

## Ιδιαζουσες Εσωτερικες Συναρτησεις (Singular inner functions)

Υπενθυμιση: Ο πυρηνας Poisson Για  $r \in [0, 1)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ ,

$$\begin{aligned} P_r(t) &:= \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{int} = \sum_{n=-\infty}^{-1} r^{-n} e^{int} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{int} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{-ikt} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{int} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nt \end{aligned}$$

Γραφοντας  $z = re^{it}$ , εχουμε  $|z| < 1$  και

$$\begin{aligned} P_r(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \bar{z}^k + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}} + \frac{1}{1-z} \\ &= \frac{\bar{z}(1-z) + (1-\bar{z})}{(1-\bar{z})(1-z)} = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} = \frac{1-r^2}{1-2r \cos t + r^2} \\ &= \operatorname{Re} \left( \frac{1+z}{1-z} \right) \end{aligned}$$

αρα  $P_r(t) \geq 0$  και  $P_0(t) = 1 = \|P_r\|_{L^1}$ . Επισης

$$P_r(t-s) = \operatorname{Re} \left( \frac{1 + re^{i(t-s)}}{1 - re^{i(t-s)}} \right) = \operatorname{Re} \left( \frac{e^{is} + re^{it}}{e^{is} - re^{it}} \right). \quad (1)$$

### Ιδιαζουσες Εσωτερικες Συναρτησεις

**Ορισμός 1.** Μια εσωτερικη συναρτηση  $\phi \in H^\infty$  λεγεται ιδιαζουσα εσωτερικη συναρτηση (singular inner function) αν δεν ειναι σταθερη και δεν εχει ριζες στον  $\mathbb{D}$ .

**Παράδειγμα 1.**  $\phi(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$ ,  $z \in \mathbb{D}$ .

**Παράδειγμα 2.**  $\phi(z) = \exp\left(\sum_{k=1}^n a_k \frac{z+e^{i\theta_k}}{z-e^{i\theta_k}}\right)$ ,  $z \in \mathbb{D}$  οπου  $a_k > 0$  και  $\theta_k \in [0, 2\pi]$ .

**Θεώρημα 3.** Μια  $S : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  ειναι ιδιαζουσα εσωτερικη συναρτηση αν-ν ειναι της μορφης

$$S(z) = c \exp \left( - \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(e^{it}) \right), \quad z \in \mathbb{D}$$

οπου  $c \in \mathbb{T}$  και  $\mu$  ειναι κανονικο δετικο μη μηδενικο μετρο Borel στον  $\mathbb{T}$  που ειναι καθετο ή ιδιαζον ως προς το μετρο Lebesgue.

(Ενα δετικο μετρο Borel στον  $\mathbb{T}$  λεγεται καθετο ή ιδιαζον ως προς το μετρο Lebesgue  $m$  αν ειναι συγκεντρωμενο σε ενα  $m$ -μηδενικο συνολο  $A \subseteq \mathbb{T}$ , αν δηλαδη  $\mu(A^c) = 0$  και  $m(A) = 0$ .)

Για την αποδειξη, θα χρειασθει το ακολουθο Θεωρημα αναπαραστασης:

**Θεώρημα 4** (Herglotz). Εστω  $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  ολομορφή ώστε  $\operatorname{Re} h(z) > 0$  για κάθε  $z \in \mathbb{D}$ . Τότε υπάρχει κανονικό θετικό μέτρο Borel  $\mu$  στον  $\mathbb{T}$  ώστε

$$h(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(e^{it}) + i \operatorname{Im}(h(0)), \quad z \in \mathbb{D}.$$

**Λήμμα 5.** Εστω  $\mu$  κανονικό θετικό μέτρο Borel στον  $\mathbb{T}$ . Ορίζουμε

$$F(z) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(e^{it}) \quad z \in \mathbb{D}.$$

Τότε η  $F$  είναι ολομορφή στο  $\mathbb{D}$ .

