Rigidity of the topology of $(H^2, \|\cdot\|)$

Προταση *Αν* [1] $\|\cdot\|_0$ *ειναι μια νορμα στον* H^2 *ως προς την οποια (α) ειναι πληρης χωρος και (β) οι εκτιμησεις* $f \mapsto f(z) : (H^2, \|\cdot\|_0) \to (\mathbb{C}, |\cdot|)$ *ειναι συνεχεις, τοτε οι δυο νορμες ειναι ισοδυναμες (δηλ. οριζουν την ιδια τοπολογια).*

Αποδειξη Να δειξουμε οτι η ταυτοτικη απεικονιση

$$I : (H^2, \|\cdot\|) \to (H^2, \|\cdot\|_0) : f \mapsto f$$

καθως και η αντιστροφη της, ειναι συνεχεις. Εφορον και οι δυο χωροι $(H^2, \|\cdot\|)$ και $(H^2, \|\cdot\|_0)$ ειναι χωροι Banach, αρκει να δειξουμε οτι η I καθως και η αντιστροφη της εχουν κλειστο γραφημα.

Εστω λοιπον (f_n) μια ακολουθια στον H^2 η οποια (α) συγκλινει ως προς την $\|\cdot\|$ σε μια f **και** (β) η εικονα της $(I(f_n))$ συγκλινει ως προς την $\|\cdot\|_0$ σε μια g. Πρεπει να δειξουμε οτι $I(f) = g$.

Δηλαδη, απο τις υποθεσεις $\|f_n - f\| \to 0$ και $\|f_n - g\|_0 = \|I(f_n) - g\|_0 \to 0$, πρεπει να δειξουμε οτι $f = g$.

Ομως απο την συνεχεια των εκτιμησεων ως προς τη νορμα $\|\cdot\|$, εχουμε οτι για καθε $z \in \mathbb{D}$,

$$\|f_n - f\| \to 0 \ \Rightarrow \ f_n(z) \to f(z).$$

Αλλα την ιδια ιδιοτητα εχουν οι εκτιμησεις ως προς τη νορμα $\|\cdot\|_0$, επομενως για καθε $z \in \mathbb{D}$,

$$\|f_n - f\|_0 \to 0 \ \Rightarrow \ f_n(z) \to g(z).$$

Συνεπως απο τη μοναδικοτητα του οριου (!) εχουμε για καθε $z \in \mathbb{D}$,

$$g(z) = \lim_n f_n(z) = f(z)$$

δηλαδη $g = f$, οπως θελαμε.

Δειξαμε λοιπον οτι η $I : (H^2, \|\cdot\|) \to (H^2, \|\cdot\|_0)$ εχει κλειστο γραφημα, αρα ειναι συνεχης.

Με τον ιδιο ακριβως τροπο προκυπτει οτι η αντιστροφη απεικονιση $I^{-1} : (H^2, \|\cdot\|_0) \to (H^2, \|\cdot\|)$ ειναι και αυτη συνεχης.

Δηλαδη οι δυο νορμες ειναι ισοδυναμες (οριζουν την ιδια τοπολογια). □

Παρατηρηση Δεν ισχυριζομαστε οτι η νορμα $\|\cdot\|_0$ προερχεται και αυτη απο εσωτερικο γινομενο. Το μονο που απαιτουμε ειναι να ειναι ο $(H^2, \|\cdot\|_0)$ χωρος Banach, οχι Hilbert.

Σχολιο Παρατηρειστε οτι το κλειδι της αποδειξης ειναι το γεγονος οτι τα κατα σημειο ορια στον H^2 ειναι μοναδικα. Δηλαδη οτι η τοπολογια της κατα σημειο συγκλισης στον H^2 ειναι (ασθενεστερη απο την τοπολογια της νορμας $\|\cdot\|$ και την τοπολογια της νορμας $\|\cdot\|$ και) Hausdorff.

Δειτε πώς σχολιαζει αυτες τις ιδιοτητες ο Terence Tao στο

https://terrytao.wordpress.com/2016/04/22/a-quick-application-of-the-closed-graph-theorem/

[1] rigidH2, 20 Ιανουαρίου 2026