Μάθημα 17 – 05.02.2023

ΓΡΑΦΕΙΣ

Κωνσταντίνος Κατσαδώρος – Παύλος Σταμούλης

## Συνέχεια απόδειξης LOTUS:

**Λήμμα:** Αν $Y \geq 0$, τότε $E(Y) = \int_0^{\infty} P(Y \geq y)\,dy$

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι, αν $g \geq 0$, τότε $E[g(X)] = \int_0 g(x)f(x)dx$ όπου $X$ συνεχής τ.μ. με σ.π.π. $f(x)$

[Με την προϋπόθεση ότι τα διάφορα ολοκληρώματα υπάρχουν]

Έστω $Y = g(X)$ οπότε, εκ του λήμματος έχουμε

$$E[Y] \overset{\text{ΛΗΜΜΑ}}{=\!=\!=} \int_0^{\infty} P(Y \geq y)\,dy$$

$$= \int_0^{\infty} \boxed{P(g(X) \geq y)}\,dy$$

$$\int_0^{\infty} \boxed{\int_{\{x:\, g(x) \geq y\}} f(x)\,dx}\, dy \quad ⊛$$

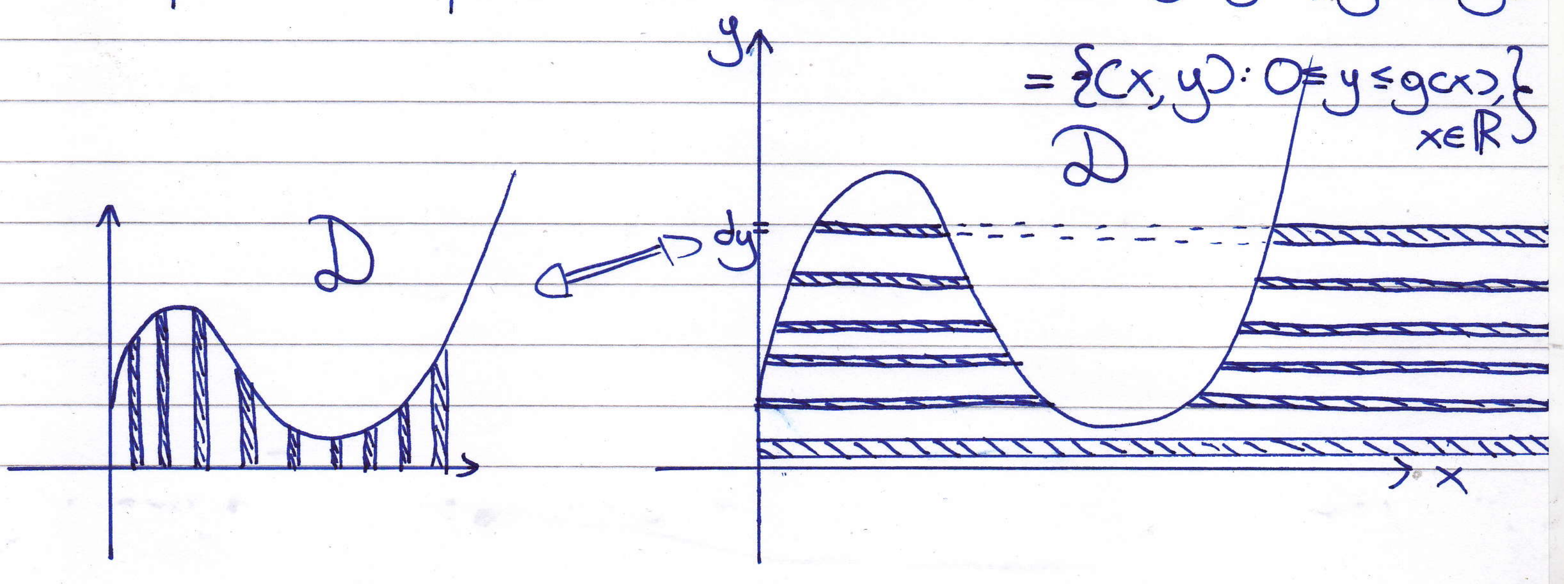
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{g(x)} f(x)\,dy\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \underbrace{\int_0^{g(x)} dy}_{g(x)}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\,dx$$