*Απόδειξη.* Η συνάρτηση  $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$  είναι (προφανώς) ολομορφή στο  $\mathbb{D}$ , επομένως αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  που συγκλίνει ομοιομορφα στα συμπαγή υποσυνόλα του

$\mathbb{D}$ . Συνεπώς η δυναμοσειρά για την  $f(e^{-it}z) = \frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z} = \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}$  συγκλίνει ομοιομορφα ως προς  $t \in [0, 2\pi]$  για κάθε  $z \in \mathbb{D}$  (το σύνολο  $\{e^{-it}z : t \in [0, 2\pi]\}$  είναι συμπαγές υποσύνολο του  $\mathbb{D}$ ). Επομένως

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(e^{-it}z) d\mu(e^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-int} z^n d\mu(e^{it}) \\ &\stackrel{(u)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left( \frac{1}{2\pi} \int e^{-int} d\mu(e^{it}) \right) z^n \quad z \in \mathbb{D} \end{aligned}$$

(η ιδιότητα (u) επεται από την ομοιομορφή συγκλιση της σειράς). Δηλαδή η  $F$  αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά στο  $\mathbb{D}$ , άρα είναι ολομορφή.  $\square$

**Αποδειξη του Θεωρήματος Herglotz**

**Βήμα 1.** Θετω  $h_s(z) = h(sz)$ , όπου  $s \in (0, 1)$ . Η  $h_s$  είναι ολομορφή στον ανοικτό δίσκο με ακτίνα  $1/s$ , που είναι μια ανοικτή περιοχή του κλειστού δίσκου  $\overline{\mathbb{D}}$ . Συνεπώς ισχύει ότι  $h_s \in H^2$ , οπότε ο τύπος του Poisson δίνει:

$$h_s(re^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{h}_s(e^{ix}) P_r(t-x) dx, \quad re^{it} \in \mathbb{D}.$$

$$\text{Θετω } F(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ix} + z}{e^{ix} - z} \operatorname{Re}(\tilde{h}_s(e^{ix})) dx \quad : \text{ είναι ολομορφή στο } \mathbb{D} \text{ (λήμμα 5).}$$

$$\begin{aligned} \text{Εχω } \operatorname{Re}(F(z)) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(t-x) \operatorname{Re}(\tilde{h}_s(e^{ix})) dx \quad (\text{απο την (1)}) \\ &= \operatorname{Re}(h_s(z)) \end{aligned}$$

οπότε η συνάρτηση  $h_s(z) - F(z)$  έχει πραγματικό μέρος = 0 στο ανοικτό και συνεκτικό σύνολο  $\mathbb{D}$ , άρα είναι σταθερή (αρχή της ταυτοτητας):

$$h_s(z) - F(z) = h_s(0) - F(0) \stackrel{(*)}{=} i \operatorname{Im}(h_s(0)) - 0 = i \operatorname{Im}(h(0))$$

( η (\*) ισχυει γιατι  $F(0) \in \mathbb{R}$ ).

Έχουμε λοιπον, για καθε  $z \in \mathbb{D}$ ,

$$h_s(z) = F(z) + i \operatorname{Im}(h(0)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ix} + z}{e^{ix} - z} \operatorname{Re}(\tilde{h}_s(e^{ix})) dx + i \operatorname{Im}(h(0)). \quad (**)$$

Τωρα: να στειλω  $s \nearrow 1$  και να δειξω οτι  $\operatorname{Re}(\tilde{h}_s(e^{ix})) dx \rightarrow d\mu(e^{ix})$  για καποιο μετρο  $\mu$ , με την καταλληλη «ασθενη» εννοια συγκλισης.

