ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ Ι, ΙΟΥΝΙΟΣ 2010 - ΟΜΑΔΑ ΘΕΜΑΤΩΝ Α

Θέμα 1. (3 βαθμοί) Παρατηρούμε τις διαδοχικές ανεξάρτητες ρίψεις ενός νομίσματος που φέρνει την ένδειξη 'Κ' με πιθανότητα $\frac{1}{3}$ και την ένδειξη 'Γ' με πιθανότητα $\frac{2}{3}$. Να υπολογιστούν:
(α) η πιθανότητα στις πρώτες 5 ρίψεις να εμφανιστούν 3 'Κ' και 2 'Γ',
(β) η δεσμευμένη πιθανότητα η πρώτη ρίψη να είναι 'Κ' δεδομένου ότι στις πρώτες 5 ρίψεις εμφανίστηκαν 3 'Κ' και 2 'Γ',
(γ) ο μέσος αριθμός ρίψεων μέχρι να παρατηρηθούν δυο συνεχόμενες 'Κ'.

Θέμα 2. (3 βαθμοί) Από μια κάλπη, που περιέχει 50 διακριμένα σφαιρίδια που φέρουν τους αριθμούς $1, 2, \ldots, 50$, επιλέγεται τυχαία ένα σφαιρίδιο. Έστω N η τυχαία μεταβλητή που αντιστοιχεί στον αριθμό του σφαιριδίου που επιλέχθηκε. Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο ζάρι N φορές, δηλάδη όσες φορές δείχνει ο αριθμός του σφαιριδίου που επιλέχθηκε. Οι διαδοχικές ρίψεις του ζαριού θεωρούνται ανεξάρτητες. Έστω X το πλήθος των ρίψεων στις οποίες το ζάρι εμφάνισε την ένδειξη '6'. Να υπολογιστούν:
(α) η πιθανότητα $P(N = n, X = x)$, $n = 1, 2, \ldots, 50$ και $x = 0, 1, 2, \ldots, n$,
(β) η πιθανότητα $P(X = 0)$,
(γ) η δεσμευμένη πιθανότητα $P(N = n|X = 0)$, $n = 1, 2, \ldots, 50$,
(δ) η δεσμευμένη μέση τιμή $E[X|N = n]$, $n = 1, 2, \ldots, 50$,
(ε) η μέση τιμή $E[X]$.

Θέμα 3. (3 βαθμοί) Έστω (X, Y) διδιάστατη συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(3x^2 + 2y) & \text{αν } 0 \le x \le 1 \text{ και } 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Να υπολογιστούν:
(α) η σταθερά c,
(β) οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$ και $f_Y(y)$ των X και Y,
(γ) η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{X|Y}(x|y)$ της X δοθέντος ότι $Y = y$,
(δ) η πιθανότητα $P(X < Y)$,
(ε) η μέση τιμή $E[3X + 5]$.

Θέμα 4. (3 βαθμοί) Οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες και ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο 2, δηλαδή έχουν συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{X_i}(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{αν } x > 0 \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Η N είναι ανεξάρτητη των $X_1, X_2, \ldots$ και έχει τη γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $\frac{1}{3}$ δηλαδή συνάρτηση πιθανότητας

$$p_N(n) = P(N = n) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

(α) Να υπολογιστεί η ροπογεννήτρια της X_i, $i = 1, 2, \ldots$.
(β) Να υπολογιστεί η ροπογεννήτρια της $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ και να βρεθεί τί κατανομή ακολουθεί η S_N.
(γ) Έστω $S_{100} = \sum_{i=1}^{100} X_i$ Να υπολογιστεί προσεγγιστικά, με χρήση του κεντρικού οριακού θεωρήματος, η πιθανότητα $P(S_{100} \ge 50)$.

ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΕ 2 $\frac{1}{2}$ ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!
Ο τελικός βαθμός υπολογίζεται ως το min(άθροισμα βαθμών θεμάτων, 10).

Πιθανότητες Ι, Ιούνιος 2010, Λύσεις Θεμάτων Ομάδα Α

Θέμα 1.

