Ο χωρος Hilbert του Hardy
και οι τελεστες του

Απο τις διαφανειες των παραδοσεων, Χειμερινό Εξάμηνο 2024-25

1 Ο Χωρος H^2 του Hardy

Αν $a_n \in \mathbb{C}$ και $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ τοτε για καθε $r \in (0,1)$ εχουμε $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty$ συνεπως η δυναμοσειρα $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ συγκλινει απολυτα για καθε $z \in \mathbb{D}$ και ομοιομορφα σε καθε δισκο ακτινας $r < 1$, αρα οριζει συναρτηση $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ που μαλιστα εχει μιγαδικη παραγωγο (και καθε ταξης), ειναι δηλαδη ολομορφη στον ανοικτο δισκο $\mathbb{D}$.

Ορισμός 1.

$$H^2 := \left\{ f : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{με} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}$$

Η $(a_n) \mapsto f : \ell^2(\mathbb{Z}_+) \to H^2$ ειναι γραμμικος ισομορφισμος. [1] Αρα, με το εσωτερικο γινομενο $\langle f, g \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{b}_n$, οπου $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ (και νορμα $\|f\| := \langle f, f \rangle^{1/2}$), ο H^2 ειναι χωρος Hilbert.

Ο H^2 ειναι χωρος (ολομορφων) συναρτησεων $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$.
Μεχρι εκει ομως:

Παράδειγμα 2. Η $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ ανηκει στον H^2, αλλα δεν επεκτεινεται σε μεγαλυτερο δισκο (δεν οριζεται καν οταν $z = 1 \in \overline{\mathbb{D}}$).

Παράδειγμα 3. Η $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ (οριζεται και) ειναι ολομορφη στο $\mathbb{D}$, αλλα δεν ανηκει στον H^2.

Θεώρημα 4. *Για καθε $z_0 \in \mathbb{D}$, η απεικονιση $f \mapsto f(z_0) : (H^2, \|\cdot\|) \to (\mathbb{C}, |\cdot|)$ ειναι συνεχης. Μαλιστα, $f(z_0) = \langle f, k_{z_0} \rangle$ για καθε $f \in H^2$, οπου $k_{z_0}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{z}_0^n z^n$.*

Πρβλ:

Παρατήρηση 5. *Στον χωρο $C([0,1])$ με εσωτ. γινομενο $\langle f, g \rangle := \int f(t)\overline{g(t)}dt$ η απεικονιση $f \mapsto f(1) : (C([0,1]), \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{C}, |\cdot|)$ ΔΕΝ ειναι συνεχης.*

Πρόταση 6. *Αν $\|f_n - f\| \to 0$ στον H^2, τοτε $f_n(z) \to f(z)$ ομοιομορφα στα συμπαγη υποσυνολα του $\mathbb{D}$.*

[1] Εξπλεϊν Χουαϊ!

Ορισμός 7. Η συναρτηση $k(z,w) := k_w(z) = \frac{1}{1-\bar{w}z}$, $(z,w) \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}$ λεγεται πυρηνας του Szegő.

Εχουμε $f(z_0) = \langle f, k_{z_0} \rangle$ για καθε $f \in H^2$.

Reproducing Kernel Hilbert Spaces

Εστω X μη κενο συνολο (συνηθως $X \subseteq \mathbb{C}^d$). Ενας χωρος $\mathcal{H}$ λεγεται Reproducing Kernel Hilbert Space στο X οταν

(α) αποτελειται απο συναρτησεις $X \to \mathbb{C}$ και ειναι γραμμικος χωρος με πραξεις κατα σημειο,

(β) ειναι εφοδιασμενος με ενα εσωτερικο γινομενο ως προς το οποιο ειναι χωρος Hilbert, και

(γ) για καθε $z_0 \in X$ η απεικονιση $f \mapsto f(z_0) : (\mathcal{H}, \|\cdot\|) \to (\mathbb{C}, |\cdot|)$ ειναι συνεχης.

Επεται τοτε (Θεωρημα Riesz) ότι για καθε $z_0 \in X$ υπαρχει $k_{z_0} \in \mathcal{H}$ ωστε $f(z_0) = \langle f, k_{z_0} \rangle$ για καθε $f \in \mathcal{H}$. Η συναρτηση

$$k(z,w) := k_w(z) \qquad (z,w) \in X \times X$$

λεγεται πυρηνας αναπαραγωγης (reproducing kernel) για τον $\mathcal{H}$.

Ο Χωρος $\widetilde{H}^2$ του Hardy στον κυκλο $\mathbb{T}$

Θυμιζουμε τον $L^2(\mathbb{T})$ με εσωτερικο γινομενο $\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \overline{g(e^{it})} dt$ και ορθοκανονικη βαση $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$ οπου $f_n(e^{it}) = e^{int}$. Γραφουμε $\hat{f}(k) = \langle f, f_k \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$.

Δηλαδη (a) $\langle f_n f_m \rangle = \delta_{mn}$ και (b) για καθε $f \in L^2(\mathbb{T})$ εχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{|k|\le n} \hat{f}(k) f_k \right\|_{L^2} = 0 \quad \text{και} \quad \|f\|_{L^2}^2 \overset{(P)}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2 .$$

(P): Parseval

Ο $L^2(\mathbb{T})$ ειναι η $\|\cdot\|_{L^2}$- κλειστη θηκη των *τριγ. πολυωνυμων* $\mathrm{span}\{f_k : k \in \mathbb{Z}\}$.

Ορισμός 8. $$\widetilde{H}^2 := \left\{ \tilde{f} \in L^2(\mathbb{T}) : \langle \tilde{f}, f_n \rangle = 0 \ \forall n < 0 \right\}.$$

Ο $\widetilde{H}^2$ ειναι κλειστος γραμμ. υποχωρος του $L^2(\mathbb{T})$. Ειναι η $\|\cdot\|_{L^2}$- κλειστη θηκη των *αναλυτικων τριγ. πολυωνυμων* $\mathrm{span}\{f_k : k \in \mathbb{Z}_+\}$.

$\widetilde{H}^2$: αποτελειται από (σχ. παντου ορισμενες) συναρτησεις $\mathbb{T} \to \mathbb{C}$ (mod. ισοτητα σχεδον παντου).

H^2: αποτελειται απο συναρτησεις $\mathbb{D} \to \mathbb{C}$.
Ειναι η $\|\cdot\|_{H^2}$- κλειστη θηκη των *πολυωνυμων* $\mathrm{span}\{\zeta_k : k \in \mathbb{Z}_+\}$ οπου $\zeta_k(z) = z^k$, $z \in \mathbb{D}$.

Ισομορφισμοι: [2]

$$f(z)=\sum_{n\geq 0} a_n z^n \quad \longleftrightarrow \ (a_n) \quad \longleftrightarrow \ \tilde{f} \sim \sum_{n\geq 0} a_n f_n$$

$$H^2 \quad \longleftrightarrow \ \ell^2 \quad \longleftrightarrow \ \widetilde{H}^2$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \qquad\qquad a_n = \langle \tilde{f}, f_n \rangle$$

Θεώρημα 9. *Αν $f \in H^2$ με $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ οριζουμε για $r \in (0,1)$*

$$f_r(e^{it}) = f(re^{it}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{int}, \ \ e^{it} \in \mathbb{T}.$$

Τοτε $f_r \in \widetilde{H}^2$ και υπαρχει το

$$\lim_{r\nearrow 1} f_r := \tilde{f} \quad \text{ως προς τη νορμα του } \widetilde{H}^2$$

οπου $\tilde{f} \in \widetilde{H}^2$ με $\langle \tilde{f}, f_n \rangle = a_n \ \forall n \geq 0$.

Πόρισμα 10. *Αν $f \in H^2$ υπαρχει (r_n) με $0 \leq r_n \nearrow 1$ ώστε*

$$\lim_n f(r_n e^{it}) = \tilde{f}(e^{it})$$

σχεδον για καθε $e^{it} \in \mathbb{T}$.

(Θα δειξουμε σε λιγο κατι πολυ ισχυροτερο, το Θεωρημα Fatou.)

Παρατήρηση 11. *Αν μια f οριζεται και ειναι συνεχης στον* κλειστο *δισκο $\overline{\mathbb{D}}$ (πχ αν ειναι ολομορφη σε μια περιοχη του $\overline{\mathbb{D}}$) τοτε $\tilde{f}(e^{it}) = f(e^{it})$ σχεδον για καθε $e^{it} \in \mathbb{T}$.*

Ο Χωρος H^2 του Hardy: εναλλακτικος ορισμος

Θεώρημα 12. *Εστω $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ ολομορφη. Εχουμε*

$$f \in H^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})|^2 dt < \infty\,.$$

Μαλιστα

$$f \in H^2 \ \Rightarrow \ \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})|^2 dt = \|f\|^2\,.$$

Πόρισμα 13. *Εστω $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ ολομορφη. Η συναρτηση*

$$r \mapsto M(r) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})|^2 dt$$

ειναι αυξουσα στο $(0,1)$. Η f ανηκει στον H^2 αν-ν η $r \mapsto M(r)$ ειναι φραγμενη, και τοτε $\|f\|^2 = \lim_{r\nearrow 1} M(r)$.

[2] Εξπλεϊν Χουαϊ!

Θεώρημα 14 (Ολοκληρωτικος τυπος Cauchy)**.** *Αν f ειναι ολομορφη σε ανοικτο συνολο που περιεχει τον κλειστο δισκο $\overline{\mathbb{D}}$, τοτε για καθε $z_0 \in \mathbb{D}$ εχουμε*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{f(w)}{w-z_0}dw.$$

Θεώρημα 15 (Ολοκληρωτικος τυπος Poisson)**.** *Αν $f \in H^2$ με αντιστοιχη $\tilde{f} \in \widetilde{H}^2$ τοτε για καθε $re^{it} \in \mathbb{D}$ εχουμε*

$$f(re^{it}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(e^{is})P_r(s-t)ds$$

οπου P_r ο πυρηνας Poisson

$$P_r(\theta) := \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2}, \quad r \in [0,1),\ \theta \in [-\pi,\pi].$$

Αποδειξη στο poissonn.pdf.