Το χωρίο ολοκλήρωσης της ⊛ είναι $D = \{(x,y) : y \geq 0,\ g(x) \geq y\}$

$= \{(x,y) : 0 \leq y \leq g(x),\ x \in \mathbb{R}\}$



| ΚΑΤΑΝΟΜΗ | Ομοιόμορφη $\mathcal{U}[\alpha,b]$ | Κανονική $N(\mu,\sigma^2)$ | Εκθετική $Exp(\lambda)$ | Cauchy |
|---|---|---|---|---|
| ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ | $-\infty < \alpha < b < \infty$ | (θέση) $\mu \in \mathbb{R}$ (σχήμα) $\sigma > 0$ | $\lambda > 0$ | (δεν ενδιαφέρει η γεν. περίπτωση) |
| ΣΤΗΡΙΓΜΑ | $[\alpha, b]$ | $(-\infty, +\infty)$ | $(0, \infty)$ | $(-\infty, \infty)$ |
| ΣΠΠ (πυκνότητα, f) | $\frac{1}{b-\alpha}$, $x \in [\alpha, b]$, 0 αλλιώς | $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ | $\begin{cases} 0, & x<0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$ | $\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}$ |
| ΣΚΠ (αθροιστική, F) | $\begin{cases} 0, & x \leq \alpha \\ \frac{x-\alpha}{b-\alpha}, & x \in [\alpha, b] \\ 1, & x \geq b \end{cases}$ | $\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ ☆ | $\begin{cases} 0, & x<0 \\ 1-e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$ | $\frac{1}{\pi} \cdot \tan^{-1} x + \frac{1}{2}$ |
| ΠΙΘ. ΤΙΜΗ | οποιαδήποτε $x \in [\alpha, b]$ | $\mu$ | 0 | 0 |
| ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ | $\frac{1}{2}(\alpha+b)$ | $\mu$ | $1/\lambda$ | X δεν υπάρχει |
| ΔΙΑΣΠΟΡΑ | $\frac{1}{12}(b-\alpha)^2$ | $\sigma^2$ | $1/\lambda^2$ | X δεν υπάρχει |
| ΣΧΟΛΙΑ | Όλες οι τιμές στο $[\alpha, b]$ είναι πιθανές | Όριο αθροισμάτων "ομοίων" τυχαίων μεταβλητών | | |

☆ $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

## ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ $U[a,b]$

• **ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ:** $E[X] = \int_a^b x f(x)\,dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\, \frac{x^2}{2}\Big|_a^b$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2-a^2}{2} = \frac{a+b}{2}$$

• **ΔΙΑΣΠΟΡΑ:** $Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$

$$E[X^2] \overset{\text{LOTUS}}{=} \int_a^b x^2 f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{b-a}\,\frac{x^3}{3}\Big|_a^b$$

$$= \frac{1}{b-a}\,\frac{b^3-a^3}{3} = \frac{1}{\cancel{b-a}}\,\frac{\cancel{(b-a)}(a^2+ab+b^2)}{3} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$Var(X) = \frac{1}{3}[a^2+ab+b^2] - \frac{1}{4}[a^2+2ab+b^2] =$$

$$= \frac{1}{12}[4a^2+4ab+4b^2-3a^2-6ab-3b^2]$$

$$= \frac{1}{12}[a^2+b^2-2ab] = \frac{1}{12}(b-a)^2$$

## ΚΑΝΟΝΙΚΗ $N(\mu,\sigma^2)$

• **ΠΙΘΑΝΟΤΕΡΗ ΤΙΜΗ:** $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$. Πιθανά ακρότατα: $f'(x)=0$

$$f'(x) = -\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\frac{(x-\mu)}{\sigma^2}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = 0 \Longleftrightarrow x=\mu$$

Εύκολος έλεγχος δείχνει ότι η $x=\mu$ μεγιστοποιεί την $f \Rightarrow$ πιθ/ τιμή είναι $x=\mu$.

Για <u>ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ</u> και <u>ΔΙΑΣΠΟΡΑ</u>, αρκεί να κάνουμε τον υπολογισμό για την <u>τυπική</u> κανονική κατανομή $Z \sim N(0,1)$, δηλαδή $f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$, Αυτό επειδή $\boxed{Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)}$ ανν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

• <u>ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ της $Z \sim N(0,1)$:</u> $f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$

$$E[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} z f_Z(z)\, dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-z^2/2} dz = 0$$

επειδή η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι περιττή.

<u>Σημείωση:</u> Πρακτικά αποδείξαμε ότι αν η $f$ είναι συμμετρική ως προς το $\mu$ [δηλαδή $f(\mu+x) = f(\mu-x)$] τότε η μέση τιμή της $X$ είναι $E[X] = \mu$ [με την προϋπόθεση ότι το ολοκλήρωμα $\int |x| f(x)\, dx < \infty$]

• <u>ΔΙΑΣΠΟΡΑ της $Z \sim N(0,1)$:</u> $Var(Z) = E[Z^2] - \cancel{E[Z]}^{2} = E[Z^2]$

$$E[Z^2] \overset{\text{Lotus}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2/2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z \cdot \underbrace{z \cdot e^{-z^2/2}}_{\frac{d}{dz}(-e^{-z^2/2})} dz$$

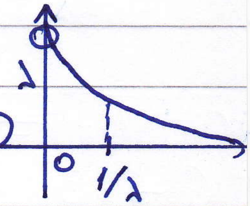
$$E[Z^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cancel{z \left(-e^{-z^2/2}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cancel{(z)'}\, e^{-z^2/2} dz$$

$$E[Z^2] = 1.$$

Δείξαμε ότι η $Z \sim N(0,1)$ έχει $E[Z] = 0$, $Var(Z) = 1$.