**Βημα 2.** [Συντομη προσεγγιση] Για καθε  $s \in [0, 1)$ , θεωρουμε το μετρο

$$\mu_s(E) := \frac{1}{2\pi} \int_E \operatorname{Re}(\tilde{h}_s(e^{ix})) dx, \quad E \subseteq [0, 2\pi] \text{ Borel}$$

(ειναι θετικο μετρο, γιατι απο τη υποθεση εχουμε  $\operatorname{Re}(\tilde{h}_s(e^{ix})) > 0$  για καθε  $x$ .)

Αν το οριο  $\lim_{r \nearrow 1} \operatorname{Re}(\tilde{h}_s(e^{ix}))$  υπηρχε στη νορμα του  $L^1(\mathbb{T})$  θα οριζε μια συναρτηση  $k \in L^1(\mathbb{T})$  και θα ειχαμε, για καθε  $g \in C(\mathbb{T})$ ,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{ix}) k(e^{ix}) dx = \lim_{r \nearrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{ix}) \operatorname{Re}(\tilde{h}_s(e^{ix})) dx.$$

Ομως το μονο που μπορουμε να βεβαιωσουμε για τις συναρτησεις  $\operatorname{Re}(\tilde{h}_s(e^{ix}))$  ειναι οτι οι νορμες τους στον  $L^1(\mathbb{T})$  ειναι ομοιομορφα φραγμενες. Πραγματι, αφου οπως ειδαμε η  $h_s$  ειναι ολομορφη σε μια περιοχη του  $\mathbb{D}$ , οποτε εφαρμοζεται ο ολοκληρωτικος τυπος του Cauchy (ή ο τυπος μεσης τιμης του Gauss) και εχουμε

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{h}_s(e^{ix}) dx = h_s(0) = h(s0) = h(0)$$

για καθε  $s$ , και συνεπως

$$\|\operatorname{Re}(\tilde{h}_s)\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(\tilde{h}_s(e^{ix})) dx = \operatorname{Re}(h(0)) \quad \text{για καθε } s \in (0, 1). \quad (*)$$

Αυτο σημαινει οτι τα αντιστοιχα μετρα  $\mu_s$  ειναι ομοιομορφα φραγμενα στον χωρο  $M(\mathbb{T})$  των κανονικων (μιγαδικων) μετρων Borel στον κυκλο  $\mathbb{T}$ . Ειναι ομως γνωστο (!) οτι τα φραγμενα συνολα στον χωρο  $M(\mathbb{T})$  ειναι συμπαγη στην «ασθενη-\* τοπολογια», δηλαδη την τοπολογια της κατα σημειο συγκλισης των αντιστοιχων ολοκληρωματων. Κατα συνεπεια, υπαρχει ενα κανονικο μετρο Borel  $\mu$  στον  $\mathbb{T}$  με την ιδιοτητα να υπαρχει ακολουθια  $(s_n)$  του  $[0, 1)$  με  $s_n \nearrow 1$  ωστε

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{ix}) d\mu(x) = \lim_{r \nearrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{ix}) \operatorname{Re}(\tilde{h}_s(e^{ix})) dx$$

για καθε  $g \in C(\mathbb{T})$ .

Εφαρμοζοντας την τελευταια σχεση στην  $g(z) = \frac{e^{it+z}}{e^{it-z}}$  βρισκουμε, για καθε  $z \in \mathbb{D}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{ix+z}}{e^{ix-z}} d\mu(x) &= \lim_n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ix+z}}{e^{ix-z}} \operatorname{Re}(\tilde{h}_{s_{k_n}}(e^{ix})) dx \\ &\stackrel{(**)}{=} \lim_n h_{s_{k_n}}(z) - i \operatorname{Im}(h(0)) \\ &= \lim_n h(s_{k_n} z) - i \operatorname{Im}(h(0)) = h(z) - i \operatorname{Im}(h(0)) \end{aligned}$$