Το Θεωρημα του Fatou για τον H^2

Θεώρημα 16. *Αν $f \in H^2$, υπαρχει συνολο $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ με μηδενικο μετρο Lebesgue ωστε για καθε $t \notin \Delta$,*

$$\lim_{r\nearrow 1} f(re^{it}) = \tilde{f}(e^{it}).$$

Αποδειξη στο fatou.pdf.

Σχολιο Το θεωρημα Fatou δινει μια εκφραση για την απεικονιση $H^2 \to \widetilde{H}^2 : f \mapsto \tilde{f}$ (και αιτιολογει την ονομασια «συνοριακη συναρτηση» για την $\tilde{f}$). Ο ολοκληρωτικος τυπος Poisson δινει μια εκφραση για την αντιστροφη απεικονιση $\widetilde{H}^2 \to H^2 : \tilde{f} \mapsto f$.

2 Στοιχεια Θεωριας Τελεστων

Το Φασμα τελεστη

Ορισμός 17. Το φάσμα ενός φραγμένου τελεστή $A : E \to E$ σ' έναν χώρο Banach E είναι το σύνολο

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{ο } A - \lambda I \text{ δεν έχει (φραγμ.) αντίστροφο }\}.$$

Ισχύει ότι το φάσμα $\sigma(A)$ είναι συμπαγές μη κενό (!) υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και οτι

$$\sigma(A) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le \|A\|\}.$$

Πρόταση 18. *Ένας φραγμένος τελεστής $T : E \to F$ μεταξυ χωρων Banach είναι αντιστρέψιμος αν-ν έχει πυκνή εικόνα και υπάρχει $m > 0$ ώστε $\|Tx\| \ge m\|x\|$ για κάθε $x \in E$ (λέμε «ο T είναι κάτω φραγμένος στη μοναδιαία σφαίρα του E»).*

Ορισμός 19. Έστω $A \in \mathcal{B}(E)$ (E: Banach). Το σημειακό φάσμα:

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(A - \lambda I) \neq \{0\}\}.$$

Το προσεγγιστικά σημειακό φάσμα $\sigma_a(A)$ είναι το σύνολο των λ ώστε ο $A - \lambda I$ να μην είναι κάτω φραγμένος στη μοναδιαία σφαίρα του E:

$$\sigma_a(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \forall \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon \in E : \|(A - \lambda I)x_\varepsilon\| < \varepsilon \|x_\varepsilon\|\}.$$

Το φάσμα συμπίεσης (compression spectrum) είναι το σύνολο

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{(A - \lambda I)(E)} \neq E\}.$$

Πρόταση 20. *Η ένωση $\sigma_a(A) \cup \sigma_c(A)$ ισούται με $\sigma(A)$.*

Υπενθυμιση: Ο συζυγης τελεστης.
Αν $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ (H_i: Hilbert), υπαρχει μοναδικος $A^* \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$ ωστε

$$\langle Ax, y \rangle_2 = \langle x, A^* y \rangle_1 \quad \forall x \in H_1, y \in H_2.$$

Λήμμα 21. *Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Τότε*

$$\ker T = (T^*(\mathcal{H}))^\perp \qquad \text{και} \qquad \overline{T(\mathcal{H})} = (\ker T^*)^\perp.$$

Λήμμα 22. *Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Τότε*
(i) $\sigma(T^*) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma(T)\}$
(ii) Αν $\exists A^{-1}$, τοτε $\sigma(A^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(A)\}$.
(ii) $\sigma_p(T) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma_c(T^*)\}$ *και* $\sigma_c(T) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma_p(T^*)\}$.

- Αν $\dim H < \infty$ τοτε $\sigma(A) = \sigma_p(A)$. Αλλιως, μπορει $\sigma_p(A) = \emptyset$.
- Ο αριθμος λ ΔΕΝ ειναι στο $\sigma_a(A)$ αν-ν υπαρχει $m > 0$ ωστε $\|(A - \lambda I)x\| \geq m \|x\|$ για καθε $x \in H$, αν-ν ο $A - \lambda I$ ειναι 1-1 και εχει κλειστο συνολο τιμων.

Παράδειγμα 23. Αν $S \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}_+))$ είναι ο τελεστής της μετατόπισης $Se_n = e_{n+1}$, τότε

$$\sigma_p(S) = \emptyset, \quad \sigma_a(S) = \mathbb{T}, \quad \sigma_c(S) = \mathbb{D} \text{ και άρα } \sigma(S) = \overline{\mathbb{D}}.$$

Μερικες αποδειξεις στο specS245.pdf.

Υπενθύμιση: χώροι L^p

Αν $p \in [1, \infty)$, με το σύμβολο $\mathcal{L}^p(\mathbb{T})$ εννοούμε το σύνολο των μετρήσιμων *συναρτήσεων* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ που ικανοποιούν

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dm(t) < \infty \quad \text{(μέτρο Lebesgue).}$$

Γράφουμε

$$\|f\|_p := \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \frac{dm(t)}{2\pi} \right)^{1/p}.$$

Παρατηρούμε ότι $\|f\|_p = 0$ αν και μόνον αν $f(t) = 0$ m-σχεδόν για κάθε t.

Με $L^p(\mathbb{T})$ συμβολίζουμε τον χώρο των κλάσεων ισοδυναμίας $[f]$, των $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{T})$, modulo ισότητα σχεδόν παντού.

Ο $L^p(\mathbb{T})$ είναι γραμμικός χώρος και η $\|\cdot\|_p$ είναι νόρμα στον $L^p(\mathbb{T})$ ως προς την οποία ο $L^p(\mathbb{T})$ είναι χώρος Banach (Θεώρημα Riesz-Fisher).

Αν $1 \leq p \leq q < \infty$ και f μετρήσιμη, έχουμε

$$\|f\|_p \leq \|f\|_q \leq \|f\|_\infty, \text{ άρα } C(\mathbb{T}) \subseteq L^q(\mathbb{T}) \subseteq L^p(\mathbb{T}) \subseteq L^1(\mathbb{T}).$$

Αν $g \in L^1(\mathbb{T})$ γράφω $\hat{g}(k) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(e^{it})e^{-ikt}dm(t)$ $(k \in \mathbb{Z})$. Ο μετασχηματισμός Fourier $L^1(\mathbb{T}) \to c_0(\mathbb{Z}) : g \mapsto (\hat{g}(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ ειναι γραμμική, 1-1 και συνεχής (όχι επί). [3]

Ο περιορισμός του, $\mathcal{F}$, στον $L^2(\mathbb{T})$ ικανοποιεί $\|g\|_{L^2} = \|\hat{g}\|_{\ell^2}$ και απεικονίζει την $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$ στην $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$, άρα απεικονίζει τον $L^2(\mathbb{T})$ ισομετρικά και επί του $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Υπενθύμιση: Ο $L^\infty(X, \mathcal{S}, \mu)$

Αν $(X, \mathcal{S}, \mu)$ είναι χώρος μέτρου, μία $f : X \to \mathbb{C}$ ανήκει στον $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{S}, \mu)$ αν (α) είναι $\mathcal{S}$-μετρήσιμη και

(β) είναι ουσιωδώς φραγμένη (essentially bounded), δηλ. υπάρχει $M < +\infty$ ώστε $|f(x)| \leq M$ σχεδόν παντού, δηλ. $\mu(\{x \in X : |f(x)| > M\}) = 0$.

Ο μικρότερος τέτοιος M (υπάρχει και) λέγεται το ουσιώδες φράγμα (essential supremum) της $|f|$.

Δηλ. ορίζουμε $\|f\|_\infty := \text{esssup}|f| := \min\{M : \mu(\{x \in X : |f(x)| > M\}) = 0\}$.

Αν $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{S}, \mu)$, τότε $\|f\|_\infty = 0$ ανν $f(x) = 0$ μ-σχεδόν για κάθε $x \in X$.

Ο $L^\infty(X, \mathcal{S}, \mu)$ είναι ο χώρος των κλάσεων ισοδυναμίας, modulo ισότητα μ-σχεδόν παντού, συναρτήσεων του $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{S}, \mu)$.

Η $\|\cdot\|_\infty$ είναι νόρμα στον $L^\infty(X, \mathcal{S}, \mu)$, που γίνεται χωρος Banach με τις πράξεις κατά σημείο. Μαλιστα $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$ (άλγεβρα Banach).

Πολλαπλασιαστικοι τελεστες στον L^2

Εστω $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Για καθε $f \in L^2(\mathbb{T})$, η συναρτηση ϕf ειναι μετρησιμη και $\|\phi f\|_2 \leq \|\phi\|_\infty \|f\|_2$. Συνεπως:

Πρόταση 24. *Καθε $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ οριζει φραγμενο τελεστη*

$$M_\phi : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T}) : f \mapsto \phi f.$$

Μαλιστα $\|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty = \text{esssup}|\phi|$.

3 Οι Τελεστες Μετατοπισης (Shift Operators)

- Στον $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{Z}_+) = \{x : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{K} : \sum_{k=0}^{\infty} |x(k)|^2 < \infty\}$:

[3] ℓ^1 is separable, L^∞ is not.

Για $\qquad x=(x(0),x(1),x(2),\dots)\in\ell^2$

ορίζω S και S':

$$S(x(0),x(1),x(2),\dots)=(0,x(0),x(1),\dots)$$
$$S'(x(0),x(1),x(2),\dots)=(x(1),x(2),x(3),\dots)$$

δηλαδή $(Sx)(n)=\begin{cases}0 & \text{αν } n=0\\ x(n-1) & \text{αν } n>0\end{cases}$ και

$(S'x)(n)=x(n+1)$ για κάθε $n\geq 0$.

Προφανώς $S,S':\ell^2(\mathbb{Z}_+)\to\ell^2(\mathbb{Z}_+)$, γραμμικοί και φραγμενοι.

Δειχνουμε οτι $\langle Sx,y\rangle=\langle x,S'y\rangle$ για καθε $x,y\in\ell^2(\mathbb{Z}_+)$, δηλ. οτι ο συζυγής του S είναι ο S'.

