

Άσκηση 1. Δειξτε ότι αν μια $f \in L^2(\mathbb{T})$ παίρνει πραγματικές τιμές σχεδόν παντού στο \mathbb{T} , τότε υπάρχει $g \in L^2(\mathbb{T})$ που επίσης παίρνει πραγματικές τιμές σχεδόν παντού στο \mathbb{T} ώστε η $h := f + ig$ να ανήκει στον \tilde{H}^2 .

Άσκηση 2. (α) Έχει ο S αναλλοιωτους υποχωρους πεπερασμενης διαστασης;
(β) Δειξτε ότι ο S έχει κλειστους αναλλοιωτους υποχωρους απειρης διαστασης, και κλειστους αναλλοιωτους υποχωρους απειρης συνδιαστασης.

Άσκηση 3. Δειξτε ότι αν ένας κλειστος υποχωρος $E \subseteq L^2(\mathbb{T})$ είναι M_1 -αναλλοιωτος, τότε ή ο E αναγει τον M_1 ή αλλιως $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_1^n(E) = \{0\}$.

Άσκηση 4. Εστω $\phi \in H^\infty$.

- (α) Δειξτε ότι ο τελεστης M_ϕ είναι ισομετρια στον H^2 αν-ν η ϕ είναι εσωτερικη συναρτηση.
(β) Δειξτε ότι ο χωρος $M_\phi(H^2)$ είναι πυκνος στον H^2 αν-ν η ϕ είναι εξωτερικη (!) συναρτηση.
(γ) Δειξτε ότι ο M_ϕ είναι unitary (= ισομετρια και επι) στον H^2 αν-ν η ϕ είναι σταθερη.
(δ) Δειξτε ότι η $\{1, \phi, \phi^2, \dots\}$ είναι ορθοκανονικη βαση του H^2 αν-ν $\phi(z) = \lambda z$ οπου $\lambda \in \mathbb{T}$ σταθερα.

Άσκηση 5. Στο μαθημα χρησιμοποιηθηκε ότι, αν ένα αριθμησιμο συνολο $\{c_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνο στον κυκλο \mathbb{T} και θεωρησουμε τα σημεια $z_n = c_n(1 - \frac{1}{n^2})$, τότε καθε σημειο του κυκλου \mathbb{T} είναι σημειο συσσωρευσης του $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$. Αποδειξη;

Άσκηση 6. Αν $f, g \in L^2(\mathbb{T})$, δειξτε ότι

$$\widehat{fg}(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) \hat{g}(n-k) \quad \text{για καθε } n \in \mathbb{Z}$$

οπου η σειρα συγκλινει απολυτα. [Υποδειξη: $\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}$.]

Άσκηση 7. Αν ένας φραγμενος τελεστης $X : \ell^2(\mathbb{Z}_+) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ ικανοποιει την ιδιοτητα, καθε S -αναλλοιωτος κλειστος υποχωρος του $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ να είναι X -αναλλοιωτος, τότε $SX = XS$.

[Υποδειξη: Εξεταστε τους συζυγεις τελεστες.]

Σημ. Θα δειξουμε αργοτερα ότι ισχυει και το αντιστροφο.

Άσκηση 8. Να βρεθει η παραγοντοποιηση σε γινομενο εξωτερικης και εσωτερικης συναρτησης για την $f(z) = z - \lambda$ στις περιπτωσης (α) $|\lambda| > 1$, (β) $|\lambda| < 1$ και (γ) $|\lambda| = 1$.

Άσκηση 9. (α) Δειξτε ότι αν $f \in H^\infty$ και $\frac{1}{f} \in H^\infty$ τότε η f είναι εξωτερικη συναρτηση.

(β) Δειξτε ότι αν $f \in H^2$ και $\frac{1}{f} \in H^2$ τότε η f είναι εξωτερικη συναρτηση.