ΤΕΛΕΣΤΕΣ ΣΤΟΝ H^2

ΑΣΚΗΣΕΙΣ IV

Άσκηση 1. Αν P ειναι η προβολη του $L^2(\mathbb{T})$ στον $\widetilde{H}^2$ δειξτε οτι για καθε $f \in L^2(\mathbb{T})$ εχουμε

$$((\iota \circ P)f)(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})}{1 - ze^{-it}} dm(t) \quad (z \in \mathbb{D}) \, .$$

οπου ι *ο ισομορφισμος* $\iota : \widetilde{H}^2 \to H^2 : \tilde{g} \mapsto g : f_n \mapsto \zeta_n$.

Άσκηση 2. Εστω $f \in L^2(\mathbb{T})$. Δειξτε οτι υπαρχει $g \in \widetilde{H}^2$, μαλιστα εξωτερικη, ωστε $|f| = |g|$ σ.π. αν-ν ο υποχωρος $\overline{\text{span}}\{ff_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ ειναι M_1-αναλλοιωτος αλλα οχι αναγων. (Υποδειξη: Θεωρημα Beurling).

Άσκηση 3. Εστω $f \in L^2(\mathbb{T})$ τετοια ωστε $\exists \delta > 0$ ωστε $|f(e^{it})| \geqslant \delta$ σ.π.. Δειξτε οτι υπαρχει $g \in \widetilde{H}^2$, μαλιστα εξωτερικη, ωστε $|f| = |g|$ σ.π. (Υποδειξη: δειξτε οτι ο $M_1(\overline{\text{span}}\{ff_n : n \in \mathbb{Z}_+\})$ ειναι γνησιος υποχωρος του $\overline{\text{span}}\{ff_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ για να εφαρμοσετε την προηγουμενη ασκηση).

Άσκηση 4. Εστω $f \in L^\infty(\mathbb{T})$. Αν $\sigma(T_f) = \{0\}$ δειξτε οτι $f = 0$ (σ.π.).

Άσκηση 5. Εστω $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$.
(α) Δειξτε οτι ο τελεστης $T_1 T_\phi - T_{f_1 \phi}$ εχει ταξη το πολυ 1. (Συγκριση: ο T_ϕ δεν εχει ποτε πεπερασμενη ταξη - εκτος βεβαιως αν ειναι 0.)
(β) Δειξτε οτι για καθε $f \in C(\mathbb{T})$ ο τελεστης $T_\phi T_f - T_f T_\phi$ ειναι συμπαγης ($\| \cdot \|$-οριο τελεστων πεπερασμενης ταξης).

Άσκηση 6. Εστω $\phi, \psi \in \widetilde{H}^\infty$ και $f, g \in C(\mathbb{T})$. Δειξτε οτι ο τελεστης $T_{\phi+f} T_{\psi+g} - T_{\psi+g} T_{\phi+f}$ ειναι συμπαγης.