• Στον $\ell^2(\mathbb{Z})=\{x:\mathbb{Z}\to\mathbb{K}:\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}|x(k)|^2<\infty\}$:

Για $\qquad x=(\dots,x(-1),x(0),x(1),x(2),\dots)\in\ell^2(\mathbb{Z})$

ορίζω W και W':

$$Wx=(\dots,x(-2),x(-1),x(0),x(1),\dots)$$
$$W'x=(\dots,x(0),x(1),x(2),x(3),\dots)$$

δηλαδή $(Wx)(n)=x(n-1)$ και $(W'x)(n)=x(n+1)$ για κάθε $n\in\mathbb{Z}$.

Προφανώς $W,W':\ell^2(\mathbb{Z})\to\ell^2(\mathbb{Z})$, γραμμικοί, ισομετρίες και επί, διότι $WW'=W'W=I$, δηλ. $W^{-1}=W'$.

Ο συζυγής του W είναι ο W'. Άρα $WW^*=W^*W=I$.

• Τελεστές μετατόπισης (α) Στον $\ell^2(\mathbb{Z})$ (αλλιώς):

$$\begin{aligned} We_n &:= e_{n+1} \quad \text{(μετατόπιση δεξιά)}\\ \text{και } W'e_n &:= e_{n-1} \quad \text{(μετατόπιση αριστερά)} \quad (n\in\mathbb{Z})\end{aligned}$$

Επεκτείνω γραμμικά στον $c_{00}(\mathbb{Z})$, παρατηρώ ότι είναι $\|\cdot\|_2$-ισομετρίες, άρα επεκτείνονται σε ισομετρίες $\ell^2(\mathbb{Z})\to\ell^2(\mathbb{Z})$. Δείχνουμε ότι $\langle W'e_n,e_m\rangle=\langle e_n,We_m\rangle$ για κάθε $n,m\in\mathbb{Z}$, άρα $W'=W^*$ (γιατί;).

• (β) Στον $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$:

$$Se_n := e_{n+1} \quad \text{(μετατόπιση δεξιά)} \ (n\in\mathbb{Z}_+)$$
$$\text{και } S'e_n := \begin{cases} e_{n-1} & \text{όταν } n\geq 1\\ 0 & \text{όταν } n=0\end{cases} \quad \text{(μετατόπιση αριστερά)}$$

Επεκτείνω γραμμικά στον $c_{00}(\mathbb{Z}_+)$, παρατηρώ ότι είναι $\|\cdot\|_2$-συστολές (δηλ. $\|Sx\|_2\leq\|x\|_2$ για κάθε $x\in c_{00}(\mathbb{Z}_+)$), άρα επεκτείνονται σε συστολές $\ell^2(\mathbb{Z}_+)\to\ell^2(\mathbb{Z}_+)$). Δείχνω $S'=S^*$.

(Μάλιστα ο S είναι ισομετρία. Ο S^*;) Συμπέρασμα

$$\begin{aligned} \text{Στον } \ell^2(\mathbb{Z}):\ We_n &= e_{n+1} \quad \text{(μετατόπιση δεξιά)}\\ W^*e_n &= e_{n-1} \quad \text{(μετατόπιση αριστερά)} \quad (n\in\mathbb{Z})\\ \text{Στον } \ell^2(\mathbb{Z}_+):\ Se_n &= e_{n+1} \quad \text{(μετατόπιση δεξιά)} \ (n\in\mathbb{Z}_+)\\ S^*e_n &= \begin{cases} e_{n-1} & \text{όταν } n\geq 1\\ 0 & \text{όταν } n=0\end{cases} \quad \text{(μετατόπιση αριστερά)}\end{aligned}$$

• Ο W ειναι ισομετρια και επι.

Ισχυει $W(\ell^2(\mathbb{Z}_+)) \subseteq \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ αλλα $W^*(\ell^2(\mathbb{Z}_+)) \nsubseteq \ell^2(\mathbb{Z}_+)$

• Ο S ειναι ισομετρια, οχι επι. Ο S^* ειναι επι, οχι 1-1.

Το φάσμα των τελεστών μετατόπισης

$S : \ell^2(\mathbb{Z}_+) \to \ell^2(\mathbb{Z}_+)$:

Αφου $\|S^*\| = 1$, εχω $\sigma(S^*) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$.

Δειχνω οτι

• $\sigma_p(S^*) = \mathbb{D}$: για καθε $\lambda \in \mathbb{D}$, αν $x_\lambda := (1, \lambda, \lambda^2, \dots)$, εχω $\in \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ και $S^* x_\lambda = \lambda x_\lambda$. Επεται οτι

• $\sigma(S^*) = \overline{\mathbb{D}} = \sigma(S)$.

Ομως

• $\sigma_p(S) = \emptyset$.

$W : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$:

Παλι $\sigma(W^*) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$. Ομως $\sigma(W^*) = \sigma(W^{-1}) = \{\frac{1}{\lambda} : \lambda \in \sigma(W)\}$. Συνεπως αν $\lambda \in \sigma(W^*)$ πρεπει $|\lambda| \leq 1$ και $\frac{1}{|\lambda|} \leq 1$ αφου $\sigma(W) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$. Αρα $|\lambda| = 1$. Δηλαδη $\sigma(W^*) \subseteq \mathbb{T}$.

Ασκηση: $\sigma(W) = \sigma(W^*) = \mathbb{T}$.

Ασκηση: $\sigma_p(W) = \emptyset$.

Αναλλοίωτοι υπόχωροι

Ένας γραμμικός υπόχωρος $E \subseteq H$ είναι αναλλοίωτος (invariant) από έναν φραγμένο τελεστή $A \in \mathcal{B}(H)$ αν $A(E) \subseteq E$, δηλ. αν $Ax \in E$ για κάθε $x \in E$. Τότε ο *κλειστός* υπόχωρος $\overline{E}$ είναι και αυτός A-αναλλοίωτος. Όταν και ο E και ο $E^\perp$ είναι A-αναλλοίωτοι, θα λέμε ότι ο υπόχωρος E ανάγει (reduces) τον A.

Λήμμα 25. *Ένας κλειστός υπόχωρος E είναι A-αναλλοίωτος αν και μόνον αν $AP = PAP$ (όπου $P = P_E$, η ορθη προβολη στον E.*

Ο E ανάγει τον A αν και μόνον αν $A(E) \subseteq E$ και $A^*(E) \subseteq E$, ισοδύναμα αν και μόνον αν $AP = PA$.

Ενημερωτικα, το ακολουθο ειναι ανοικτο:

Το πρόβλημα του αναλλοίωτου υπόχωρου:

Είναι αλήθεια ότι κάθε φραγμένος τελεστής A σε έναν (διαχωρίσιμο, απειροδιάστατο, μιγαδικό) χώρο Hilbert H (ισοδύναμα, στον ℓ^2) έχει μη τετριμμένο κλειστό αναλλοίωτο υπόχωρο;

Αναλλοίωτοι υπόχωροι του shift S

Για καθε $n \in \mathbb{N}$, θετουμε

$$\begin{aligned} E_n &:= \{x \in \ell^2(\mathbb{Z}_+) : x = (0, \dots, 0, x(n), \dots)\} = \overline{\text{span}}\{e_k : k \geq n\} \\ &= \{e_k : 0 \leq k < n\}^\perp = \{e_0, S(e_0), \dots, S^{n-1}(e_0)\}^\perp . \end{aligned}$$

Ο E_n ειναι (γνησιος) S-αναλλοιωτος υποχωρος.

Επισης για καθε $\lambda \in \mathbb{D}$ ο υποχωρος

$$E(\lambda) := \{x_\lambda\}^\perp \quad \text{οπου } x_\lambda = (1, \lambda, \lambda^2, \dots)$$

ειναι S-αναλλοιωτος. Ασκηση: Το ιδιο και ο

$$E_n(\lambda) := \{x_\lambda, S(x_\lambda), \dots, S^{n-1}(x_\lambda)\}^\perp .$$

The (unilateral) shift S on ℓ^2 and T_1 on H^2

$$\begin{aligned} &S : \ell^2 \to \ell^2 : \ S(a_0, a_1 \dots) := (0, a_0, a_1 \dots), \qquad (a_0, a_1 \dots) \in \ell^2(\mathbb{Z}_+) \\ &T_1 : H^2 \to H^2 : (T_1 f)(z) := z f(z), \qquad f \in H^2 \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} \ell^2(\mathbb{Z}_+) \arrow[r, "S"] \arrow[d, tail, two heads, "V"] & \ell^2(\mathbb{Z}_+) \arrow[d, tail, two heads, "V"] \\ H^2 \arrow[r, "T_1"'] & H^2 \end{tikzcd}$$

: $T_1 = VSV^{-1}$

$$\text{οπου} \quad V : \ell^2(\mathbb{Z}_+) \to H^2 : e_n \mapsto \zeta_n \ \ (\text{εδω} \ \ \zeta_n(z) = z^n, z \in \mathbb{D}).$$

T_1-Αναλλοιωτοι υποχωροι

Αν $E_m = \overline{\text{span}}\{e_n : n \geq m\}$,

ο $V(E_m)$ ειναι T_1-αναλλοιωτος και

$$V(E_m) = \{f \in H^2 : f^{(k)}(0) = 0, \ 0 \leq k < m\} = \{\zeta_m f : f \in H^2\}.$$

Επισης αν $\lambda \in \mathbb{D}$ και $E(\bar{\lambda}) = \{x_{\bar{\lambda}}\}^\perp$, ο υποχωρος

$$V(E(\bar{\lambda})) = \{k_\lambda\}^\perp = \{f \in H^2 : f(\lambda) = 0\}$$

ειναι T_1-αναλλοιωτος.

Ασκησεις Για καθε $\lambda \in \mathbb{D}$, τα διανυσματα $\{x_\lambda, S(x_\lambda), S^2(x_\lambda), \ldots,\}$ ειναι γραμμικα ανεξαρτητα, και η κλειστη γραμμικη τους θηκη ισουται με $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$.