και το θεωρημα Herglotz αποδειχθηκε.  $\square$

**Βημα 2.** [Δευτερη, στοιχειωδης προσεγγιση] Για καθε  $s \in [0, 1)$ , οριζω τη γραμμικη μορφη

$$\mu_s : C(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{C} : g \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{ix}) \operatorname{Re}(\tilde{h}_s(e^{ix})) dx$$

που ειναι θετικη (αφου  $\operatorname{Re}(\tilde{h}_s(e^{ix})) > 0$  για καθε  $x$ ) και συνεχης στον  $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$ , αφου

$$\begin{aligned} |\mu_s(g)| &\leq \|g\|_\infty \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(\tilde{h}_s(e^{ix})) dx \\ \text{αρα } \|\mu_s\| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(\tilde{h}_s(e^{ix})) dx. \end{aligned}$$

Ειδαμε οτι η  $h_s$  ειναι ολομορφη σε μια περιοχη του  $\mathbb{D}$ , οποτε εφαρμοζεται ο ολοκληρωτικος τυπος του Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{h}_s(e^{ix}) dx = h_s(0) = h(s0) = h(0)$$

και συνεπως

$$\|\mu_s\| \leq 2\pi \operatorname{Re}(h(0)) \quad \text{για καθε } s \in (0, 1). \quad (*)$$

**Πρόταση 6.** Για καθε ακολουθια  $s_n \nearrow 1$ , η  $\{\mu_{s_n}\}$  εχει μια υπακολουθια  $\{\mu_{s_{k_n}}\}$  που ειναι « $w^*$ -συγκλινουσα», δηλαδη υπαρχει μια συνεχης θετικη γραμμικη μορφη  $\nu : C(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{C}$  ωστε  $\lim_n \mu_{s_{k_n}}(g) = \nu(g)$  για καθε  $g \in C(\mathbb{T})$ .<sup>1</sup>

*Απόδειξη.* Υπενθυμιζουμε οτι το αριθμησιμο συνολο  $\{f_k : k \in \mathbb{Z}\} \subseteq C(\mathbb{T})$  (οπου  $f_k(e^{it}) = e^{ikt}$ ) εχει γραμμικη θηκη (τα τριγωνομετρικα πολυωνυμα)  $\|\cdot\|_\infty$ -πυκνη στον  $C(\mathbb{T})$ . Καθε  $\mu_s$  ικανοποιει

$$|\mu_s(f_k)| \leq \lambda \|f_k\|_\infty$$

(οπου  $\lambda = 2\pi \operatorname{Re}(h(0))$ ) και συνεπως, γραφοντας  $x_s(k) := \mu_s(f_k)$ ,

$$(x_s(k))_k \in \prod_{k \in \mathbb{Z}} \overline{D(0, \lambda \|f_k\|)}.$$

<sup>1</sup>Το συμπερασμα επεται αμεσως, αν χρησιμοποιησουμε το θεωρημα Αλαογλου-Bourbaki για την ασθενη-\* συμπαγεια της μπαλας του δυικου του χωρου Banach  $C(\mathbb{T})$  (η οποια μπαλα ειναι ασθενως-\* μετρικοποιησιμη, αφου ο  $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$  ειναι διαχωρισιμος), καθως η οικογενεια  $\{\mu_s : s \in (0, 1)\}$  ειναι ομοιομορφα φραγμενη, αρα εχει σημεια συσσωρευσης στην ασθενη-\* τοπολογια. Δινουμε μια αυτοδυναμη αποδειξη.

