Διάλεξη 7 — 7.3.23

ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

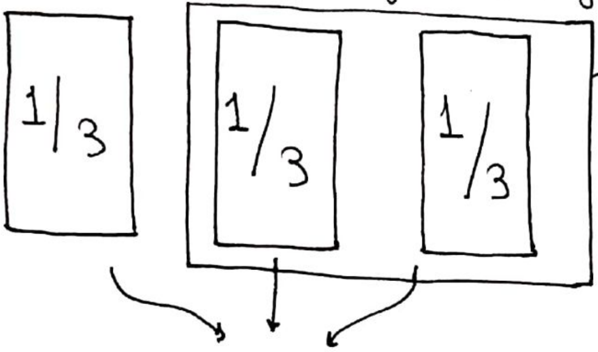
ΓΡΑΦΕΙΣ:
Ειρήνη Θεοδώρου
Κωνσταντίνα Νησίδη

Εισαγωγή: Το πρόβλημα του Monty Hall:

Σε ένα τηλεπαιχνίδι, ο Monty Hall δίνει στον παίχτη την επιλογή ανάμεσα σε τρείς πόρτες → Μια έχει ένα αμάξι → Οι άλλες 2 από μια κατσίκα (ZONK)

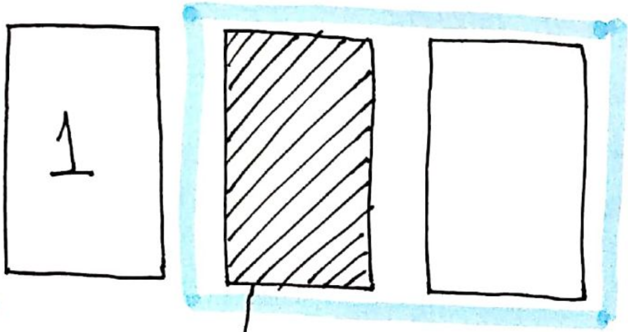
Μετά την επιλογή του παίχτη, ο Monty δίνει στον παίχτη τη δυνατότητα να αλλάξει την επιλογή τους. Τι συμφέρει τον παίχτη;

- Επιχείρημα για το ότι η στρατηγική αλλαγής είναι βέλτιστη:



→ Συνολική Πιθανότητα = 2/3 αν "διαλέξω" και τις δύο κάρτες.

Η πιθανότητα να πετύχουμε το αμάξι



Χωρίς βλάβη της Γεν/τας
Έστω ότι ο παίχτης διάλεξε την πόρτα 1.
⇒ 1/3 πιθανότητα να κερδίσει

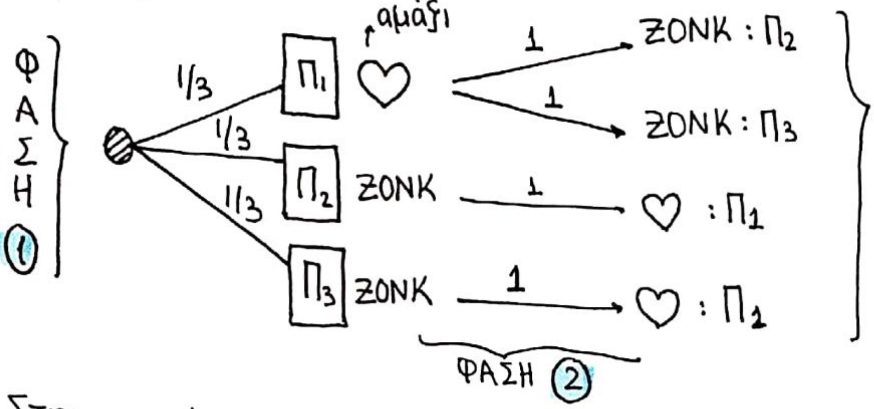
Η πόρτα διαγράφεται από τον Monty.

Η πιθανότητα να είναι το αμάξι σε μια πόρτα διαφορετική της $Π_1$ είναι $2/3$.
Άρα δεδομένου ότι ο Monty διαγράφει την $Π_2$, η πιθανότητα το αμάξι να είναι στην $\boxed{Π_3}$ είναι $\boxed{2/3}$!

Δέντρο αποφάσεων επιλογών του προβλήματος:

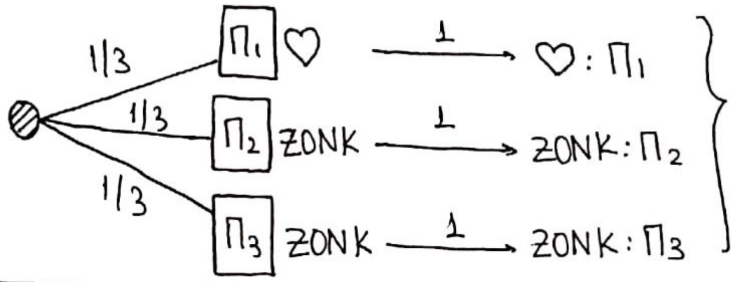
7.3.2023

Στην περίπτωση που ο παίχτης αλλάζει την επιλογή του, έχουμε τα εξής ενδεχόμενα:



$$\mathbb{P}(\heartsuit \text{ με αλλαγή}) = 1 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