The (bilateral) shift W on $\ell^2(\mathbb{Z})$ and M_1 on $L^2(\mathbb{T})$

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z}) : f \mapsto (\hat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}}$$
$$f_n \mapsto e_n \ (n \in \mathbb{Z}).$$

$$\begin{tikzcd} \ell^2(\mathbb{Z}) \arrow[r, "W"] & \ell^2(\mathbb{Z}) \\ L^2(\mathbb{T}) \arrow[u, tail, two heads, "\mathcal{F}"] \arrow[r, "M_1"'] & L^2(\mathbb{T}) \arrow[u, tail, two heads, "\mathcal{F}"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \ell^2(\mathbb{Z}_+) \arrow[r, "S"] & \ell^2(\mathbb{Z}_+) \\ \tilde{H}^2 \arrow[u, tail, two heads, "\mathcal{F}|"] \arrow[r, "T_1"'] & \tilde{H}^2 \arrow[u, tail, two heads, "\mathcal{F}|"'] \end{tikzcd}$$

$$(M_1 f)(e^{it}) = e^{it} f(e^{it}), \qquad T_1 = M_1|_{\tilde{H}^2}$$

Αναγοντες (reducing) υποχωροι των shifts

Πρόταση 26. *Οι μονοι κλειστοι υποχωροι του $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ που αναγουν τον S ειναι ο $\{0\}$ και ο $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$.*

Πρόταση 27. *Ενας κλειστος υποχωρος E του $\ell^2(\mathbb{Z})$ αναγει τον W αν-ν υπαρχει μετρησιμο $\Omega \subseteq \mathbb{T}$ ωστε*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(E) &= \{f \in L^2(\mathbb{T}) : f(e^{it}) = 0 \text{ σχεδον για καθε } e^{it} \notin \Omega\} \\ &= \{\chi_\Omega g : g \in L^2(\mathbb{T})\}. \end{aligned}$$

Αλλιως: Ενας κλειστος υποχωρος του $L^2(\mathbb{T})$ αναγει τον M_1 αν-ν ειναι της μορφης

$$E_\Omega := \{\chi_\Omega g : g \in L^2(\mathbb{T})\}$$

οπου $\Omega \subseteq \mathbb{T}$ μετρησιμο.

Η αποδειξη της Προτασης για τον W θα χρειασθει προετοιμασια.

Ο μεταθετης (commutant) του W

Να βρουμε ολους τους τελεστες στον $\ell^2(\mathbb{Z})$ που μετατιθενται με τον W. Ισοδυναμα, να βρουμε ολους τους τελεστες στον $L^2(\mathbb{T})$ που μετατιθενται με τον $M_1 = \mathcal{F}^{-1}W\mathcal{F}$.

Καθε πολλαπλασιαστικος τελεστης M_ϕ με $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ μετατιθεται με τον (πολλαπλασιαστικο τελεστη) M_1. Δεν υπαρχουν αλλοι:

Θεώρημα 28. *Το συνολο των τελεστων στον $L^2(\mathbb{T})$ που μετατιθενται με τον M_1 ειναι το*

$$\{M_\phi : \phi \in L^\infty(\mathbb{T})\}.$$

Οι Αναλλοιωτοι υποχωροι του M_1

Πρόταση 29. *Ενας κλειστος υποχωρος του $L^2(\mathbb{T})$ αναγει τον M_1 αν-ν ειναι της μορφης*

$$E_\Omega := \{\chi_\Omega g : g \in L^2(\mathbb{T})\} = \chi_\Omega L^2(\mathbb{T})$$

οπου $\Omega \subseteq \mathbb{T}$ μετρησιμο.

Θεώρημα 30. *Ενας κλειστος υποχωρος E του $L^2(\mathbb{T})$ ειναι M_1-αναλλοιωτος αλλα δεν αναγει τον M_1 αν-ν ειναι της μορφης*

$$E = \{\phi g : g \in \tilde{H}^2\} = \phi\widetilde{H}^2$$

οπου $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ με $|\phi(e^{it})| = 1$ σχεδον για καθε $e^{it} \in \mathbb{T}$.

Καθοριζεται μοναδικα η ϕ απο τον E;

Οι Αναλλοιωτοι υποχωροι του M_1 και του S

Πρόταση 31 («Μοναδικοτητα»). *Αν $\phi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$ με $|\phi(e^{it})| = 1 = |\psi(e^{it})|$ σχεδον για καθε $e^{it} \in \mathbb{T}$, τοτε*

$$\phi\widetilde{H}^2 = \psi\widetilde{H}^2 \iff \exists c \in \mathbb{T} : \phi = c\psi.$$

Ορισμός 32. Μια $\phi \in H^\infty$ λεγεται εσωτερικη (inner function) αν $|\tilde{\phi}(e^{it})| = 1$ σχεδον για καθε $e^{it} \in \mathbb{T}$.

Πρόταση 33. *Εστω $\phi \in H^2$. Αν $|\tilde{\phi}(e^{it})| = 1$ σχεδον για καθε $e^{it} \in \mathbb{T}$, τοτε η ϕ ειναι εσωτερικη.*

Θεώρημα 34 (A. Beurling). *Καθε μη μηδενικος T_1-αναλλοιωτος κλειστος υποχωρος E του $\widetilde{H}^2$ ειναι της μορφης $E = \tilde{\phi}\widetilde{H}^2$ οπου ϕ εσωτερικη.*

Οι Αναλλοιωτοι υποχωροι του S

Ορισμός 35. Μια $\phi \in H^\infty$ λεγεται εσωτερικη (inner function) αν $|\tilde{\phi}(e^{it})| = 1$ σχεδον για καθε $e^{it} \in \mathbb{T}$.

Θεώρημα 36 (A. Beurling). *Καθε μη μηδενικος T_1-αναλλοιωτος κλειστος υποχωρος E του $\widetilde{H}^2$ ειναι της μορφης $E = \tilde{\phi}\widetilde{H}^2$ οπου ϕ εσωτερικη.*

Αν $\phi H^2 = \psi H^2$ με ψ εσωτερικη, τοτε υπαρχει $c \in \mathbb{T}$ ωστε $\psi = c\phi$.

Συνηθως λεμε *«καθε μη μηδενικος S-αναλλοιωτος κλειστος υποχωρος του H^2 ειναι της μορφης ϕH^2 οπου ϕ εσωτερικη»*. :

Οι Αναλλοιωτοι υποχωροι του S

$$S : \ell^2 \to \ell^2 : \ S(a_0, a_1 \dots) := (0, a_0, a_1 \dots), \qquad (a_0, a_1 \dots) \in \ell^2(\mathbb{Z}_+)$$
$$T_1 : H^2 \to H^2 : (T_1 f)(z) := z f(z), \qquad f \in H^2 .$$

$$V : \ell^2(\mathbb{Z}_+) \to H^2 : e_n \mapsto \zeta_n \ \ (\text{εδω} \ \ \zeta_n(z) = z^n, z \in \mathbb{D}).$$

$$\begin{tikzcd}
\ell^2(\mathbb{Z}_+) \arrow[r, "S"] \arrow[d, tail, two heads, "V"] & \ell^2(\mathbb{Z}_+) \arrow[d, tail, two heads, "V"] \\
H^2 \arrow[r, "T_1"'] & H^2
\end{tikzcd}$$

Αν $\{0\} \neq E \subseteq \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ κλειστος υποχωρος,

$$S(E) \subseteq E \iff T_1(V(E)) \subseteq V(E) \iff V(E) = \phi H^2, \ \phi \text{ εσωτ.}$$

4 Παραγοντοποιηση συναρτησεων

Εσωτερικές και εξωτερικες συναρτησεις

Πρόταση 37. *Καθε T_1-αναλλοιωτος κλειστος υποχωρος E του H^2 ειναι T_1-κυκλικος, δηλ. υπαρχει $\phi \in E$ ωστε*

$$E = \overline{\operatorname{span}}\{T_1^n(\phi) : n \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Ορισμός 38. Μια $\phi \in H^\infty$ λεγεται εσωτερικη (inner function) αν

$$|\tilde{\phi}(e^{it})| = 1 \quad \text{σχεδον για καθε } \ e^{it} \in \mathbb{T}.$$

Μια $F \in H^2$ λεγεται εξωτερικη (outer function) αν

$$\overline{\operatorname{span}}\{T_1^n(F) : n \in \mathbb{Z}_+\} = H^2 .$$

Πρόταση 39. *Μια εξωτερικη συναρτηση δεν εχει καμμια ριζα στον $\mathbb{D}$.*

Υπενθ: Οι ριζες μιας $\neq 0$ ολομορφης συναρτησης στον $\mathbb{D}$ αποτελουν «μικρο» συνολο: δεν εχουν σημεια συσσωρευσης στο $\mathbb{D}$.

Θεώρημα 40 (F. και M. Riesz)**.** *Αν $f \in H^2$ μη μηδενικη, το συνολο $\{e^{i\theta} : \tilde{f}(e^{i\theta}) = 0\}$ εχει μετρο (Lebesgue) μηδεν.*

Θεώρημα 41 (Inner-Outer factorization)**.** *Αν $f \in H^2$ μη μηδενικη, υπαρχει εσωτερικη φ και εξωτερικη F ωστε $f = \varphi F$.*

Αν επισης $f = \varphi' F'$ με φ' εσωτερικη και F' εξωτερικη τοτε $\varphi' = c\varphi$ οπου $c \in \mathbb{T}$ (και αρα $F = cF'$).

• Επομενως οι ριζες μιας μη μηδενικης $f \in H^2$ ειναι ακριβως οι ριζες του εσωτερικου της παραγοντα.

Εσωτερικές συναρτησεις: Γινομενα Blaschke

Υπενθ. Για καθε $z_0 \in \mathbb{D}$, ο υποχωρος

$$E_{z_0} := \{f \in H^2 : f(z_0) = 0\} = \{k_{z_0}\}^\perp$$

του H^2 ειναι T_1-αναλλοιωστος .

Πρόταση 42. *Για καθε $z_0 \in \mathbb{D}$ η συναρτηση*

$$\psi(z) = \frac{z_0 - z}{1 - \overline{z_0} z}$$

ειναι εσωτερικη και $E_{z_0} = \psi H^2$.