Το  $X := \prod_{k \in \mathbb{Z}} \overline{D(0, \lambda \|f_k\|)}$  είναι αριθμησιμο γινομενο συμπαγων δισκων, αρα είναι συμπαγης μετρικος χωρος. Επομενωσ, για καθε ακολουθια  $(s_n)$  του  $[0, 1)$  με  $s_n \nearrow 1$ , η αντιστοιχη ακολουθια  $(x_n)$  του  $X$  οπου  $x_n := (x_{s_n}(k))_k$  εχει συγκλινουσα υπακολουθια  $(x_{m_n})$ : υπαρχει  $x \in X$  ωστε  $\lim_n x_{m_n} = x$ , δηλαδη  $\lim_n x_{s_{m_n}}(k) = x(k)$  για καθε  $k \in \mathbb{Z}$ . Η απεικονιση  $f_k \mapsto x(k)$  οριζει μια γραμμικη απεικονιση

$$\mu_\infty : \text{span}\{f_k : k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{C} : \sum_k c_k f_k \mapsto \sum_k c_k x(k)$$

και, εφοσον καθε  $\mu_s$  ικανοποιει την  $|\mu_s(\sum_k c_k f_k)| \leq \lambda \|\sum_k c_k f_k\|_\infty$  (απο την (\*)), το οριο επισης θα την ικανοποιει:  $|\mu_\infty(\sum_k c_k f_k)| \leq \lambda \|\sum_k c_k f_k\|_\infty$ . Δηλαδη η  $\mu_\infty$  είναι συνεχης γραμμικη μορφη ορισμενη στον πυκνο υποχωρο  $\text{span}\{f_k : k \in \mathbb{Z}\}$  του  $C(\mathbb{T})$ .

Επομενωσ η  $\mu_\infty$  επεκτεινεται (λογω συνεχειας) σε συνεχη γραμμικη μορφη  $\nu : C(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{C}$  με  $\|\nu\| \leq \lambda$  που ικανοποιει  $\nu(f_k) = x(k) = \lim_n \mu_{s_{m_n}}(f_k)$  για καθε  $k \in \mathbb{Z}$  και συνεπως (απο γραμμικότητα και συνεχεια)

$$\nu(g) = \lim_n \mu_{s_{m_n}}(g) \quad \text{για καθε } g \in C(\mathbb{T}).$$

Παρατηρουμε οτι η γραμμικη μορφη  $\nu$  είναι θετικη (δηλ  $\nu(g) \geq 0$  οταν  $g \geq 0$ ) ως κατα σημειο οριο των γραμμικων μορφων  $\mu_{s_{m_n}}$  που είναι θετικες.

Απο το θεωρημα αναπαραστασης του Riesz (!) [Rud87, Θεωρημα 2.14] υπαρχει ενα (μοναδικο) κανονικο θετικο μετρο Borel  $\mu$  στον  $\mathbb{T}$  ωστε

$$\nu(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g d\mu \quad \text{για καθε } g \in C(\mathbb{T})$$

οποτε

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g(e^{ix}) d\mu(e^{ix}) = \lim_n \mu_{s_{m_n}}(g) = \lim_n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{ix}) \text{Re}(\tilde{h}_{s_{m_n}}(e^{ix})) dx.$$

Εφαρμοζοντας την τελευταια σχεση στην  $g(z) = \frac{e^{it+z}}{e^{it}-z}$  βρισκουμε, για καθε  $z \in \mathbb{D}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{ix+z}}{e^{ix}-z} d\mu(e^{ix}) &= \lim_n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ix+z}}{e^{ix}-z} \text{Re}(\tilde{h}_{s_{k_n}}(e^{ix})) dx \\ &\stackrel{(**)}{=} \lim_n h_{s_{k_n}}(z) - i \text{Im}(h(0)) \\ &= \lim_n h(s_{k_n} z) - i \text{Im}(h(0)) = h(z) - i \text{Im}(h(0)) \end{aligned}$$

και το θεωρημα Herglotz αποδειχθηκε. □

**Παρατήρηση 7.** Στη δεση των εκθετικων  $f_k$  θα μπορούσε να χρησιμοποιηθει οποιοδηποτε αριθμησιμο συνολο που η γραμμικη του θηκη είναι  $\|\cdot\|_\infty$ -πυκνη στον  $C(\mathbb{T})$ : η μεθοδος αποδειξης που ακολουθησαμε λειτουργει σε οποιοδηποτε διαχωρισμο χωρο Banach.

