

## Το Θεώρημα του Fatou

**Θεώρημα 1.** Αν  $f \in H^2$ ,<sup>1</sup> υπάρχει σύνολο  $\Delta \subseteq \mathbb{R}$  με μηδενικό μέτρο Lebesgue ώστε για κάθε  $t \notin \Delta$ ,

$$\lim_{r \nearrow 1} f(re^{it}) = \tilde{f}(e^{it}).$$

*Απόδειξη.* Ξερούμε ήδη ότι  $\lim_{r \nearrow 1} \|f_r - \tilde{f}\|_{L^2}$  ως προς τη νόρμα του  $L^2(\mathbb{T})$  (όπου  $f_r(e^{it}) = f(re^{it})$  ( $r \in (0, 1)$ )).

**Συμβολισμός.** Για συντομία θετούμε  $\phi : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C} : \phi(t) = \tilde{f}(e^{it})$ .

Παρατηρούμε ότι, αφού  $\tilde{f} \in L^2(\mathbb{T})$ , έχουμε  $\phi \in L^1([-\pi, \pi])$ .

Έχουμε δειξει ότι

$$\begin{aligned} f(re^{it}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(e^{is}) P_r(t-s) ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(s) P_r(t-s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{t+\pi}^{t-\pi} \phi(t-x) P_r(x) d(-x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t-x) P_r(x) dx. \end{aligned}$$

Άρκει λοιπόν να δειξουμε το ακόλουθο

**Θεώρημα 2 (Fatou).** Αν  $\phi \in L^1([-\pi, \pi])$ , υπάρχει σύνολο  $\Delta \subseteq [-\pi, \pi]$  με μηδενικό μέτρο Lebesgue ώστε για κάθε  $t \notin \Delta$ ,

$$\lim_{r \nearrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t-x) P_r(x) dx = \phi(t).$$

*Απόδειξη.* Αν η  $\phi$  είναι (σχεδόν παντού) ίση με μια σταθερά  $c$ , τότε  $f(re^{it}) = c$  για κάθε  $re^{it} \in \mathbb{D}$  οπότε το όριο υπάρχει και ισούται με  $c$ . Μπορούμε λοιπόν χωρίς βλάβη, αφαιρώντας εν αναγκή τη σταθερά  $\int_{-\pi}^{\pi} \phi(s) ds$  από την  $\phi$ , να υποθεσουμε ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi(s) ds = 0. \quad (m)$$

Θεωρούμε τώρα το αοριστο ολοκλήρωμα της  $\phi$

$$\psi(t) := \int_{-\pi}^t \phi(s) ds$$

Η  $\psi$  είναι βεβαίως καλά ορισμένη και συνεχής (!) στο  $[-\pi, \pi]$ .

Από το Θεώρημα Διαφορισής του Lebesgue<sup>2</sup> η παραγωγός της  $\psi$  υπάρχει και ισούται με  $\phi(t)$

---

<sup>1</sup>fatou, 1 Μαρτίου 2026

<sup>2</sup>Κουμουλλης-Νεγρεποντης 14.13, Γιαννοπουλος [2022] 2.4.7

σχεδον για καθε  $t \in (-\pi, \pi)$ . Επισης, εχουμε  $\psi(-\pi) = 0$  απο τον ορισμο και  $\psi(\pi) = 0$  λογω της (m).

Επεκτεινουμε τις  $\psi$  και  $\phi$  περιοδικα στο  $\mathbb{R}$  και ονομαζουμε  $\Delta \subseteq \mathbb{R}$  το (m-μηδενικο) συνολο ωστε

$$t \in \mathbb{R} \setminus \Delta \Rightarrow \exists \psi'(t) = \phi(t).$$

Για τεχνικους λογους αντικαθιστουμε το  $\Delta$  με το  $\Delta \cup (\Delta - \pi)$  ωστε να εξασφαλισουμε οτι  $s \in \Delta \Rightarrow s - \pi \in \Delta$ .

Εχουμε τωρα, σταθεροποιωντας ενα  $t_0 \notin \Delta$ , αφου  $\psi'(s) = \phi(s)$  σχεδον για καθε  $s$ ,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(s) P_r(t_0 - s) ds &= \int_{-\pi}^{\pi} \psi'(s) P_r(t_0 - s) ds \\ &\stackrel{(bp)}{=} [P_r(t_0 - s) \psi(s)]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \psi(s) dP_r(t_0 - s) \\ &= 0 + \int_{-\pi}^{\pi} \psi(s) P_r'(t_0 - s) ds \end{aligned} \quad (1)$$

οπου στη σχεση (bp) εφαρμοσαμε «ολοκληρωση κατα μερη» (θα αιτιολογηθει χωριστα στο τελος) και χρησιμοποιησαμε οτι  $\psi(-\pi) = \psi(\pi) = 0$ .