Πρόταση 43. *Αν $z_1, \ldots z_n \in \mathbb{D}$ η συναρτηση*

$$\psi(z) = \prod_{i=1}^{n} \frac{z_i - z}{1 - \overline{z_i} z}$$

ειναι εσωτερικη και $\quad \psi H^2 = \{f \in H^2 : f(z_1) = f(z_2) = \cdots = f(z_n) = 0\}.$

Πόρισμα 44. *Εστω ϕ εσωτερικη συναρτηση που εχει ριζες στα $\{0, z_1 \ldots, z_n\} \subseteq \mathbb{D}$ οπου το 0 ειναι ριζα με πολλαπλοτητα $s \geq 0$. Αν*

$$\psi(z) := z^s \prod_{i=1}^{n} \frac{z_i - z}{1 - \overline{z_i} z}$$

τοτε

$$\phi(z) = \psi(z) S(z), \;\; z \in \mathbb{D}$$

οπου η S ειναι εσωτερικη συναρτηση (οπως και η ψ).

Πόρισμα 45. *Αν $\phi \in H^\infty$ ειναι εσωτερικη συναρτηση, μη σταθερη, τοτε $|\phi(z)| < 1$ για καθε $z \in \mathbb{D}$.*

Απόδειξη. Απο τον τυπο του Poisson (15) εχουμε $|\phi(z)| \leq 1$ για καθε $z \in \mathbb{D}$ (γιατι $\|P_r\|_1 = 1$). Αν υπηρχε z στον $\mathbb{D}$ ωστε $|\phi(z)| = 1$ τοτε η ϕ θα ηταν σταθερη απο την αρχη του μεγιστου. □

Ριζες Εσωτερικων συναρτησεων

Πρόταση 46. *Εστω ϕ εσωτερικη συναρτηση με $\phi(0) \neq 0$. Υποθετουμε οτι η ϕ μηδενιζεται στα σημεια $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$. Τοτε*

$$|\phi(0)| \leq \prod_{i=1}^{n} |z_i| \;\; \textit{για καθε} \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Πότε μια απειρη ακολουθια (z_n) σημειων του δισκου μπορει να αποτελειται απο ριζες μιας $f \in H^2$; Αναγκαια συνθηκη (αρχη μεγιστου) ειναι η $\lim_n |z|_n = 1$. Αρκει;

Παράδειγμα 47. Δεν υπαρχει $f \in H^2$ με συνολο ριζων $Z(f) = \{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$.

Ορισμός 48 (Συγκλιση απειρογινομενων)**.**

• Εστω $\{w_k\} \subseteq \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Αν τα μερικα γινόμενα $p_n := \prod_{i=1}^{n} w_i$ συγκλινουν σε ενα $p \neq 0$ λεμε οτι το $\prod_{i=1}^{\infty} w_i$ συγκλινει (στο p).

• Εστω $\{w_k\} \subseteq \mathbb{C}$. Αν καποια w_k μηδενιζονται, και υπαρχει N ωστε $w_n \neq 0$ για καθε $n \geq N$ και το $\prod_{i=N}^{\infty} w_i$ συγκλινει (σε καποιο $p \neq 0$), τοτε λεμε οτι το $\prod_{i=1}^{\infty} w_i$ συγκλινει στο 0.

Πρόταση 49. *Εστω $f \in H^2$ μη μηδενικη συναρτηση. Αν $z_n \in \mathbb{D}\setminus\{0\}$ και η f μηδενιζεται (τουλαχιστον) στα σημεια $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$, τοτε το $\prod_{i=1}^{\infty} |z_i|$ συγκλινει (σε ενα $p \neq 0$).*

Παρατήρηση 50. *Αν $r_k \in (0,1)$ για καθε $k \in \mathbb{N}$, το απειρογινομενο $\prod_{i=1}^{\infty} r_i$ συγκλινει (σε $p > 0$) αν-ν η σειρα $\sum_{i=1}^{\infty}(1-r_i)$ συγκλινει.*

Πόρισμα 51. *Εστω $f \in H^2$ μη μηδενικη συναρτηση. Αν $z_n \in \mathbb{D}$ και η f μηδενιζεται (τουλαχιστον) στα σημεια $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$, τοτε $\sum_{i=1}^{\infty}(1-|z_i|) < \infty$.*

Θα δουμε οτι αντιστροφα, αν $\{z_n\} \subseteq \mathbb{D}$ με $\sum_{i=1}^{\infty}(1-|z_i|) < \infty$ τοτε υπαρχει $f \in H^2$ (μαλιστα, εσωτερικη) που εχει ακριβως αυτες τις ριζες.

Θεώρημα 52. *Εστω (z_k) ακολουθια στο $\mathbb{D}\setminus\{0\}$ με $\sum_{i=1}^{\infty}(1-|z_i|) < \infty$. Τοτε υπαρχει μια εσωτερικη συναρτηση B_0 που εχει συνολο ριζων $Z(B_0) = \{z_k : k \in \mathbb{N}\}$. Για καθε $z \in \mathbb{D}$, εχουμε*

$$B_0(z) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{z}_i}{|z_i|} \frac{z_i - z}{1 - \bar{z}_i z} \ .$$

οπου το απειρογινομενο συγκλινει ομοιομορφα στα συμπαγη του $\mathbb{D}$.

Σχολιο. Η συγκλιση του απειρογινομενου σημαινει οτι, για καθε συμπαγες υποσυνολο K του $\mathbb{D}$, μονον πεπερασμενο πληθος ορων του απειρογινομενου εχει ριζες στο K και οτι το απειρογινομενο που αποτελειται απο τους υπολοιπους ορους συγκλινει ομοιομορφα στο συμ- παγες K σε μια ολομορφη συναρτηση που δεν εχει καμμια ριζα στο K.

Ορισμός 53. Εστω $\{z_k\} \subseteq \mathbb{D}\setminus\{0\}$ με $\sum_{i=1}^{\infty}(1-|z_i|) < \infty$ και $s \in \mathbb{Z}_+$. Το γινόμενο Blaschke με ριζες στα $\{z_k\}$ και ριζα πολλαπλοτητας s στο $z = 0$ ειναι η συναρτηση

$$B(z) := z^s \prod_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{z}_i}{|z_i|} \frac{z_i - z}{1 - \bar{z}_i z} \ .$$

Παρατήρηση 54. • *Το απειρογινομενο συγκλινει για καθε $z \in \mathbb{D}$.*

• *Η B ειναι εσωτερικη συναρτηση.*

• *Οι ριζες της B ειναι ακριβως τα σημεια $\{z_k\}$ (με τις πολλαπλοτητες που εμφανιζονται) καθως και το 0 με πολλαπλοτητα s.*

Αποδειξεις στο blaschke.pdf

Σημειωση: Αν $Z(B)$ το συνολο των ριζων της B και s_w η πολλαπλοτητα της ριζας w

$$B(z) = z^s \prod_{w \in Z(B)\setminus\{0\}} \left(\frac{\bar{w}}{|w|} \frac{w-z}{1-\bar{w}z} \right)^{s_w} .$$

Παράδειγμα 55. Υπάρχει $f \in H^2$ (μαλιστα, εσωτερικη) που δεν επεκτεινεται σε κανενα σημειο της περιφερειας $\mathbb{T}$ σε ολομορφη συναρτηση.

Παρατηρηση [Δ.Ε.] Μαλιστα, δεν επεκτεινεται καν σε συνεχη συναρτηση.

Singular inner functions

Ορισμός 56. Μια εσωτερικη συναρτηση $\varphi \in H^\infty$ λεγεται ιδιαζουσα εσωτερικη συναρτηση (singular inner function) αν δεν ειναι σταθερη και δεν εχει ριζες στον $\mathbb{D}$.

Παράδειγμα 57. $\varphi(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right), \quad z \in \mathbb{D}$.

Παράδειγμα 58. $\varphi(z) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{z+e^{i\theta_k}}{z-e^{i\theta_k}} a_k\right), \quad z \in \mathbb{D}$ οπου $a_k > 0$ και $\theta_k \in [0, 2\pi]$.

Θεώρημα 59. *Μια $S : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ ειναι ιδιαζουσα εσωτερικη συναρτηση αν-ν ειναι της μορφης*

$$S(z) = c \exp\left(-\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \, d\mu(e^{it}) \right), \quad z \in \mathbb{D}$$

οπου $c \in \mathbb{T}$ και μ ειναι κανονικο θετικο μη μηδενικο μετρο Borel στον $\mathbb{T}$ που ειναι καθετο ή ιδιαζον *ως προς το μετρο Lebesgue.*

(Ενα θετικο μετρο Borel στον $\mathbb{T}$ λεγεται *καθετο ή ιδιαζον* ως προς το μετρο Lebesgue m αν ειναι συγκεντρωμενο σε ενα m-μηδενικο συνολο $A \subseteq \mathbb{T}$, αν δηλαδη $\mu(A^c) = 0$ και $m(A) = 0$.)

Θα χρειασθει το ακολουθο Θεωρημα αναπαραστασης:

Θεώρημα 60 (Herglotz)**.** *Εστω $h : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ ολομορφη ωστε $\mathrm{Re}\, h(z) > 0$ για καθε $z \in \mathbb{D}$. Τοτε υπαρχει κανονικο θετικο μετρο Borel μ στον $\mathbb{T}$ ωστε*

$$h(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \, d\mu(e^{it}) + i\,\mathrm{Im}(h(0)), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Λήμμα 61. *Εστω μ κανονικο θετικο μετρο Borel στον $\mathbb{T}$. Οριζουμε*

$$F(z) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \, d\mu(e^{it}) \quad z \in \mathbb{D}.$$

Τοτε η F ειναι ολομορφη στο $\mathbb{D}$.

Αποδειξεις στο singinner24.pdf

Παραγοντοποιηση εσωτερικων συναρησεων

Πρόταση 62. *Καθε εσωτερικη συναρτηση $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ παραγοντοποιειται ως $\phi = BS$, οπου B ειναι το γινόμενο Blaschke*

$$B(z) = z^s \prod_{w \in Z(\phi)\setminus\{0\}} \left(\frac{\bar{w}}{|w|} \frac{w-z}{1-\bar{w}z} \right)^{s_w}, \quad z \in \mathbb{D}$$

που οριζεται απο το συνολο $Z(\phi)$ των ριζων της ϕ (με την πολλαπλοτητα s_w της καθεμιας) και S ειναι ιδιαζουσα εσωτερικη συναρτηση της μορφης

$$S(z) = c \exp\left(-\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \, d\mu(e^{it}) \right), \quad z \in \mathbb{D}$$

οπου $c \in \mathbb{T}$ και μ ειναι κανονικο θετικο μετρο Borel στον $\mathbb{T}$ που ειναι καθετο (ή ιδιαζον) *ως προς το μετρο Lebesgue.*

Συνεπειες για τους αναλλοιωτους υποχωρους του shift

Υπενθυμιση (Θ. Beurling): $\mathrm{Lat}(S) = \{\phi H^2 : \phi \text{ εσωτερικη }\} \cup \{0\}$.