Στη συγκεκριμενη περιπτωση οι συντελεστες  $\|f_k\|$  δεν χρειαζονται, αφου είναι ολοι ισοι με 1.

### Εργαλεία για την απόδειξη του Θεωρήματος 3

Παρατήρηση 8. Αν

$$S(z) = c \exp \left( -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{ix} + z}{e^{ix} - z} d\mu(e^{ix}) \right), \quad z \in \mathbb{D}$$

οπou  $c \in \mathbb{T}$  και  $\mu$  είναι θετικό πεπερασμένο μέτρο Borel στον  $\mathbb{T}$ , τότε

$$|S(re^{it})| = \exp \left( -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} P_r(t-x) d\mu(e^{ix}) \right).$$

Απόδειξη. Υπενθυμιζουμε ότι αν  $u = e^w$  τότε <sup>2</sup>  $|u| = e^{\operatorname{Re} w}$ . Συνεπώς, αφού  $|c| = 1$ , έχουμε

$$\begin{aligned} |S(re^{it})| &= \exp \left( -\operatorname{Re} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{ix} + re^{it}}{e^{ix} - re^{it}} d\mu(e^{ix}) \right) \right) \\ &= \exp \left( -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \operatorname{Re} \left( \frac{e^{ix} + re^{it}}{e^{ix} - re^{it}} \right) d\mu(e^{ix}) \right) \\ &= \exp \left( -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} P_r(t-x) d\mu(e^{ix}) \right) \quad (\text{απο την (1)}). \quad \square \end{aligned}$$

**Θεώρημα 9.** Αν  $\nu$  είναι θετικό πεπερασμένο μέτρο Borel στον κύκλο  $\mathbb{T}$ , τότε γράφεται

$$\nu = \nu_s + \nu_a$$

οπou

- $\nu_s \perp m$ , δηλαδή υπάρχει σύνολο Borel  $A \subseteq \mathbb{T}$  με  $m(A) = 0$  και  $\nu_s(A^c) = 0$  και
- το  $\nu_a$  είναι της μορφής

$$\nu_a(E) = \int_E \nu' dm,$$

για κάθε Borel  $E \subseteq \mathbb{T}$ , οπου  $\nu'$  είναι μετρήσιμη μη αρνητική συναρτησή στον κύκλο  $\mathbb{T}$ .

Απόδειξη. Η ισότητα  $\nu = \nu_s + \nu_a$  είναι η λεγόμενη «διασπασή Lebesgue» του μέτρου  $\nu$ . Η υπαρχή συναρτησης  $\nu'$  ώστε  $d\nu_a = \nu' dm$  είναι το Θεώρημα Radon-Nikodym. Μια απόδειξη και των δυο συγχρονως υπαρχει στο [Fol99, Θεωρημα 3.8].  $\square$

**Θεώρημα 10** (Θεωρημα Fatou). Αν  $\mu$  είναι θετικό πεπερασμένο μέτρο Borel στον  $\mathbb{T}$ , τότε υπαρχει  $m$ -σχεδον για κάθε  $e^{it} \in \mathbb{T}$  το οριο

$$\lim_{r \nearrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} P_r(t-x) d\mu(e^{ix})$$

και ισονται με  $\mu'(e^{it})$ . <sup>3</sup>

Απόδειξη. [Rud87, Θεωρημα 11.24].

Ερχομαστε τώρα στην απόδειξη του Θεωρήματος 3:

---

<sup>2</sup> $|u|^2 = \bar{u}u = e^{\bar{w}}e^w = e^{2\operatorname{Re} w}$ , αρα

<sup>3</sup>Σημειωσε ότι η συναρτησή  $P_r$  είναι  $2\pi$ -περιοδική, οποτε η  $P_r(t-x)$  στην πραγματικότητα εξαρταται απ το  $e^{i(t-x)}$ .