Έπεται ότι η $X = \sigma Z + \mu$ $\Rightarrow X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 
$\begin{cases} \text{Θα έχει } E[X] = E[\sigma Z + \mu] = \sigma \cancel{E[Z]} + \mu = \mu \\ Var(X) = Var(\sigma Z + \mu) = \sigma^2 Var(Z) = \sigma^2 \end{cases}$

# Εκθετική Exp(λ)




• **Πιθανή Τιμή:** $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ $x \geq 0$ $f'(x)=-\lambda^2 e^{-\lambda x}<0$

Πιθανά ακρότατα $f'(x)=0 \overset{?}{\Rightarrow} -\lambda^2 e^{-\lambda x}=0 \Rightarrow ?$

Δεν υπάρχει στάσιμο σημείο. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ οπότε συμπεραίνουμε ότι η πιθανή τιμή είναι η $x=0$

• **Μέση Τιμή:** $E[X]=\int_0^\infty x f(x)\,dx = \int_0^\infty x \underbrace{\lambda e^{-\lambda x}dx}_{(-e^{-\lambda x})'}$

$$E[X] = \cancel{-xe^{-\lambda x}\Big|_0^\infty} + \int_0^\infty (x)' e^{-\lambda x}dx = \int_0^\infty e^{-\lambda x}dx = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty$$

$$E[X]=\frac{1}{\lambda}.$$

• **Διασπορά:** $Var(X)=E[X^2]-E[X]^2 = E[X^2]-1/\lambda^2$

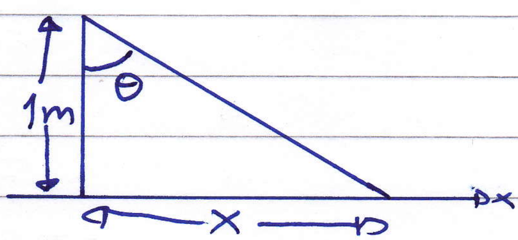
$$E[X^2] \xrightarrow{\text{Lotus}} \int_0^\infty x^2 f(x)\,dx = \int_0^\infty x^2 \underbrace{\lambda e^{-\lambda x}dx}_{(-e^{-\lambda x})'} = -x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty (x^2)'e^{-\lambda x}dx$$

$$E[X^2] = 0 + 2\int_0^\infty xe^{-\lambda x}dx = \frac{2}{\lambda}\int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x}dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\Rightarrow Var(X) = \frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}$$

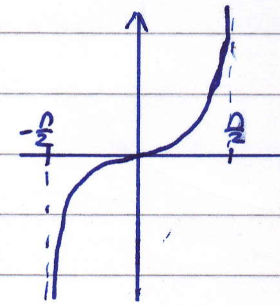
# Cauchy

Από ορθογώνιο τριγωνομετρία έχουμε $x=\tan\Theta$




Η γωνία προσπτώσεως ενός φακού που βρίσκεται σε ύψος 1m από το πάτωμα είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Μας ενδιαφέρει να βρούμε την κατανομή της θέσης X στον άξονα των x όπου προσπίπτει η δέσμη φωτός του φακού.

Έστω $f_X(x)$ η σ.π.π. της $X=\tan\Theta$. Τότε θα έχουμε εξ' ορισμού $\underbrace{\mathbb{P}(x\le X\le x+dx)}_{f_X(x)dx} = \mathbb{P}(x\le \tan\Theta \le x+dx) =$



$$= \mathbb{P}(\tan^{-1}x \le \Theta \le \tan^{-1}(x+dx)) \overset{\circledast}{=} \mathbb{P}\left(\tan^{-1}x\le\Theta\le \tan^{-1}x + \frac{dx}{1+x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{dx}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2} \quad \text{[Cauchy]}$$

$\circledast$ $\tan^{-1}(x+dx) = \tan^{-1}x + (\tan^{-1}x)'dx + O(dx)'$

$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}$ $\left\{ \frac{dx}{dy} = 1/\frac{dy}{dx} \right.$

$x=\tan y \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}\tan y = \frac{d}{dy}\frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\cos^2 y+\sin^2 y}{\cos^2 y} = 1+\tan^2 y$
$= 1+x^2$

- Αθροιστική Κατανομή: $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{\pi}\tan^{-1}t\Big|_{-\infty}^{x}$
$= \frac{1}{\pi}\tan^{-1}x - \frac{1}{\pi}(-\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{\tan^{-1}x}{\pi}$

- Πιθανή Τιμή: Μηδενισμός $f'(x) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\frac{1}{1+x^2} = -\frac{1}{\pi}\frac{2x}{(1+x^2)^2} = 0 \Rightarrow \boxed{x=0}$

- Μέση Τιμή: $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,dx}{1+x^2} = 0$ ⊗ ⚠

Προσοχή: $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx := \lim_{(a,b)\to(-\infty,\infty)}\int_{a}^{b} g(x)dx$

$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx := \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} g(x)dx$ Κυρίαρχη Τιμή κατά Cauchy (CPV)

- Έχουμε $E[X]=0$ κατά Cauchy αλλά αόριστο ως γενικευμένο ολοκλήρωμα επειδή το ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει απολύτως $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|x|}{1+x^2}dx = \infty$