Παράδειγμα 63. Για $a \in [0,1]$ θετουμε $\phi_a(z) := \exp\left((1-a)\frac{z+1}{z-1}\right)$. Εχουμε

$$0 \le a \le b \le 1 \Rightarrow \phi_0 H^2 \subseteq \phi_a H^2 \subseteq \phi_b H^2 \subseteq \phi_1 H^2 = H^2 .$$

Δηλαδη η απεικονιση $[0,1] \to \mathrm{Lat}(S) : a \mapsto \phi_a$ (ειναι 1-1 και) διατηρει τη διαταξη.

Θα δουμε σε λιγο οτι η συνεπαγωγη $\Rightarrow$ ειναι στην πραγματικοτητα ισοδυναμια $\Leftrightarrow$.

Δηλαδη ο συνδεσμος $\mathrm{Lat}(S)$ εχει υποσυνδεσμους ισομορφους ως προς τη διαταξη με το $[0,1]$ (με τη φυσιολογικη του διαταξη).

Πρόταση 64. *Θεωρουμε δυο εσωτερικες συναρτησεις ϕ_1 και ϕ_2. Τοτε εχουμε $\phi_1 H^2 \subseteq \phi_2 H^2$ αν-ν η ϕ_1/ϕ_2 ειναι εσωτερικη συναρτηση.*

Αυτο συμβαινει αν-ν

• *καθε ριζα z της ϕ_2 ειναι ριζα της ϕ_1 με την ιδια ή μεγαλυτερη πολλαπλοτητα ($\mathrm{mult}_1(z) \ge \mathrm{mult}_2(z)$)* και

• *εχουμε $\mu_2(E) \le \mu_1(E)$ για καθε Borel $E \subseteq \mathbb{T}$, οπου μ_i ειναι το ιδιαζον μετρο που αντιστοιχει στην ϕ_i.*

Λήμμα 65. *Αν μ και ν ειναι θετικα πεπερασμενα μετρα Borel στο $[0,2\pi]$ και*

$$\exp\left(-\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \, d\mu(t) \right) = \exp\left(-\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \, d\nu(t) \right)$$

για καθε $z \in \mathbb{D}$, τοτε $\mu = \nu$.

Πρόταση 66. *Εστω ϕ εσωτερικη συναρτηση. Ο υποχωρος ϕH^2 του H^2 εχει πεπερασμενη συνδιασταση (δηλαδη $\dim(\phi H^2)^{\perp} = m < \infty$) αν-ν η ϕ ειναι γινομενο Blaschke με πεπερασμενο πληθος ($= m$) παραγοντων (επι μια σταθερα).*

Παρατηρηση
Για $a \in [0,1]$ θετουμε $\phi_a := BS_{\mu_a}$ οπου B γινομενο Blaschke και S_{μ_a} ιδιαζουσα εσωτερικη συναρτηση με μετρο $\mu_a := (1-a)\mu$ οπου μ θετικο μετρο. Εχουμε

$$0 \leq a \leq b \leq 1 \iff \phi_0 H^2 \subseteq \phi_a H^2 \subseteq \phi_b H^2 \subseteq \phi_1 H^2 = BH^2 .$$

Αν $\mu \neq 0$, οι υποχωροι $\phi_a H^2$ ειναι διαφορετικοι ανα δυο: σχηματιζουν απειρη αλυσιδα (ισομορφη με το $[0,1]$) μεταξυ των $\phi_0 H^2$ και $\phi_1 H^2$. Επισης, αν το B ειναι απειρογινομενο, οι υποχωροι $BH^2 \subseteq B_1 H^2 \subseteq ...$ του H^2 οπου $\frac{B_n}{B_{n+1}}$ πρωτοβαθμιος παραγοντας Blaschke, ειναι απειρη αλυσιδα (ισομορφη με το $\mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$) μεταξυ των $\phi_1 H^2$ και H^2.

Ορισμός 67. Αν ϕ_1, ϕ_2 ειναι εσωτερικες συναρτησεις, λεμε οτι *η ϕ_2 διαιρει την ϕ_1* αν υπαρχει ϕ_3 εσωτερικη ωστε $\phi_1 = \phi_2 \phi_3$.

Εστω $\{\phi_i, i \in I\}$ οικογενεια εσωτερικων συναρτησεων. Λεμε οτι η εσωτερικη συναρτηση ϕ_M ειναι ο *μεγιστος κοινος διαιρετης* της $\{\phi_i, i \in I\}$ αν (α) η ϕ_M διαιρει καθε ϕ_i, $i \in I$ και (β) καθε αλλη εσωτερικη συναρτηση ϕ που διαιρει την $\{\phi_i, i \in I\}$, διαιρει και την ϕ_M.

Λεμε οτι η εσωτερικη συναρτηση ϕ_E ειναι το *ελαχιστο κοινο πολλαπλασιο* της $\{\phi_i, i \in I\}$ αν (α) καθε ϕ_i, $i \in I$ διαιρει την ϕ_E και (β) αν μια εσωτερικη συναρτηση ϕ διαιρειται απο ολες τις ϕ_i τοτε διαιρειται και απο την ϕ_E.

Πρόταση 68. *Καθε οικογενεια $\{\phi_i, i \in I\}$ εσωτερικων συναρτησεων εχει μεγιστο κοινο διαιρετη.*

Καθε πεπερασμενη οικογενεια $\{\phi_1, ..., \phi_n\}$ εσωτερικων συναρτησεων εχει ελαχιστο κοινο πολλαπλασιο.

Παράδειγμα 69. Οικογενεια εσωτερικων συναρτησεων που δεν εχει ελαχιστο κοινο πολλαπλασιο;

Πρόταση 70. *Αν E ειναι μη μηδενικος κλειστος S-αναλλοιωτος υποχωρος του H^2, τοτε $E = \phi H^2$ οπου η ϕ ειναι ο μεγιστος κοινος διαιρετης των εσωτερικων μερων ολων των $f \in E$.*

5 Τελεστες Toeplitz

Πινακες Toeplitz

Υπενθυμιση Αν $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ ορθοκανονικη βαση χωρου Hilbert H, σε καθε $A \in \mathcal{B}(H)$ αντιστοιχει πινακας $[a_{nm}]$ οπου $[a_{nm}] = \langle Ae_m, e_n \rangle$.

Αν $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$, ο πινακας του τελεστη M_ϕ ως προς τη συνηθισμενη ο/κ βαση $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$ του $L^2(\mathbb{T})$ ειναι

$$\begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ ... & \hat{\phi}(0) & \hat{\phi}(-1) & \hat{\phi}(-2) & \hat{\phi}(-3) & \hat{\phi}(-4) & ... \\ ... & \hat{\phi}(1) & \hat{\phi}(0) & \hat{\phi}(-1) & \hat{\phi}(-2) & \hat{\phi}(-3) & ... \\ ... & \hat{\phi}(2) & \hat{\phi}(1) & \hat{\phi}(0) & \hat{\phi}(-1) & \hat{\phi}(-2) & ... \\ ... & \hat{\phi}(3) & \hat{\phi}(2) & \hat{\phi}(1) & \hat{\phi}(0) & \hat{\phi}(-1) & ... \\ ... & \hat{\phi}(4) & \hat{\phi}(3) & \hat{\phi}(2) & \hat{\phi}(1) & \hat{\phi}(0) & ... \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = [\hat{\phi}(n-m)] .$$

Πρόταση 71. *Αν $A \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T}))$ εχει $[a_{nm}] = [u(m-n)]$ στη συνηθισμενη ο/κ βαση, τοτε υπαρχει $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ ωστε $A = M_\phi$.*

Ορισμός 72. Ενας πινακας (ειτε $n \times n$ ειτε $\infty \times \infty$) λεγεται πινακας Toeplitz αν εχει «σταθερες διαγωνιους», δηλ. αν $m - n = j - i \Rightarrow a_{nm} = a_{ij}$ (ισοδυναμα, $a_{n,m} = a_{n+1,m+1}$ $\forall n, m$).

Υπενθυμιση: Το συνολο τιμων μιας $\phi \in C(\mathbb{T})$:

$$\operatorname{ran}(\phi) := \phi(\mathbb{T}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \{e^{it} \in \mathbb{T} : |\phi(e^{it}) - \lambda| = 0\} \neq \emptyset\}.$$

Αν $M_\phi : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T}) : f \mapsto \phi f$, τοτε

$$\sigma(M_\phi) = \sigma_a(M_\phi) = \operatorname{ran}(\phi).$$

Γενικευση:

Ορισμός 73. Το ουσιωδες συνολο τιμων (essential range) μιας $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$:

$$\operatorname{essran}(\phi) := \{\lambda \in \mathbb{C} : m(\{e^{it} \in \mathbb{T} : |\phi(e^{it}) - \lambda| < \varepsilon\}) > 0 \ \forall \varepsilon > 0\}.$$

Ειναι συμπαγες υποσυνολο του $\mathbb{C}$.

Πρόταση 74. *Αν $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$,*

$$\sigma(M_\phi) = \sigma_a(M_\phi) = \operatorname{essran}(\phi).$$

Τελεστες Toeplitz

Ορισμός 75. Η προβολη του Riesz $P \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T}))$ οριζεται απο τον τυπο

$$P\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) f_k\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \hat{f}(n) f_n, \quad f \in L^2(\mathbb{T})$$

ισοδυναμα

$$P(f_n) = \begin{cases} f_n, & \text{αν } n \geq 0 \\ 0, & \text{αν } n < 0 \end{cases}$$

ειναι δηλαδη η ορθη προβολη του $L^2(\mathbb{T})$ επι του $\widetilde{H}^2$.