**Theorem.** Μια  $S : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  είναι ιδιόμορφη εσωτερική συναρτησh αν-ν είναι της μορφής

$$S(z) = c \exp \left( -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(e^{it}) \right), \quad z \in \mathbb{D}$$

οπου  $c \in \mathbb{T}$  και  $\mu$  είναι κανονικό θετικό μη μηδενικό μέτρο Borel στον  $\mathbb{T}$  που είναι ιδιόμορφη ως προς το μέτρο Lebesgue.

Απόδειξη. • Εστω

$$S(z) = c \exp \left( -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{ix} + z}{e^{ix} - z} d\mu(e^{ix}) \right), \quad z \in \mathbb{D}$$

οπου  $c \in \mathbb{T}$  και  $\mu$  είναι κανονικό θετικό μέτρο Borel στον  $\mathbb{T}$  που είναι ιδιόμορφη ως προς το μέτρο Lebesgue.

Να δείξουμε ότι η  $S$  είναι εσωτερική συναρτησh. Ξερούμε ήδη ότι η  $S$  είναι ολομορφή στον  $\mathbb{D}$  (Λήμμα 5).

Για κάθε  $z = re^{it} \in \mathbb{D}$  έχουμε

$$|S(re^{it})| = \exp \left( -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} P_r(t-x) d\mu(e^{ix}) \right).$$

απο την Παρατηρησh (8). Επειδή η  $P_r$  καθώς και το  $\mu$  παίρνουν μη αρνητικές τιμές, έπεται ότι

$$|S(re^{it})| \leq 1$$

αρα  $S \in H^\infty$  και  $\|S\|_\infty \leq 1$ .

Άλλα το μέτρο  $\mu$  είναι κάθετο στο μέτρο Lebesgue. Δηλαδή στη διασπασh  $\mu = \mu_s + \mu_a$ , το απολυτά συνεχές μέρος  $\mu_a$  είναι μηδεν, επομένως η παραγωγός Radon Nikodym  $\mu'$  μηδενίζεται  $m$ -σχεδόν παντού. Επομένως, απο το Θεώρημα Fatou έχουμε

$$\lim_{r \nearrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} P_r(t-x) d\mu(e^{ix}) = \mu'(e^{it}) = 0$$

$m$ -σχεδόν για κάθε  $e^{it} \in \mathbb{T}$ . Συνεπώς,  $m$ -σχεδόν για κάθε  $e^{it} \in \mathbb{T}$ , το όριο

$$\lim_{r \nearrow 1} |S(re^{it})| = \lim_{r \nearrow 1} \exp \left( -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} P_r(t-x) d\mu(e^{ix}) \right)$$

υπαρχει και ισουται με  $e^0 = 1$ . Ξερούμε όμως απο το Θεώρημα Fatou ότι  $\lim_{r \nearrow 1} S(re^{it}) = \tilde{S}(e^{it})$ ,  $m$ -σχεδόν παντού. Έχουμε λοιπόν  $|\tilde{S}(e^{it})| = 1$   $m$ -σχεδόν παντού, δηλαδή η  $S$  είναι εσωτερική συναρτησh.

Τέλος, η  $S$  είναι ιδιόμορφη, γιατί δεν είναι σταθερή (αφού  $\mu \neq 0$ ) και δεν έχει ρίζες στο  $\mathbb{D}$  (αφού είναι της μορφής  $S(z) = e^{g(z)}$ ).

