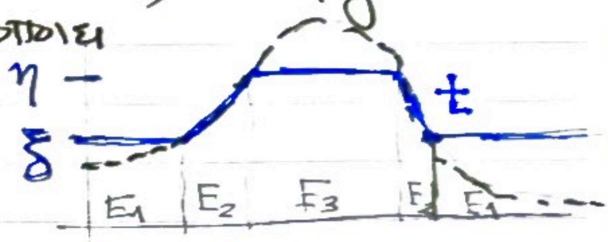
Κατ'οικον Εξεταση Ν. ΑΛΙΚΑΚΟΣ
Ιουνιος 2023 1/7/23
ΜΔΕ ΙΙ - Μεταπτυχιακο

Γ $u \leq 0$, $x \in$

Προσοχη: Μερος Ι τυπεγραφικο
(4 μερη συνολικα, Ι, ΙΙ, ΙΙΙ, ΙV

ΜΕΡΟΣ ΙΙ Συναρτησεις Sobolev

① Εστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτο, φραγμενο, συνεκτικο, ∂U ομαλο.
Υποθετουμε οτι η $f \in W^{1,2}(U)$ ικανοποιει



$$f \leq \xi \quad \text{στο } \partial U$$

$$\mathcal{L}^n(U \cap \{\eta < f\}) > 0 \quad \text{για καποιο } \xi < \eta$$

Δειξτε οτι

$$\mathcal{L}^n(U \cap \{\xi < f \leq \eta\}) > 0$$

ακολουθωντας τα εξης βηματα τα οποια πρεπει να δικαιολογησετε με καθε λεπτομερεια

(α) Εστω $s, t : U \to \mathbb{R}$ οριζονται ως εξης

$$s(x) = \min\{f(x), \eta\} = \begin{cases} f(x), & x \in E_1 := U \cap \{f \leq \xi\} \\ \eta, & x \in E_3 := U \cap \{\eta < f\}. \end{cases}$$

και

$$t(x) = \min\{s(x), \xi\} = \begin{cases} \xi, & x \in E_1. \\ \eta, & x \in E_3. \end{cases}$$

- $s, t \in W^{1,2}(U)$ (?)

(β) Με εις ατοπον απαγωγη: $\mathcal{L}^n(U \cap \{\xi < f \leq \eta\}) = 0$
- $\nabla t = 0$ a.e. $\Longrightarrow$ $t \equiv$ σταθερα (?)

$\therefore \quad t \equiv \eta$ (?)

(γ) • $\mathcal{L}^n(E_3) > 0$, $\mathcal{L}^n(E_1) = 0$. (?)

\#

② (i) Έστω ότι ισχύει η

(1) $\|u\|_{L^r} \le C_\alpha \|u\|_{L^s}^{1-\alpha} \|\nabla u\|_{L^p}^{\alpha}$

C_α σταθερά, $\forall u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$, C_α ανεξάρτητη του φορέα της u (και της u εν γένει).
Δείξτε ότι αναγκαστικά

(2) $$\frac{1}{r} = \alpha\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right) + \frac{1-\alpha}{s}$$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ C(\varepsilon, p)$ τ.ω.

(3) $\|u\|_{L^\infty(0,1)} \le \varepsilon \|u'\|_{L^p(0,1)} + C \|u\|_{L^1(0,1)}$

$u \in W^{1,p}(0,1)$, $p > 1$.

Δείξτε ότι (3) και δείξτε ότι δεν ισχύει για $p=1$ $(u_n(x) = x^n)$

(iii) $1 \le q < \infty$. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ C = C(\varepsilon, q)$ τ.ω.

(4) $\|u\|_{L^q(0,1)} \le \varepsilon \|u'\|_{L^1(0,1)} + C \|u\|_{L^1(0,1)}$, $u \in W^{1,1}(0,1)$

③ $I = (0,1)$, $u : I \to \mathbb{R}$, $\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in I \\ 0, & x \in \mathbb{R},\ x \notin I \end{cases}$

(i) $u \in W^{1,p}(I)$, $1 \le p < \infty \Rightarrow \bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$.
Αντίστροφα $u \in L^p(I)$, $1 \le p < \infty$, και $\bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}) \Rightarrow u \in W_0^{1,p}(I)$

(ii) Αν $u \in L^p(I)$, $1 < p < \infty$ δείξτε ότι
$u \in W_0^{1,p}(I) \Leftrightarrow \exists \ C$ τ.ω.
$$\left| \int_{\mathbb{R}} \bar{u} \varphi' \, dx \right| \le C \|\varphi\|_{L^{p'}(\mathbb{R})}, \quad \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R})$$
$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

(3) (i) $u \in W^{1,p}(0,1)$, $1<p<\infty$

Αν $u(0)=0 \Rightarrow \frac{u(x)}{x} \in L^p(0,1)$ και

$$\left\| \frac{u(x)}{x} \right\|_{L^p(0,1)} \leq \frac{p}{p-1} \|u'\|_{L^p(0,1)}.$$

(ii) Αντιστρόφως, αν $u \in W^{1,p}(0,1)$, $1 \leq p < \infty$, και

$$\frac{u(x)}{x} \in L^p(0,1)$$

$$\Rightarrow \quad u(0)=0.$$

\#

(4) Έστω ψ ομαλή, φραγμένη και μη φθίνουσα, τ.ω. η ψ' φραγμένη και

$$\psi(z)=z \quad \text{αν} \quad |z| \leq 2.$$

Θέτουμε

$$u^\varepsilon(x) := \varepsilon \psi\left(\frac{u}{\varepsilon}\right), \quad u \in H^1(U).$$

Δείξτε ότι $u^\varepsilon \longrightarrow 0$ (ασθενώς) στον $H^1(U)$

(U ανοικτό, φραγμένο, $\subset \mathbb{R}^n$) και συνεπώς

$$\int_U (\nabla u^\varepsilon \cdot \nabla u)\, dx = \int_U \psi'\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) |\nabla u|^2 dx \to 0$$

όπως $\varepsilon \to 0$. $\square$

\#