Ορισμός 76. Αν $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ οριζουμε τον τελεστη Toeplitz T_ϕ

$$T_\phi := PM_\phi|_{\widetilde{H}^2} : \widetilde{H}^2 \to \widetilde{H}^2 : f \mapsto M_\phi f \mapsto PM_\phi f.$$

Η $\{f_n : n \geq 0\}$ ειναι ορθοκανονικη βαση του $\widetilde{H}^2$ και η $\{f_n : n < 0\}$ ειναι ο/κ βαση του $(\widetilde{H}^2)^\perp$. Εστω $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Ως προς τη διασπαση $L^2(\mathbb{T}) = (\widetilde{H}^2)^\perp \oplus \widetilde{H}^2$ ο πινακας του τελεστη M_ϕ γινεται

$$M_\phi \simeq \left(\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots \\ \dots & \hat{\phi}(0) & \hat{\phi}(-1) \\ \dots & \hat{\phi}(1) & \hat{\phi}(0) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \\ \hat{\phi}(-2) & \hat{\phi}(-3) & \hat{\phi}(-4) & \dots \\ \hat{\phi}(-1) & \hat{\phi}(-2) & \hat{\phi}(-3) & \dots \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dots & \hat{\phi}(2) & \hat{\phi}(1) \\ \dots & \hat{\phi}(3) & \hat{\phi}(2) \\ \dots & \hat{\phi}(4) & \hat{\phi}(3) \\ & \vdots & \vdots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \hat{\phi}(0) & \hat{\phi}(-1) & \hat{\phi}(-2) & \dots \\ \hat{\phi}(1) & \hat{\phi}(0) & \hat{\phi}(-1) & \dots \\ \hat{\phi}(2) & \hat{\phi}(1) & \hat{\phi}(0) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \end{array} \right)$$

Αρα

$$T_\phi = PM_\phi|_{\widetilde{H}^2} \simeq \begin{bmatrix} \hat{\phi}(0) & \hat{\phi}(-1) & \hat{\phi}(-2) & \hat{\phi}(-3) & ... \\ \hat{\phi}(1) & \hat{\phi}(0) & \hat{\phi}(-1) & \hat{\phi}(-2) & ... \\ \hat{\phi}(2) & \hat{\phi}(1) & \hat{\phi}(0) & \hat{\phi}(-1) & ... \\ \hat{\phi}(3) & \hat{\phi}(2) & \hat{\phi}(1) & \hat{\phi}(0) & ... \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Ορισμός 77. Ενας τελεστης Toeplitz T_ϕ λεγεται αναλυτικος τελεστης Toeplitz αν $\phi \in \widetilde{H}^\infty$ (οποτε $T_\phi = M_\phi|_{\widetilde{H}^2} : \widetilde{H}^2 \to \widetilde{H}^2 : f \mapsto \phi f$).

$$T_\phi = M_\phi|_{\widetilde{H}^2} \simeq \begin{bmatrix} \hat{\phi}(0) & 0 & 0 & 0 & ... \\ \hat{\phi}(1) & \hat{\phi}(0) & 0 & 0 & ... \\ \hat{\phi}(2) & \hat{\phi}(1) & \hat{\phi}(0) & 0 & ... \\ \hat{\phi}(3) & \hat{\phi}(2) & \hat{\phi}(1) & \hat{\phi}(0) & ... \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Τελεστες Toeplitz

Υπενθυμιση

Θεώρημα 78. *Το συνολο των τελεστων στον $L^2(\mathbb{T})$ που μετατιθενται με τον M_1 ειναι το*

$$\{M_\phi : \phi \in L^\infty(\mathbb{T})\}.$$

Πρόταση 79. *Ο μεταθετης του unilateral shift T_1 στον $\widetilde{H}^2$ ειναι το συνολο των* αναλυτικων *τελεστων Toeplitz: Αν $A \in \mathcal{B}(\widetilde{H}^2)$, τοτε*

$$AT_1 = T_1 A \iff A = T_\phi \text{ για καποιο } \phi \in \widetilde{H}^\infty.$$

Reminder: The (bilateral) shift W on $\ell^2(\mathbb{Z})$ and M_1 on $L^2(\mathbb{T})$

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z}) : f \mapsto (\hat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}}$$
$$f_n \mapsto e_n \ (n \in \mathbb{Z}).$$
$$\mathcal{F}_r := \mathcal{F}|_{\tilde{H}^2}$$

$$\begin{tikzcd} \ell^2(\mathbb{Z}) \arrow[r, "W"] & \ell^2(\mathbb{Z}) \\ L^2(\mathbb{T}) \arrow[u, two heads, tail, "\mathcal{F}"] \arrow[r, "M_1"'] & L^2(\mathbb{T}) \arrow[u, two heads, tail, "\mathcal{F}"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\ell^2(\mathbb{Z}_+) \arrow[r, "S"] & \ell^2(\mathbb{Z}_+) \\
\tilde{H}^2 \arrow[u, "\mathcal{F}_r"] \arrow[r, "\tilde{T}_1"'] & \tilde{H}^2 \arrow[u, "\mathcal{F}_r"']
\end{tikzcd}$$

$$(M_1 f)(e^{it}) = e^{it} f(e^{it}), \qquad \tilde{T}_1 = M_1|_{\tilde{H}^2}$$

Multiplication operators and Toeplitz operators

Εστω $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ και $M_\phi : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T}) : g \mapsto \phi g$.

$$\begin{tikzcd}
\ell^2(\mathbb{Z}) \arrow[r, "\hat{M}_\phi"] & \ell^2(\mathbb{Z}) \\
L^2(\mathbb{T}) \arrow[u, "\mathcal{F}"] \arrow[r, "M_\phi"'] & L^2(\mathbb{T}) \arrow[u, "\mathcal{F}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\ell^2(\mathbb{Z}_+) \arrow[r, "\hat{T}_\phi"] & \ell^2(\mathbb{Z}_+) \\
\tilde{H}^2 \arrow[u, "\mathcal{F}_r"] \arrow[r, "\tilde{T}_\phi"'] & \tilde{H}^2 \arrow[u, "\mathcal{F}_r"']
\end{tikzcd}$$

$$\hat{M}_\phi := \mathcal{F} M_\phi \mathcal{F}^*, \qquad \tilde{T}_\phi = P M_\phi|_{\tilde{H}^2}, \rightsquigarrow \hat{T}_\phi := \mathcal{F}_r \tilde{T}_\phi \mathcal{F}_r^*$$

$$\begin{aligned}
\{W\}' &= \{\hat{M}_\phi : \phi \in L^\infty(\mathbb{T})\} \subseteq \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T})) \\
\{\tilde{T}_1\}' &= \{\tilde{T}_\phi : \phi \in \tilde{H}^\infty\} \subseteq \mathcal{B}(\tilde{H}^2) \\
\rightsquigarrow \{S\}' &= \{\hat{T}_\phi : \phi \in \tilde{H}^\infty\} \subseteq \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}_+))\,.
\end{aligned}$$

Τελεστες Toeplitz

Πρόταση 80. *Ενας φραγμενος τελεστης $A \in \mathcal{B}(\widetilde{H}^2)$ ειναι τελεστης Toeplitz αν-ν εχει πινακα Toeplitz ως προς την ο/κ βαση $\{f_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$.*

Συνεπεια για $T \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}_+))$:

Πόρισμα 81. *Ενας φραγμενος τελεστης $T \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}_+))$ ειναι τελεστης Toeplitz, δηλαδη υπαρχει $\phi \in \widetilde{H}^\infty$ ωστε $\langle Te_m, e_n\rangle = \widehat{\phi}(n-m)$, αν-ν*

$$S^* T S = T.$$

Παρατηρηση Η απεικονιση $L^\infty(\mathbb{T}) \to \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T})) : \phi \mapsto M_\phi$
• Ειναι γραμμικη: $M_{\phi+\lambda\psi} = M_\phi + \lambda M_\psi$
• Διατηρει τη μοναδα: $M_1 = I$
• Διατηρει την ενελιξη: $M_{\bar{\phi}} = M_\phi^*$
• Ειναι συστολη (μαλιστα ισομετρια): $\|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty$
• Διατηρει το γινομενο: $M_{\phi\psi} = M_\phi M_\psi$

Πρόταση 82. *Η απεικονιση $L^\infty(\mathbb{T}) \to \mathcal{B}(\widetilde{H}^2) : \phi \mapsto T_\phi = PM_\phi|_{\widetilde{H}^2}$*
• *Ειναι γραμμικη: $T_{\phi+\lambda\psi} = T_\phi + \lambda T_\psi$*
• *Διατηρει τη μοναδα: $T_1 = I$*
• *Διατηρει την ενελιξη: $T_{\bar{\phi}} = T_\phi^*$*
• *Ειναι συστολη: $\|T_\phi\| \le \|\phi\|_\infty$ και 1-1 (αργοτερα θα δειχθει ισομετρια)*
• *Δεν διατηρει το γινομενο (πχ. $f_{-1}f_1 = f_1 f_{-1}$ ενω $T_{f_{-1}}T_{f_1} \neq T_{f_1}T_{f_{-1}}$).*

Πρόταση 83. *Αν $\phi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$, ο τελεστης $T_\psi T_\phi$ ειναι Toeplitz αν-ν ειτε $\phi \in \widetilde{H}^\infty$ ειτε $\bar{\psi} \in \widetilde{H}^\infty$. Τοτε εχουμε $T_\psi T_\phi = T_{\psi\phi}$.*

Θα χρειασθουν
Συμβολισμος Αν H Hilbert και $f, g \in H$ ο τελεστης $fg^* \in \mathcal{B}(H)$ οριζεται ως εξης:

$$fg^* : h \mapsto \langle h, g\rangle f, \ f \in H.$$

Αν $A, B \in \mathcal{B}(H)$ τοτε $A(fg^*)B = (Af)(B^*g)^*$.

Λήμμα 84. *Αν $\phi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$,*

$$T_1^*(T_\psi T_\phi)T_1 - (T_\psi T_\phi) = fg^*$$

οπου $f = P(f_{-1}\psi)$ και $g = P(f_{-1}\bar{\phi})$.

