

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ Ι – ΠΡΟΟΔΟΣ 04.05.2023

ΤΜΗΜΑ Π. ΜΕΡΤΙΚΟΠΟΥΛΟΥ

Διάρκεια εξέτασης: 1 ώρα

Οδηγίες: Λύστε όσα προβλήματα προλαβαίνετε στο χρόνο της εξέτασης· η μέγιστη βαθμολογία είναι 20. Γράψετε τις λύσεις με τη σειρά και σημειώστε με καθαρό και ευδιάκριτο τρόπο τα προβλήματα που λύνετε!

Θέμα 1 (2 μονάδες). Ανοίγουμε κατά σειρά χαρτιά από μία καλά ανακατεμένη τράπουλα 52 χαρτιών. Ποιά είναι η πιθανότητα το 13ο χαρτί που θα ανοίξουμε να είναι η πρώτη ντάμα?

✱

Θέμα 2 (3 μονάδες). Σας δίνονται τρία νομίσματα: το πρώτο έχει κορώνα και στις δύο πλευρές, το δεύτερο έχει γράμματα και στις δύο πλευρές, και το τρίτο έχει κορώνα στη μία πλευρά και γράμματα στην άλλη. Επιλέγουμε ένα νόμισμα στην τύχη (ισοπίθανα), το ρίχνουμε και έρχεται κορώνα. Ποιά είναι η πιθανότητα ότι η άλλη πλευρά είναι γράμματα?

✱

Θέμα 3 (3 μονάδες). Έστω ενδεχόμενα A, B, C ενός πειράματος τύχης. Να δειχθεί ότι

$$\mathbb{P}(A | B) = \mathbb{P}(C | B) \mathbb{P}(A | BC) + \mathbb{P}(C' | B) \mathbb{P}(A | BC')$$

όπου C' το συμπληρωματικό ενδεχόμενο του C και τα υπό δέσμευση ενδεχόμενα έχουν θετική πιθανότητα.

✱

Θέμα 4 (6 μονάδες). Έστω $a, b \in \mathbb{N}$ θετικοί ακέραιοι με $a \leq b$, και έστω X τυχαία μεταβλητή η οποία είναι ομοιόμορφα κατανομημένη στις δυνάμεις του 2 στο διάστημα $[2^a, 2^b]$ (δηλαδή παίρνει ως τιμές τις δυνάμεις του 2 στο παραπάνω διάστημα με ίση πιθανότητα). Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της X .

✱

Θέμα 5 (6 μονάδες). Έστω X μία διακριτή τυχαία μεταβλητή με σ.μ.π.

$$p(x) = \begin{cases} x^2/c & \text{αν } x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \\ 0 & \text{άλλως} \end{cases}$$

όπου $c > 0$ προσδιοριστέα σταθερά.

- (1) Υπολογίστε τη μέση τιμή $\mathbb{E}[X]$ της X .
- (2) Βρείτε τη σ.μ.π. της τυχαίας μεταβλητής $Y = [X - \mathbb{E}[X]]^2$.
- (3) Υπολογίστε τη διασπορά $\text{Var}(X)$ της X .

✱

Θέμα 6 (6 μονάδες). Έστω $X \sim \text{Pois}(\lambda)$ τυχαία μεταβλητή Poisson με παράμετρο $\lambda > 0$. Να δείξετε ότι

$$\mathbb{E}[X^n] = \lambda \mathbb{E}[(X+1)^{n-1}] \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση (ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο), υπολογίστε την $\mathbb{E}[X^3]$.

✱

Καλή επιτυχία!!