(α) P(στις πρώτες 5 ρίψεις να εμφανιστούν 3 'Κ' και 2 'Γ')

$$= \binom{5}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2 \quad \text{(Διωνυμική)}$$

(β) P(η 1η ρίψη είναι 'Κ' | στις 5 πρώτες ρίψεις εμφανίστηκαν 3 'Κ' και 2 'Γ')

$$= \frac{P(\text{η 1η ρίψη είναι 'Κ', στις ρίψεις 2-4 εμφανίστηκαν 2 'Κ' και 2 'Γ'})}{P(\text{στις 5 πρώτες ρίψεις εμφανίστηκαν 3 'Κ' και 2 'Γ'})}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\cdot\binom{4}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2}{\binom{5}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{5}{3}} = \frac{\binom{4}{2}}{\frac{5}{3}\binom{4}{2}} = \frac{3}{5}.$$

(γ) Έστω

X : ο αριθμός των ρίψεων μέχρι να παρατηρηθούν δύο διαδοχ. 'Κ'

Y : ο αριθμός των ρίψεων μέχρι να εμφανιστούν 'Γ' για πρώτη φορά.

Από Θεώρημα Διπλής Μέσης Τιμής:

$$E[X] = \sum_{y=1}^{\infty} P(Y=y)\, E[X \mid Y=y].$$

Όμως

$$P(Y=y) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{y-1}, \quad y=1,2,3,\dots \quad \text{(Γεωμετρική)}$$

$$E[X \mid Y=1] = 1 + E[X]$$

$$E[X \mid Y=2] = 2 + E[X]$$

$$E[X \mid Y=y] = 2, \quad y=3,4,\dots$$

οπότε

$$E[X] = \frac{2}{3}\left(1+E[X]\right) + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\left(2+E[X]\right) + \sum_{y=3}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{y-1}\cdot 2$$

Άθροισμα γεωμετρικής προόδου

$$= \frac{2}{3} + \frac{2}{3}E[X] + \frac{4}{9} + \frac{2}{9}E[X] + \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\cdot 2$$

$$= \frac{8}{9}E[X] + \frac{12}{9}.$$

Επομένως $E[X] = 12$.

Θέμα 2.

(α) Από πολλαπλασιαστικό νόμο έχουμε

$$P(N=n, X=x) = P(N=n)P(X=x|N=n) = \frac{1}{50}\cdot\binom{n}{x}\left(\frac{1}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{n-x}, \quad n=1,2,\ldots,50,\ x=0,1,\ldots,n$$

(β) Από θεώρημα ολικής πιθανότητας έχουμε

$$P(X=0) = \sum_{n=1}^{50} P(N=n)P(X=0|N=n) = \sum_{n=1}^{50} \frac{1}{50}\binom{n}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$= \frac{1}{50}\sum_{n=1}^{50}\left(\frac{5}{6}\right)^n = \frac{1}{50}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{50}}{1-\frac{5}{6}} = \frac{1}{10}\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^{50}\right)$$

(γ) Από θεώρημα Bayes έχουμε

$$P(N=n|X=0) = \frac{P(N=n)P(X=0|N=n)}{P(X=0)} = \frac{\frac{1}{50}\binom{n}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^n}{\frac{1}{10}\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^{50}\right)}$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^n}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{50}}, \quad n=1,2,\ldots,50$$

(δ) Η δεσμευμένη κατανομή της X δεδομένου ότι $N=n$ είναι διωνυμική με n δοκιμές και πιθανότητα επιτυχίας $\frac{1}{6}$ ανά δοκιμή. Συνεπώς $E[X|N=n] = n\cdot\frac{1}{6}$.

(ε) Από θεώρημα διπλής μέσης τιμής έχουμε

$$E[X] = E[E[X|N]] = E\left[N\cdot\frac{1}{6}\right] = \frac{1}{6}E[N] = \frac{1}{6}\cdot\frac{51}{2} = \frac{51}{12}$$

γιατί η N είναι ομοιόμορφη διακριτή στο $\{1,2,\ldots,50\}$ οπότε

$$E[N] = \sum_{n=1}^{50} n\cdot P(N=n) = \sum_{n=1}^{50} n\cdot\frac{1}{50} = \frac{1}{50}\cdot\frac{50\cdot 51}{2} = \frac{51}{2}.$$

Εναλλακτικά:

$$E[X] = \sum_{n=1}^{50} P(N=n)E[X|N=n] = \sum_{n=1}^{50}\frac{1}{50}\cdot\frac{n}{6} = \frac{1}{300}\sum_{n=1}^{50} n = \frac{1}{300}\cdot\frac{50\cdot 51}{2}$$

$$= \frac{51}{12}$$

Θέμα 3.