Πόρισμα 85. *Αν $\phi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$, εχουμε $T_\psi T_\phi = 0$ αν-ν ειτε $T_\psi = 0$ ειτε $T_\phi = 0$.*

Ποτε μετατιθενται; Ελεγχουμε οτι αν και οι δυο $\phi, \psi \in \widetilde{H}^\infty$, ή και οι δυο $\bar{\phi}, \bar{\psi} \in \widetilde{H}^\infty$, ή $\exists a, b \in \mathbb{C}$ ωστε $a\psi + b\phi = f_0 = 1$, τοτε μετατιθενται.

Πρόταση 86. *Εστω $\phi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Εχουμε $T_\psi T_\phi = T_\phi T_\psi$ αν-ν ισχυει (τουλαχιστο) ενα απο τα ακολουθα*
• *οι ϕ και ψ ανηκουν στον $\widetilde{H}^\infty$,*
• *οι $\bar{\phi}$ και $\bar{\psi}$ ανηκουν στον $\widetilde{H}^\infty$,*
• *υπαρχουν $a, b \in \mathbb{C}$ με $|a| + |b| \neq 0$ ωστε $a\psi + b\phi = c1$ οπου $c \in \mathbb{C}$.*

Πόρισμα 87. *Αν $\phi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$ και εχουμε $T_\psi T_\phi = T_\phi T_\psi$, τοτε ειτε ο $T_\psi T_\phi$ ειναι Toeplitz ή μια απ τις ϕ, ψ ειναι γραμμ. συνδυασμος της αλλης και της 1.*

Παρατήρηση 88. *Ενας τελεστης Toeplitz T_ϕ ειναι αυτοσυζυγης αν-ν η ϕ παιρνει σ.π. πραγματικες τιμες (γιατι $T_\phi^* = T_{\bar\phi}$).*

Πόρισμα 89. *Ενας τελεστης Toeplitz T_ϕ ειναι φυσιολογικος αν-ν υπαρχουν $c, d \in \mathbb{C}$ και $\psi \in L^\infty(\mathbb{T})$ πραγματικη ωστε $\phi = c\psi + d$ σ.π.*

Το φασμα τελεστων Toeplitz

Ορισμός 90 (Υπενθυμιση)**.** Το ουσιωδες συνολο τιμων (essential range) μιας $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$:

$$\mathrm{essran}(\phi) := \{\lambda \in \mathbb{C} : m(\{e^{it} \in \mathbb{T} : |\phi(e^{it}) - \lambda| < \varepsilon\}) > 0 \ \forall \varepsilon > 0\}.$$

Δηλ. $\lambda \notin \mathrm{essran}(\phi) \iff \exists \varepsilon > 0 : m(B(\lambda, \varepsilon) \cap \mathrm{ran}(\phi)) = 0.$

Πρόταση 91 (Υπενθυμιση)**.** *Αν $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$,*

$$\sigma(M_\phi) = \sigma_a(M_\phi) = \mathrm{essran}(\phi).$$

Θεώρημα 92. *Αν $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$, τοτε $\sigma(M_\phi) \subseteq \sigma(T_\phi)$. Μαλιστα*

$$\sigma(M_\phi) = \sigma_a(M_\phi) \subseteq \sigma_a(T_\phi) \subseteq \sigma(T_\phi).$$

Παρατήρηση 93. *Ο εγκλεισμος $\sigma(M_\phi) \subseteq \sigma(T_\phi)$ ειναι συνηθως γνησιος. Για παραδειγμα, αν $\phi = f_1$ τοτε $\sigma(M_\phi) = \sigma(W) = \mathbb{T}$ ενω $\sigma(T_\phi) = \sigma(S) = \overline{\mathbb{D}}$ (οπως εχουμε δειξει).*

Πόρισμα 94. *Για καθε $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$,*

$$\|\phi\|_\infty = \|M_\phi\| = \|T_\phi\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T_\phi)\}.$$

Ειδικοτερα η $\phi \mapsto T_\phi$ ειναι ισομετρια.

Πρόταση 95. *Αν $\phi \in H^\infty$ τοτε*

$$\sigma(T_\phi) = \overline{\phi(\mathbb{D})}.$$

Εστω $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$.

Θεώρημα 96 (Coburn alternative)**.** *Αν $T_\phi \neq 0$ τοτε ή ο T_ϕ ειναι 1-1 ή ο T_ϕ^* ειναι 1-1.*

Πόρισμα 97. *Αν $T_\phi \neq 0$ και δεν ειναι 1-1 τοτε εχει πυκνο συνολο τιμων.*

Πόρισμα 98. *Εστω $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ μη σταθερα. Αν $\lambda \in \sigma_p(T_\phi)$ τοτε $\bar\lambda \notin \sigma_p(T_\phi^*)$. Ειδικοτερα, αν η ϕ παιρνει σ.π. πραγματικες τιμες, τοτε $\sigma_p(T_\phi) = \emptyset$.*

Ο δεικτης στροφης

Υπενθυμιση Εστω $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ κλειστη κατα τμηματα συνεχως διαφορισιμη καμπυλη στο $\mathbb{C}$ και $\lambda \notin [\gamma]$ οπου $[\gamma] := \{\gamma(t) : t \in [0,1]\} \subseteq \mathbb{C}$. Ο δεικτης στροφης $\mathrm{wind}(\gamma;\lambda) = n(\gamma;\lambda)$ οριζεται απο το επικαμπυλιο ολοκληρωμα

$$\mathrm{wind}(\gamma;\lambda) = n(\gamma;\lambda) := \frac{1}{2\pi i}\int_{[\gamma]} \frac{1}{z-\lambda}dz.$$

Θα δειξουμε οτι ο δεικτης στροφης επεκτεινεται σε ολες τις συνεχεις κλειστες καμπυλες $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$. Αν $f \in C(\mathbb{T})$, γραφουμε $n(f;\lambda)$ για τον δεικτη στροφης της $\gamma_f(t) := f(e^{2\pi it})$, $t \in [0,1]$.

Ο δεικτης αυτος οριζεται ως εξης:

Ορισμός 99. Αν $f \in C(\mathbb{T})$ και $0 \notin f(\mathbb{T})$, οριζουμε

$$\mathrm{wind}(f;0) = n(f;0) := g_f(1) - g_f(0)$$

οπου $g_f : [0,1] \to \mathbb{C}$ ειναι οποιαδηποτε συνεχης συναρτηση που ικανοποιει $f(e^{2\pi it}) = e^{2\pi i g_f(t)}$, $t \in [0,1]$.

Αν $f \in C(\mathbb{T})$ και $\lambda \in \mathbb{C}\backslash f(\mathbb{T})$, οριζουμε

$$\mathrm{wind}(f;\lambda) = n(f;\lambda) := n(f_\lambda;0)$$

οπου $f_\lambda = f - \lambda 1$.

Τετοια g_f υπαρχει:

Πρόταση 100. *Αν η $\gamma \in C([0,1])$ δεν μηδενιζεται πουθενα (ισοδυναμα, αν ειναι αντιστρεψιμο στοιχειο της αλγεβρας $C([0,1])$), τοτε υπαρχει (μη μοναδικη) $g \in C([0,1])$ ωστε $\gamma = e^g$.*

Πρόταση 101. *Ο δεικτης στροφης εχει τις ακολουθες ιδιοτητες: αν οι $f,h \in C(\mathbb{T})$ δεν μηδενιζονται πουθενα,*

1. $n(fh;0) = n(f;0) + n(h;0)$
2. $n(f;0) = n \in \mathbb{Z} \iff \exists\, u \in C(\mathbb{T})$ *ωστε* $f = f_n e^u$ *(οπου* $f_n(e^{it}) = e^{int}$, $e^{it} \in \mathbb{T}$*)*
3. *αν επιπλεον η f ειναι συνεχως παραγωγισιμη,*

$$n(f;0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_f} \frac{1}{z}dz$$

οπου $\gamma_f(t) = f(e^{2\pi it})$, $t \in [0,1]$.

Αποδειξεις στο Ind24.pdf.

Το φασμα τελεστων Toeplitz

Θεώρημα 102. *Αν $\phi \in C(\mathbb{T})$,*

$$\sigma(T_\phi) = \mathrm{ran}(\phi) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \notin \mathrm{ran}(\phi) \wedge n(\phi;\lambda) \neq 0\}.$$

Αποδειξη στο specTf.pdf.

Η αλγεβρα Toeplitz [λεπτομερειες και αποδειξεις στο $\mathrm{cstars.pdf}$**]**

Ορισμός 103. Η *αλγεβρα Toeplitz algebra* ειναι η μικροτερη νορμ-κλειστη αυτοσυζυγης (δηλ. κλειστη ως προς την απεικονιση $T \mapsto T^*$) υπαλγεβρα της $\mathcal{B}(\widetilde{H}^2)$ που περιεχει το shift S, δηλαδη η νορμ-κλειστη γρμμικη θηκη ολων των γινομενων των $\{S, S^*\}$.

Θεώρημα 104. *Η αλγεβρα Toeplitz ισουται με*

$$\mathcal{T} := \{T_f + K : f \in C(\mathbb{T}), K \in \mathcal{K}(\widetilde{H}^2)\} \subseteq \mathcal{B}(\widetilde{H}^2).$$

Εδω $\mathcal{K}(\widetilde{H}^2)$ ειναι το συνολο των συμπαγων τελεστων στον $\widetilde{H}^2$, δηλαδη η νορμ-κλειστη θηκη του συνολου των φραγμενων τελεστων $\widetilde{H}^2 \to \widetilde{H}^2$ πεπερασμενης ταξης.

Λήμμα 105. *Αν $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$, τοτε για καθε $K \in \mathcal{K}(\widetilde{H}^2)$ εχουμε*

$$\|T_\phi - K\| \geq \|T_\phi\|.$$

Πρόταση 106. *Η απεικονιση*

$$\pi : \mathcal{T} \to C(\mathbb{T}) : T_f + K \mapsto f$$

*ειναι καλα ορισμενος ομομορφισμος της $\mathcal{T}$ επι της $C(\mathbb{T})$, που διατηρει το *, ικανοποιει $\|\pi(f)\| \leq \|f\|_\infty$ για καθε $f \in C(\mathbb{T})$ και εχει πυρηνα $\ker \pi = \mathcal{K}(\widetilde{H}^2)$.*