• Για το αντιστρόφο, υποθετούμε ότι η  $S : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  είναι ιδιόμορφη εσωτερική συναρτησh. Εφόσον δεν μηδενίζεται πουθενά στον  $\mathbb{D}$ , υπαρχει μια ολομορφή συναρτησh  $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  ώστε

$$S(z) = e^{g(z)} \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{D}.$$

<sup>4</sup>Απόδειξη Η συναρτησh  $z \mapsto \frac{S'(z)}{S(z)}$  ορίζεται και είναι ολομορφή στο  $\mathbb{D}$ , το οποίο είναι ανοικτό και κυρτό σύνολο. Συνεπώς, απο το τοπικό θεώρημα Cauchy, η  $S'/S$  έχει παραγωγός: υπαρχει ολομορφή συναρτησh  $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  ώστε  $g'(z) = \frac{S'(z)}{S(z)}$ . Αν  $\phi := e^g$ , έχουμε  $\phi' = g'\phi = \frac{S'}{S}\phi$  και αρα  $(\frac{\phi}{S})' = 0$  στο ανοικτό και συνεκτικό σύνολο  $\mathbb{D}$ . Έπεται ότι η  $\frac{\phi}{S}$  είναι σταθερή στον  $\mathbb{D}$ , αρα  $\frac{\phi(z)}{S(z)} = \frac{\phi(0)}{S(0)}$  για κάθε  $z \in \mathbb{D}$ . Επιλέγοντας λοιπόν  $\phi(0) = S(0)$ , δηλ.  $e^{g(0)} = S(0)$  έχουμε  $e^{g(z)} = S(z)$  στον  $\mathbb{D}$  όπως θέλαμε.  $\square$

Τώρα, αφού η  $S$  είναι εσωτερική και μη σταθερή, έχουμε  $|S(z)| < 1$  για κάθε  $z \in \mathbb{D}$  οπότε

$$\operatorname{Re} g(z) < 0 \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{D}.$$

Επεται από το Θεώρημα του Herglotz (4) ότι υπάρχει θετικό κανονικό μέτρο Borel  $\mu$  στον  $\mathbb{T}$  ώστε

$$g(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(e^{it}) + i \operatorname{Im}(g(0)), \quad z \in \mathbb{D}$$

και συνεπώς

$$S(z) = c \exp\left(-\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(e^{it})\right)$$

όπου  $c := \exp(i \operatorname{Im}(g(0))) \in \mathbb{T}$ .

Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} |S(re^{it})| &= |\exp(g(re^{it}))| = \exp(\operatorname{Re} g(re^{it})) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(t-x) d\mu(e^{ix})\right) \end{aligned}$$

το οποίο, από το Θεώρημα Fatou, συγκλίνει στο  $\exp(-\mu'(e^{it}))$  καθώς  $r \nearrow 1$ ,  $m$ -σχεδόν για κάθε  $e^{it} \in \mathbb{T}$ . Δηλαδή

$$\lim_{r \nearrow 1} |S(re^{it})| = \exp(-\mu'(e^{it})) \quad m\text{-σχεδόν για κάθε } e^{it}$$

και αφού

$$|\tilde{S}(re^{it})| = \exp(-\mu'(e^{it}))$$

$m$ -σχεδόν παντού. Ομως  $|\tilde{S}(e^{it})| = 1$   $m$ -σχεδόν παντού, αφού η  $S$  είναι εσωτερική. Έχουμε λοιπόν

$$\exp(-\mu'(e^{it})) = 1 \quad \text{σ.π.}$$

οπότε, αφού  $\mu'(e^{it}) \in \mathbb{R}$ , επεται ότι  $\mu'(e^{it}) = 0$ ,  $m$ -σ.π. Δηλαδή στη διασπαση  $\mu = \mu_s + \mu_a$ , το απολυτα συνεχες μερος  $\mu_a$  είναι μηδεν, πραγμα που σημαίνει ότι το  $\mu = \mu_s$  είναι ιδιάζον, οπως θελαμε.  $\square$

## Αναφορές

[Fol99] Gerald B. Folland, *Real analysis*, second ed., Pure and Applied Mathematics (New York), John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999, Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication. MR 1681462

[Rud87] Walter Rudin, *Real and complex analysis*, third ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1987. MR 924157