Στην περίπτωση που ο παίχτης κρατάει την επιλογή του:

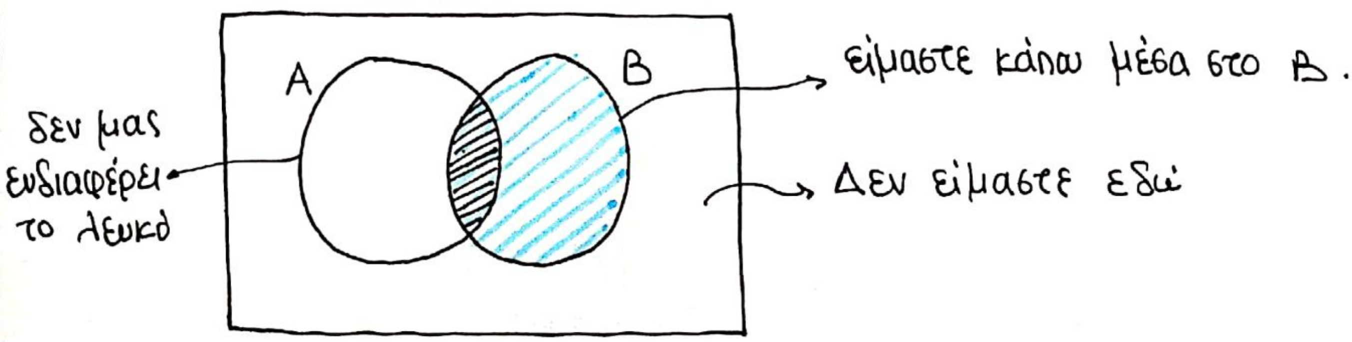


$$\mathbb{P}(\heartsuit \text{ αν κρατήσω}) = \frac{1}{3} \times 1 = \boxed{\frac{1}{3}}$$

⇝ Ξεκινάμε με έναν δ.χ. Ω με μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}$.

⇝ Γνωρίζουμε μια "πληροφορία" για το πείραμα τύχης που περιγράφεται από τον χ. πιθανότητας $(\Omega, \mathbb{P})$, δηλαδή γνωρίζουμε ότι συμβαίνει ένα <u>ενδεχόμενο</u> B του Ω.

⇝ Θέλουμε να προσδώσουμε πιθανότητα σε ένα ενδεχόμενο A του Ω δεδομένης της πληροφορίας που έχουμε, ότι συμβαίνει το B.



⇝ Η πιθανότητα να συμβεί το A δεδομένου ότι συμβαίνει το B, προσδιορίζεται από την πιθανότητα της τομής $A \cap B$ στον δειγματικό υπόχωρο που ορίζει το B.

7.3.23

ΟΡΙΣΜΟΣ: Η δεσμευμένη πιθανότητα του Α, δεδομένου του Β:

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}}$$

Παράδειγμα: Ρίχνουμε ένα νόμισμα 2 φορές.

α) Ποιά η πιθανότητα να φέρουμε κορώνα την $2^{η}$ φορά δεδομένου ότι φέραμε κορώνα την $1^{η}$.

Λύση:

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα: $\begin{cases} A = \text{κορώνα τη } 2^{η} \\ B = \text{κορώνα τη } 1^{η} \end{cases}$

• $A\cap B = \{\text{κορώνα } 1^{η}, \text{κορώνα } 2^{η}\} = \{K,K\} \Rightarrow \mathbb{P}(A\cap B) = \dfrac{|\{KK\}|}{|\{KK, K\Gamma, \Gamma K, \Gamma\Gamma\}|} = \dfrac{1}{4}$

• $B = \{\text{κορώνα } 1^{η}\} = \{KK, K\Gamma\}$, $\mathbb{P}(B) = \dfrac{|\{KK, K\Gamma\}|}{|\{KK, K\Gamma, \Gamma K, \Gamma\Gamma\}|} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

Άρα $\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

β) Ποιά η πιθανότητα να φέρουμε κορώνα, δεδομένου ότι φέραμε τουλάχιστον μια κορώνα?

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα: $\begin{cases} A = \text{κορώνα τη } 2^{η} \\ B = \text{κορώνα \underline{τουλάχιστον μια}} \end{cases}$

$$\left.\begin{aligned} B &= \{KK, K\Gamma, \Gamma K\}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{3}{4} \\ A\cap B &= \{KK, \Gamma K\}, \quad \mathbb{P}(A\cap B) = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbb{P}(A|B) = \boxed{\frac{2}{3}}$$

7.3.23

Παράδειγμα 2: Ρίχνουμε n φορές ένα αμερόληπτο νόμισμα.

