18° μάθημα

04/05/23

Θέματα προόδου

Γραφέας: Έλλη Τέσσα

② $A \to KK$

$B \to \Gamma\Gamma$

$C \to K\Gamma$

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\mathbb{P}(\overset{\text{επιλέξαμε}}{K\Gamma} \mid \overset{\text{ήρθε}}{K}) =$

$$= \frac{\mathbb{P}(\text{επιλέξαμε } K\Gamma, \text{ ήρθε } K)}{\mathbb{P}(\text{ήρθε } K)} = \frac{\mathbb{P}(K\Gamma \sim K)}{\mathbb{P}(K\Gamma \sim K) + \mathbb{P}(\Gamma\Gamma \sim K) + \mathbb{P}(KK \sim K)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1} = \frac{1}{3}$$

③ Αναπτύσσοντας το δεξί μέλος, έχουμε:

$$\mathbb{P}(C \mid B) \cdot \mathbb{P}(A \mid BC) + \mathbb{P}(C' \mid B) \cdot \mathbb{P}(A \mid BC') = \frac{\mathbb{P}(CB)}{\mathbb{P}(B)} \cdot \frac{\mathbb{P}(ABC)}{\mathbb{P}(BC)} + \frac{\mathbb{P}(C'B)}{\mathbb{P}(B)} \cdot \frac{\mathbb{P}(ABC')}{\mathbb{P}(BC')}$$

$$= \frac{\overbrace{\mathbb{P}(ABC) + \mathbb{P}(ABC')}^{\text{ξένα μεταξύ τους}}}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(AB(\overbrace{C \cup C'}^{\Omega}))}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A \mid B)$$

④ Υπολογίζουμε την σμπ της X, η οποία είναι $p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a+1}, & \text{αν } x = 2^a, 2^{a+1}, \ldots, 2^b \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X] = \sum_x x\,p(x) = \frac{1}{b-a+1}\left[2^a + 2^{a+1} + \ldots + 2^b\right] = \frac{1}{b-a+1} \cdot \frac{2^{b+1} - 2^a}{2-1} = \frac{2^{b+1} - 2^a}{b-a+1}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_x x^2 p(x) = \frac{1}{b-a+1}\left[(2^a)^2 + \ldots + (2^b)^2\right] = \frac{1}{b-a+1} \cdot \frac{4^{b+1} - 4^a}{3}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \quad \frac{1}{(b-a+1)^2}\left[2^{b+1} - 2^a\right]^2$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: ο υπολογισμός εδώ ΔΕΝ ολοκληρώθηκε στην τάξη (ήταν άνευ βαθμολογικής σημασίας)

5) Βήμα 1°: Προσδιορισμός της c

$$1 = \sum_x p(x) = \frac{28}{c} \Rightarrow \boxed{c = 28}$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_x x\,p(x) = \frac{\cancel{-3 \cdot 3^2} - \cancel{2 \cdot 2^2} - \cancel{1 \cdot 1^2} + 0 + \cancel{1 \cdot 1^2} + \cancel{2 \cdot 2^2} + \cancel{3 \cdot 3^2}}{c} = 0$$

Βήμα 2°: Σμπ της $Y = [X - \cancelto{0}{\mathbb{E}[X]}]^2 = X^2$

Η $Y = X^2$ λαμβάνει τις τιμές:

$$\begin{cases} -3 \rightsquigarrow 9 & \text{πιθ } 9/28 \\ -2 \rightsquigarrow 4 & \text{πιθ } 4/28 \\ -1 \rightsquigarrow 1 & \text{πιθ } 1/28 \\ 0 \rightsquigarrow 0 & \text{πιθ } 0/28 \\ 1 \rightsquigarrow 1 & \text{πιθ } 1/28 \\ 2 \rightsquigarrow 4 & \text{πιθ } 4/28 \\ 3 \rightsquigarrow 9 & \text{πιθ } 9/28 \end{cases}$$

Συμπεραίνουμε ότι η Y λαμβάνει τις τιμές

$$\begin{cases} y = 9 & \text{με πιθ } 18/28 \\ y = 4 & \text{με πιθ } 8/28 \\ y = 1 & \text{με πιθ } 2/28 \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(Y = y) = \begin{cases} y/14 & , y = 0, 1, 4, 9 \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Βήμα 3°: $Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[Y] = \frac{1 + 16 + 81}{14} = 7$

⑥ Ξεκινάμε με το β): $\mathbb{E}[X^3] \overset{\alpha)}{=} \lambda \mathbb{E}[(X+1)^2] = \lambda \mathbb{E}[X^2+2X+1] = \lambda(\mathbb{E}[X^2]+2\mathbb{E}[X]+1)$

$\mathbb{E}[X^2] = \lambda \mathbb{E}[X+1] = \lambda(\mathbb{E}[X]+1) = \lambda^2+\lambda$

$\mathbb{E}[X] = \lambda \mathbb{E}[(X+1)^0] = \lambda \mathbb{E}[1] = \lambda$

$\Rightarrow \mathbb{E}[X^3] = \lambda(\lambda^2+\lambda+2\lambda+1) = \lambda(\lambda^2+3\lambda+1)$

Για το α): $\mathbb{E}[X^n] \overset{LOTUS}{=\!=} \sum_{x=0}^{\infty} x^n p(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x^n e^{-\lambda}\lambda^x/x! = \sum_{x=1}^{\infty} x^{n-1} e^{-\lambda}\lambda^x/(x-1)!$

$\underset{x=k+1}{\overset{x-1=k}{=\!=}} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{n-1} e^{-\lambda}\lambda^{k+1}/k! = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{n-1} \underbrace{e^{-\lambda}\lambda^k/k!}_{p(k)} = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{n-1} p(k)$

x	1	∞
k	0	∞

$\overset{LOTUS}{=\!=} \lambda \mathbb{E}[(X+1)^{n-1}]$

① (Όπως θα ήθελα να ήταν)

Ανοίγουμε τα χαρτιά της τράπουλας. Ποια είναι η πιθ/τα η $1^η$ ντάμα να εμφανιστεί στην $13^η$ θέση;

$1^{ος}$ τρόπος:

Ευνοϊκά αποτελ $= \underbrace{\binom{48}{12}}_{\text{χαρτιά χωρίς ντάμες}} \cdot \underbrace{4}_{\text{ντάμες}}$

$\times \frac{1}{13}$

Συνολικά αποτελ $= \binom{52}{13}$

$2^{ος}$ τρόπος: Τραβάμε 13 χαρτιά

Ευνοϊκά: $\boxed{48}\,\boxed{47} \cdots \boxed{\ }\,\boxed{37}\,\boxed{4}$

Συνολικά: $\boxed{52}\,\boxed{51} \cdots \boxed{\ }\,\boxed{41}\,\boxed{40}$

$p = \dfrac{\cancel{48\cdot47\cdot46\cdot45\cdot40}\cdot39\cdot38\cdot37\cdot4}{52\cdot51\cdot50\cdot49\cdot\cancel{48\cdots40}} = \dfrac{39\cdot38\cdot37\cdot4}{52\cdot51\cdot50\cdot49}$