Υπενθυμιζουμε τωρα οτι  $P_r(x) = \frac{1-r^2}{1-2r \cos x + r^2}$  οποτε, για καθε  $x \in (-\pi, \pi)$ ,

$$P_r'(x) = \frac{2r(r^2 - 1) \sin x}{(1 - 2r \cos x + r^2)^2} = -P_r'(-x).$$

Απο την (1) εχουμε λοιπον (με την αλλαγη μεταβλητης  $s \rightarrow t - s$ )

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(s) P_r(t_0 - s) ds &= \int_{-\pi}^{\pi} \psi(t_0 - s) P_r'(s) ds \\ &= \int_{-\pi}^0 \psi(t_0 - s) P_r'(s) ds + \int_0^{\pi} \psi(t_0 - s) P_r'(s) ds \\ &= \int_{\pi}^0 \psi(t_0 + x) P_r'(-x) d(-x) + \int_0^{\pi} \psi(t_0 - s) P_r'(s) ds \\ &= - \int_{\pi}^0 \psi(t_0 + x) (-P_r'(x)) dx + \int_0^{\pi} \psi(t_0 - s) P_r'(s) ds \\ &= - \int_0^{\pi} \psi(t_0 + x) P_r'(x) dx + \int_0^{\pi} \psi(t_0 - s) P_r'(s) ds \\ &= \int_0^{\pi} (\psi(t_0 - s) - \psi(t_0 + s)) P_r'(s) ds \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\psi(t_0 + s) - \psi(t_0 - s)}{2 \sin s} \frac{4r(1 - r^2) \sin^2 s}{(1 - 2r \cos s + r^2)^2} ds. \end{aligned} \quad (2)$$

**Ισχυρισμος** Εστω  $t_0 \notin \Delta$ . Η συναρτηση

$$h_{t_0}(s) := \frac{\psi(t_0 + s) - \psi(t_0 - s)}{2 \sin s}$$

επεκτεινεται σε συνεχη συναρτηση στο  $[0, \pi]$ .

**Αποδειξη Ισχυρισμου.** Βεβαιως η  $h_{t_0}$  οριζεται και ειναι συνεχης στο  $(0, \pi)$ . Αρκει λοιπον να δειχθει οτι υπαρχουν (στο  $\mathbb{C}$ ) τα ορια στα ακρα:

Πραγματι, στο 0 υπαρχει το οριο

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\psi(t_0 + s) - \psi(t_0 - s)}{2 \sin s} &= \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{\psi(t_0 + s) - \psi(t_0)}{2s} + \frac{\psi(t_0) - \psi(t_0 - s)}{2s} \right) \frac{s}{\sin s} \\ &= \frac{\psi'(t_0) + \psi'(t_0)}{2} \cdot 1 = \phi(t_0). \end{aligned}$$

αφου  $t_0 \notin \Delta$  οποτε η  $\psi'(t_0)$  υπαρχει και ισουται με  $\phi(t_0)$ . Επισης, στο  $\pi$  υπαρχει το οριο

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \pi} \frac{\psi(t_0 + s) - \psi(t_0 - s)}{2 \sin s} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\psi(t_0 + \pi + x) - \psi(t_0 - \pi - x)}{2 \sin(\pi + x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\psi(t_0 + \pi + x) - \psi(t_0 + \pi - x)}{-2 \sin(x)} = -\phi(t_0 + \pi) \end{aligned}$$

εφοσον  $\psi(t_0 - \pi - x) = \psi(t_0 + \pi - x)$  (περιοδικοτητα) και  $t_0 + \pi \notin \Delta$ .

Ο Ισχυρισμος αποδειχθηκε.

Κατα συνεπεια, η  $h_{t_0}$  ανηκει στον  $L^1([0, \pi])$ .