1] Ποιά η πιθανότητα να φέρουμε διαδοχικά Γ;

2] Ποιά η πιθανότητα να φέρουμε Γ στη ρίψη $n+1$, δεδομένου ότι φέραμε διαδοχικές πλευρές Γ n φορές ήδη;

Λύση

1] Ευνοϊκά Αποτελέσματα: $\underline{\Gamma|\Gamma|\ldots\ldots|\Gamma}$ ⤳ 1 ευνοϊκό

Συνολικά Αποτελέσματα: $\underline{2|2|\ldots\ldots|2}$ ⤳ 2^n αποτελέσματα

↳ $\mathbb{P}(\text{Ερ } 1) = \boxed{\dfrac{1}{2^n}}$

2] $A = \{n \text{ πρώτες ρίψεις} = \Gamma\}$, $B = \{(n+1)\text{-στή ρίψη} = \Gamma\}$ $\Rightarrow \mathbb{P}(B|A) = \dfrac{\mathbb{P}(B\cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{1/2^{n+1}}{1/2^n} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω δ.χ. Ω με μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}$ και έστω ενδεχόμενο $A \subseteq \Omega$ με πιθανότητα $\mathbb{P}(A) > 0$.
Τότε η απεικόνιση $B \longmapsto \mathbb{P}(B|A) = \dfrac{\mathbb{P}(B\cap A)}{\mathbb{P}(B)}$ είναι ένα καινούριο μέτρο πιθανότητας στον Ω.
Επιπλέον έχουμε $\mathbb{P}(B|A) = 0$, όποτε $\mathbb{P}(A\cap B) = \varnothing$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Πρέπει να δείξουμε τα:

α) $\mathbb{P}(B|A) \in [0,1] \ \forall B \subseteq \Omega$

β) $\mathbb{P}(\Omega|A) = 1$

γ) $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i | A\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i|A)$ ∀ συλλογή $B_1, \ldots, B_n \subseteq \Omega$: $B_i \cap B_j = \varnothing \ \forall i,j$

Πράγματι:

α) $\mathbb{P}(B|A) = \dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)} \leqslant \dfrac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} = 1$ ($\mathbb{P}(B|A) \geq 0$ τετ/νο)

β) $\mathbb{P}(\Omega|A) = \dfrac{\mathbb{P}(\Omega\cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} = 1.$

(γ) ⟶ Σελ. 5

7.3.23

γ) Τέλος, για την ένωση $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, έχουμε:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \mid A\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)\cap A\right)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(B_i\cap A)\right)}{\mathbb{P}(A)}$$

Δεδομένου ότι $B_i\cap B_j=\emptyset$ άρα $B_i\cap A=\emptyset$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\mathbb{P}(B_i\cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(B_i\mid A) \quad ▨$$

γιατί;

$(B_i\cap A)\cap(B_j\cap A) = (B_i\cap B_j)\cap(A\cap A) = \emptyset\cap A = \emptyset$

- Ασυμμετρία της Δεσμευμένης Πιθανότητας.

$$\mathbb{P}(A\mid B) \neq \mathbb{P}(B\mid A)$$

$$\mathbb{P}(A\mid B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\boxed{\mathbb{P}(A)}} \qquad \mathbb{P}(B\mid A) = \frac{\mathbb{P}(B\cap A)}{\boxed{\mathbb{P}(B)}}$$

Παράδειγμα: Στην ρίψη 2 ζαριών θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$A = \{2 \text{ ζυγοί}\}$

$B = \{\text{ζυγό άθροισμα}\}$

$\mathbb{P}(A\mid B) < 1 = \mathbb{P}(B\mid A)$.

$\boxed{\text{ΘΕΩΡΗΜΑ του BAYES}}$: Αν $(\Omega, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας και $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)>0$, τότε:

$$\boxed{\mathbb{P}(B\mid A) = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}\cdot\mathbb{P}(A\mid B)}.$$

- $\boxed{\text{ΘΕΩΡΗΜΑ ΟΛΙΚΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ}}$

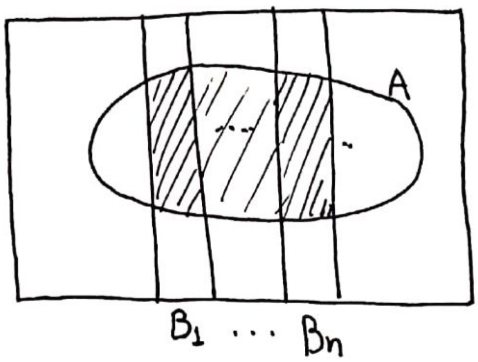
Έστω χώρος πιθανότητας $(\Omega\mid\mathbb{P})$ και έστω οικογένεια ενδεχομένων $B_i, i=1,\dots,n$ ξένων μεταξύ τους, $\mathbb{P}(B_i)>0$.

Τότε:

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(A\mid B_i)\,\mathbb{P}(B_i)} \quad \text{όταν } A\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(A\mid B_i)\mathbb{P}(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(A\cap B_i) = \mathbb{P}\left(A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\right)\right)$$



$\boxed{\text{ΠΟΡΙΣΜΑ}}$: Αν τα B_i διαμερίζουν όλο τον Ω:

$$\left[\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i = \Omega \text{ και } B_i\cap B_j=\emptyset\right]$$

τότε: $\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(A\mid B_i)\mathbb{P}(B_i)$