(α) $$1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 c(3x^2+2y)\,dx\,dy$$

$$= c\int_0^1 [x^3+2xy]_{x=0}^{1}\,dy = c\int_0^1 (1+2y)\,dy = c\,[y+y^2]_{y=0}^{1}$$

$$= 2c \Rightarrow c=\frac{1}{2}$$

οπότε

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}(3x^2+2y) & \text{αν } 0\le x\le 1 \text{ και } 0\le y\le 1\\ 0 & \text{διαφορετικά.}\end{cases}$$

(β) $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy=\int_0^1 \frac{1}{2}(3x^2+2y)\,dy=\left[\frac{3x^2y}{2}+\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{1}$$

$$=\frac{3x^2+1}{2},\quad 0\le x\le 1.$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx=\int_0^1 \frac{1}{2}(3x^2+2y)\,dx=\left[\frac{x^3}{2}+yx\right]_{x=0}^{1}$$

$$=\frac{2y+1}{2},\quad 0\le y\le 1.$$

(γ) $$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{\frac{1}{2}(3x^2+2y)}{\frac{1}{2}(2y+1)}=\frac{3x^2+2y}{1+2y},\quad 0\le x\le 1$$

(δ) $$P(X<Y)=\int_0^1\int_0^y \frac{1}{2}(3x^2+2y)\,dx\,dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 [x^3+2yx]_{x=0}^{y}\,dy=\frac{1}{2}\int_0^1 (y^3+2y^2)\,dy$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{y^4}{4}+\frac{2y^3}{3}\right]_{y=0}^{1}=\frac{1}{8}+\frac{1}{3}=\frac{11}{24}.$$

(ε) $$E[X]=\int_0^1 x\,\frac{3x^2+1}{2}\,dx=\int_0^1 \frac{3x^3+x}{2}\,dx=\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{x^4}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{1}$$

$$=\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=\frac{5}{8}\Rightarrow E[3X+5]=3E[X]+5=\frac{55}{8}.$$

Θέμα 4.

(α) $M_{X_i}(t) = E[e^{tX_i}] = \int_0^\infty e^{tx} 2e^{-2x} dx = 2\int_0^\infty e^{-(2-t)x} dx$

$$= \frac{2}{2-t}, \quad t<2.$$

(β) $M_{S_N}(t) = P_N(M_{X_i}(t))$.

Όμως

$$P_N(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} z^n = \frac{z}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2z}{3}\right)^{n-1} = \frac{z}{3}\,\frac{1}{1-\frac{2z}{3}} = \frac{z}{3-2z}$$

οπότε

$$M_{S_N}(t) = \frac{M_{X_i}(t)}{3-2M_{X_i}(t)} = \frac{\frac{2}{2-t}}{3-2\cdot\frac{2}{2-t}} = \frac{2}{3(2-t)-4} = \frac{2}{2-3t}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}-t} = \int_0^\infty e^{tx}\frac{2}{3}e^{-\frac{2}{3}x}dx.$$

Άρα η S_N είναι εκθετική με παράμετρο $\frac{2}{3}$.

(γ) $P(S_{100} \geq 50) = P\left(\frac{S_{100}-E[S_{100}]}{\sqrt{Var[S_{100}]}} \geq \frac{50-E[S_{100}]}{\sqrt{Var[S_{100}]}}\right)$.

Έχουμε

$E[X_i] = \frac{1}{2} \Rightarrow E[S_{100}] = 100\cdot\frac{1}{2} = 50$

$Var[X_i] = \frac{1}{4} \Rightarrow Var[S_{100}] = 100\cdot\frac{1}{4} = 25$

Επομένως

$$P(S_{100}\geq 50) = P\left(\frac{S_{100}-E[S_{100}]}{\sqrt{Var[S_{100}]}} \geq \frac{50-50}{\sqrt{25}}\right)$$

$$\overset{\text{ΚΟΘ}}{\simeq} P(Z\geq 0), \quad Z\sim N(0,1)$$

$$= 1-\Phi(0)$$

$$= 1-\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$