**Τελικα:** Εστω  $\epsilon > 0$ . Αφου το οριο  $\lim_{s \rightarrow 0} h_{t_0}(s)$  υπαρχει και ισουται με  $\phi(t_0)$ , υπαρχει  $\delta \in (0, \pi)$  ωστε

$$0 < s < \delta \Rightarrow |h_{t_0}(s) - \phi(t_0)| < \epsilon. \quad (3)$$

Επισης, δεν ειναι δυσκολο να δειχθει <sup>2</sup> οτι ο πυρηνας

$$K_r(s) := \frac{4(1 - r^2) \sin^2 s}{(1 - 2r \cos s + r^2)^2} = -\frac{1}{r} P_r'(s) \sin s$$

εχει την ιδιοτητα

$$\lim_{r \nearrow 1} K_r(s) = 0 \quad \text{ομοιομορφα ως προς } s \in [\delta, \pi]$$

οποτε υπαρχει  $r_0 < 1$

$$r \in (r_0, 1) \Rightarrow \sup_{s \in (\delta, \pi]} K_r(s) < \epsilon. \quad (4)$$

Επισης υπολογιζεται οτι <sup>2</sup>

$$\int_0^\pi K_r(s) ds = \pi \quad \text{για καθε } r < 1.$$

Συνεπως, απο την (2), διαιρωντας με  $r$  εχουμε, οταν  $r \in (r_0, 1)$ ,

---

<sup>2</sup> Ασκησεις!!

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(s) P_r(t_0 - s) ds - 2\pi\phi(t_0) &= \int_0^{\pi} \frac{\psi(t_0 + s) - \psi(t_0 - s)}{2 \sin s} \frac{4(1 - r^2) \sin^2 s}{(1 - 2r \cos s + r^2)^2} ds - 2\phi(t_0) \int_0^{\pi} K_r(s) ds \\
&= \int_0^{\pi} (h_{t_0}(s) - 2\phi(t_0)) K_r(s) ds \\
\left| \frac{1}{r} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(s) P_r(t_0 - s) ds - 2\pi\phi(t_0) \right| &\leq \int_0^{\delta} |h_{t_0}(s) - 2\phi(t_0)| K_r(s) ds + \int_{\delta}^{\pi} |h_{t_0}(s) - 2\phi(t_0)| K_r(s) ds \\
&\leq \epsilon \int_0^{\delta} K_r(s) ds + \int_{\delta}^{\pi} |h_{t_0}(s) - 2\phi(t_0)| K_r(s) ds \quad \text{απο την (3)} \\
&< \epsilon \int_0^{\pi} K_r(s) ds + (\|h_{t_0} - 2\phi(t_0)\mathbf{1}\|_1) \epsilon \quad \text{απο Hölder και την (4)}
\end{aligned}$$

οπότε επεται οτι

$$\left| \frac{1}{r} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(s) P_r(t_0 - s) ds - 2\pi\phi(t_0) \right| < \epsilon(1 + \|h_{t_0} - 2\phi(t_0)\mathbf{1}\|_1)$$

για καθε  $r \in (r_0, 1)$ , αρα  $\lim_{r \nearrow 1} \frac{1}{r} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(s) P_r(t_0 - s) ds = 2\pi\phi(t_0)$ , επομενωσ

$$\lim_{r \nearrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(s) P_r(t_0 - s) ds = \phi(t_0)$$

οπωσ δελαμε. □

**Αιτιολογηση της σχεσης (1) (ολοκληρωση κατα μερη)** Εστω  $t_0 \notin \Delta$ . Η συναρτηση  $(t, s) \mapsto P'_r(t)\phi(s)$  ειναι απολυτωσ ολοκληρωσιμη σε καθε συμπαγεσ<sup>3</sup> υποσυνολο του  $\mathbb{R}^2$ . Το διαδοχικο ολοκληρωμα

$$\int_{t_0 - \pi}^{t_0 + \pi} \left( \int_{-\pi}^{t_0 - t} P'_r(t)\phi(s) ds \right) dt$$

