ΤΕΛΕΣΤΕΣ ΣΤΟΝ H^2

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΙΙΙ

Άσκηση 1. (α) Εχει ο S αναλλοιωτους υποχωρους πεπερασμενης διαστασης;
(β) Δειξτε οτι ο S εχει κλειστους αναλλοιωτους υποχωρους που εχουν και απειρη διασταση και απειρη συνδιασταση.

Άσκηση 2. Αν $E_1, \dots E_n, \dots$ ειναι *μη μηδενικοι* κλειστοι S-αναλλοιωτοι υποχωροι του H^2, δειξτε οτι για καθε $n \in \mathbb{N}$ η τομη $E_1 \cap \cdots \cap E_n$ ειναι μη μηδενικη.
Συνεπως η τομη δυο μη τετριμενων κλειστων S-αναλλοιωτων υποχωρων δεν ειναι ποτε τετριμενη.
Δωστε ενα παραδειγμα στο οποιο η τομη $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} E_i = \{0\}$ καθως και ενα παραδειγμα στο οποιο η τομη $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} E_i \neq \{0\}$.

Άσκηση 3. Εστω $w \in \mathbb{D}$ και $\phi_w(e^{it}) = 1 - we^{-it}$.
Δειξτε οτι ο τελεστης $T_{\phi_w} := PM_{\phi_w}|_{\widetilde{H}^2}$ ειναι αντιστρεψιμος.

Άσκηση 4. Εστω $\phi \in L^\infty$.
(α) Δειξτε οτι ο τελεστης $T_\phi := PM_\phi|_{\widetilde{H}^2}$ ειναι ισομετρια αν-ν η ϕ ειναι εσωτερικη συναρτηση.
(β) Δειξτε οτι ο T_ϕ ειναι unitary (= ισομετρια και επι) αν-ν η ϕ ειναι (σ.π.) σταθερη.
(γ) Αν $\phi \in \widetilde{H}^\infty$, δειξτε οτι η $\{1, \phi, \phi^2, \dots\}$ ειναι ορθοκανονικη βαση του $\widetilde{H}^2$ αν-ν $\phi(z) = \lambda z$ οπου $\lambda \in \mathbb{T}$ σταθερα.

Άσκηση 5. Στον χώρο $L^2([0,1])$ θεωρούμε τον τελεστή M με $(Mf)(t) = tf(t)$ ($f \in C([0,1])$). Δειξτε οτι ο M δεν έχει ιδιοτιμές (θυμίζουμε ότι είναι αυτοσυζυγής).

Άσκηση 6. Εστω $\{e_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ μια ορθοκανονικη βαση ενος χωρου Hilbert H.
Αν ενας φραγμενος τελεστης $A \in \mathcal{B}(H)$ έχει ανω τριγωνικο πινακα ως προς αυτην την ορθοκανονικη βαση (δηλ. αν $\langle Ae_n, e_m\rangle = 0$ οταν $m > n$), δειξτε οτι οι αριθμοι $\langle Ae_n, e_n\rangle$ ειναι ιδιοτιμες του τελεστη A.

Άσκηση 7. Αν ενας φραγμενος τελεστης $X : \ell^2(\mathbb{Z}_+) \to \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ ικανοποιει την ιδιοτητα, καθε S-αναλλοιωτος κλειστος υποχωρος του $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ να ειναι X-αναλλοιωτος, τοτε $SX = XS$.

[Υποδειξη: Εξεταστε τους συζυγεις τελεστες.]

Σημ. Θα δειξουμε αργοτερα οτι ισχυει και το αντιστροφο.