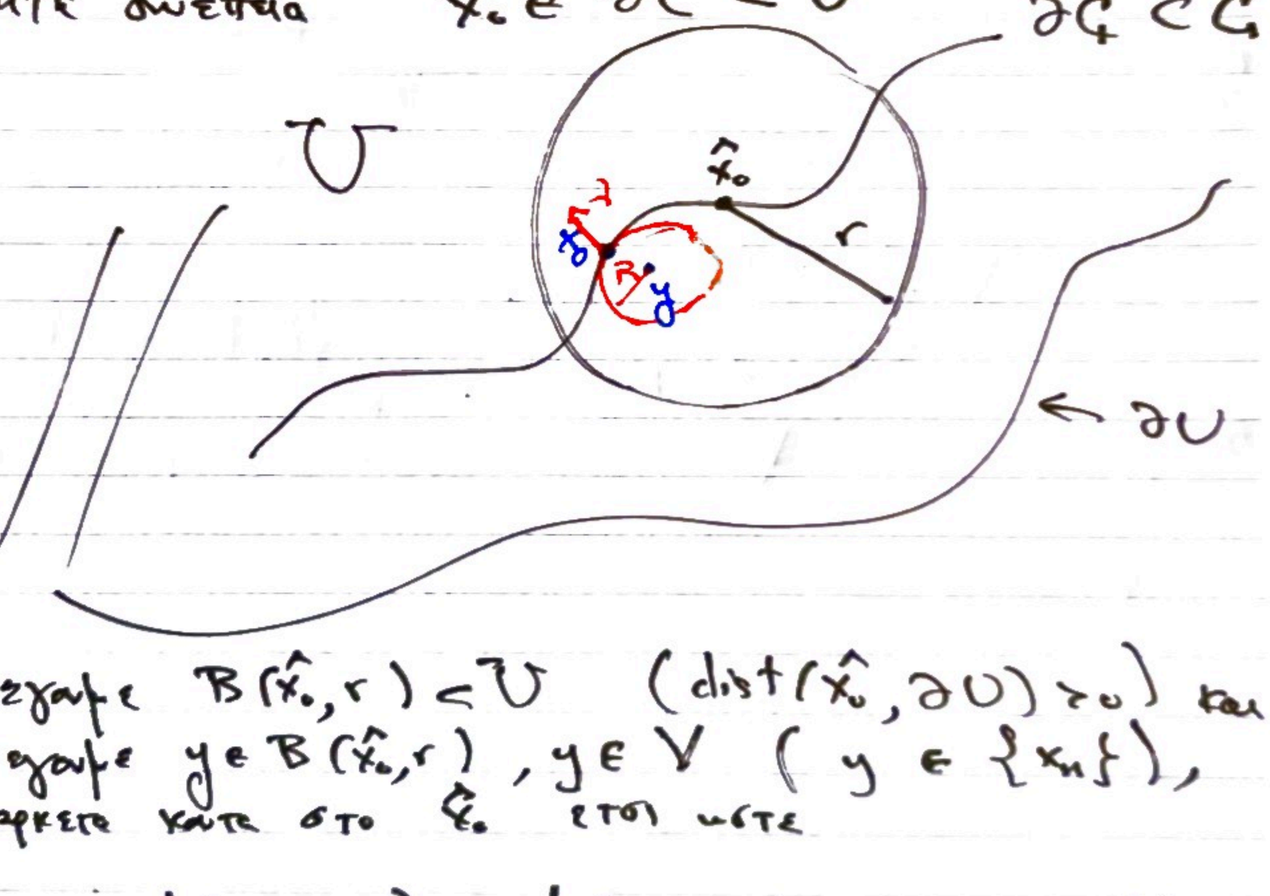
$\therefore \boxed{u(\xi) = M}$)

• C δεν είναι δυνατόν να είναι <u>και</u> (σχετικά) ανοικτό στο U (διότι λόγω συνεκτικότητας $u \equiv M$ στο U)

Εφ' όσον το C δεν είναι σχετικά ανοικτό $\Rightarrow \exists\ \hat{x}_0 \in C$, και επομένως $\exists \{x_n\} \notin C$

$$x_n \longrightarrow \hat{x}_0$$
$$\cap$$
$$V \;(= U/C)$$

Κατά συνέπεια $\hat{x}_0 \in \partial C \subset U$ $\quad \partial C \subset C$



Επιλέγουμε $B(\hat{x}_0, r) \subset U$ $(\mathrm{dist}(\hat{x}_0, \partial U) > 0)$ και επιλέγουμε $y \in B(\hat{x}_0, r)$, $y \in V$ $(y \in \{x_n\})$, και αρκετά κοντά στο $\hat{x}_0$ έτσι ώστε

$$(*) \qquad d(y, \partial C) < d(y, \partial U), \quad y \in V$$

Θεωρούμε την μεγαλύτερη δυνατή $B(y, R) \subset V$
Λόγω της (*) $\exists\ x_0 \in \partial C$, $x_0 \in \partial B(y, R)$
Τώρα θα εφαρμόσουμε το συνοριακό Λήμμα του Hopf στο $V = \{x \in U \mid u(x) < M\}$, $u(x_0) = M$. Παρατηρούμε ότι η $B(y, R)$ έχει την ιδιότητα της εσωτερικής σφαίρας.

Θεωρουμε την μοναδιαια καθετο ν στην σφαιρα $S(y,R)$, στο $x_0 \in U$.

$$\text{Hopf} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial u(x_0)}{\partial \nu} > 0} \quad (**)$$

Ομως στο x_0 εχουμε μεγιστο της u, και $x_0 \in U$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla u(x_0) = 0} \quad (***)$$

$$(**) \not\Leftrightarrow (***).$$

Καταληξαμε σε Ατοπο!

$\square$