ισουται με το διπλο ολοκληρωμα

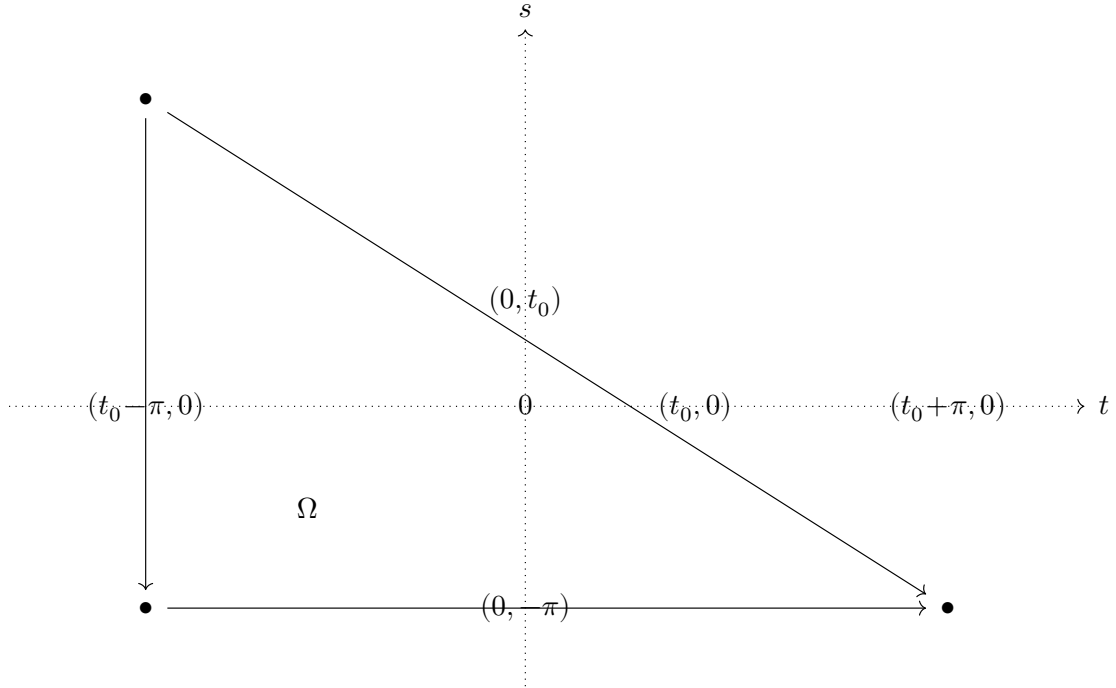
$$\iint_{\Omega} P'_r(t)\phi(s) dm_2(t, s) \quad (m_2: \text{μετρο Lebesgue στον } \mathbb{R}^2)$$

οπου

$$\begin{aligned}
\Omega &:= \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : t_0 - \pi \leq t \leq t_0 + \pi, -\pi \leq s \leq t_0 - t\} \\
&= \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : -\pi \leq s \leq \pi, t_0 - \pi \leq t \leq t_0 - s\}.
\end{aligned}$$

---

<sup>3</sup>γιατι σε καθε φραγγεμο ορθογωνιο  $K = [a, b] \times [c, d]$  εχουμε  $\iint_K |P'_r(t)\phi(s)| dm_2(s, t) = \int_a^b P'_r(t) dt \int_c^d |\phi(s)| ds < \infty$



Επομενως, απο το Θεωρημα Fubini, αλλαζοντας την ταξη ολοκληρωσης εχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{t_0-\pi}^{t_0+\pi} \left( \int_{-\pi}^{t_0-t} P_r'(t)\phi(s)ds \right) dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_{t_0-\pi}^{t_0-s} P_r'(t)\phi(s)dt \right) ds \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \phi(s) \left( \int_{t_0-\pi}^{t_0-s} P_r'(t)dt \right) ds \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \phi(s) (P_r(t_0-s) - P_r(t_0-\pi)) ds \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \phi(s)P_r(t_0-s)ds - P_r(t_0-\pi) \int_{-\pi}^{\pi} \phi(s)ds \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \phi(s)P_r(t_0-s)ds
\end{aligned}$$

εφοσον  $\int_{-\pi}^{\pi} \phi(s)ds = 0$ . Εχουμε λοιπον

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \phi(s)P_r(t_0-s)ds &= \int_{t_0-\pi}^{t_0+\pi} \left( \int_{-\pi}^{t_0-t} P_r'(t)\phi(s)ds \right) dt \\
&= \int_{t_0-\pi}^{t_0+\pi} P_r'(t) \left( \int_{-\pi}^{t_0-t} \phi(s)ds \right) dt \\
&= \int_{t_0-\pi}^{t_0+\pi} P_r'(t)\psi(t_0-t)dt = \int_{\pi}^{-\pi} P_r'(t_0-s)\psi(s)d(-s) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} P_r'(t_0-s)\psi(s)ds
\end{aligned}$$

οπως δελαμε. □