Ιδιαζουσες Εσωτερικες Συναρτησεις (Singular inner functions)

Υπενθυμιση: Ο πυρηνας Poisson Για $r \in [0,1),\ t \in [0,2\pi]$,

$$\begin{aligned} P_r(t) &:= \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{int} = \sum_{n=-\infty}^{-1} r^{-n}e^{int} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{int} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{-ikt} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{int} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nt \end{aligned}$$

Γραφοντας $z = re^{it}$, εχουμε $|z| < 1$ και

$$\begin{aligned} P_r(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \bar{z}^k + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}} + \frac{1}{1-z} \\ &= \frac{\bar{z}(1-z) + (1-\bar{z})}{(1-\bar{z})(1-z)} = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2} \\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \end{aligned}$$

αρα $P_r(t) \geq 0$ και $P_0(t) = 1 = \|P_r\|_{L^1}$. Επισης

$$P_r(t-s) = \mathrm{Re}\left(\frac{1+re^{i(t-s)}}{1-re^{i(t-s)}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{is}+re^{it}}{e^{is}-re^{it}}\right). \tag{1}$$

Ιδιαζουσες Εσωτερικες Συναρτησεις

Ορισμός 1. *Μια εσωτερικη συναρτηση $\phi \in H^\infty$ λεγεται* ιδιαζουσα εσωτερικη συναρτηση (singular inner function) *αν δεν ειναι σταθερη και δεν εχει ριζες στον $\mathbb{D}$.*

Παράδειγμα 1. $\phi(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right), \quad z \in \mathbb{D}$.

Παράδειγμα 2. $\phi(z) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{z+e^{i\theta_k}}{z-e^{i\theta_k}}\right), \quad z \in \mathbb{D}$ *οπου $a_k > 0$ και $\theta_k \in [0,2\pi]$.*

Θεώρημα 3. *Μια $S : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ ειναι ιδιαζουσα εσωτερικη συναρτηση αν-ν ειναι της μορφης*

$$S(z) = c\exp\left(-\int_{\mathbb{T}} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, d\mu(e^{it})\right), \quad z \in \mathbb{D}$$

οπου $c \in \mathbb{T}$ και μ ειναι κανονικο θετικο μη μηδενικο μετρο Borel στον $\mathbb{T}$ που ειναι καθετο ή ιδιαζον *ως προς το μετρο Lebesgue.*

(Ενα θετικο μετρο Borel στον $\mathbb{T}$ λεγεται *καθετο ή ιδιαζον* ως προς το μετρο Lebesgue m αν ειναι συγκεντρωμενο σε ενα m-μηδενικο συνολο $A \subseteq \mathbb{T}$, αν δηλαδη $\mu(A^c) = 0$ και $m(A) = 0$.)

Για την αποδειξη, θα χρειασθει το ακολουθο Θεωρημα αναπαραστασης:

Θεώρημα 4 (Herglotz). *Εστω $h : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ ολομορφη ωστε $\operatorname{Re} h(z) > 0$ για καθε $z \in \mathbb{D}$. Τοτε υπαρχει κανονικο θετικο μετρο Borel μ στον $\mathbb{T}$ ωστε*

$$h(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\, d\mu(e^{it}) + i\, \operatorname{Im}(h(0)), \quad z \in \mathbb{D}\,.$$

Λήμμα 5. *Εστω μ κανονικο θετικο μετρο Borel στον $\mathbb{T}$. Οριζουμε*

$$F(z) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\, d\mu(e^{it}) \quad z \in \mathbb{D}\,.$$

Τοτε η F ειναι ολομορφη στο $\mathbb{D}$.

Απόδειξη. Η συναρτηση $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$ ειναι (προφανως) ολομορφη στο $\mathbb{D}$, επομενως αναπτυσσεται σε δυναμοσειρα $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ που συγκλινει ομοιομορφα στα συμπαγη υποσυνολα του $\mathbb{D}$. Συνεπως η δυναμοσειρα για την $f(e^{-it}z) = \frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z} = \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}$ συγκλινει ομοιομορφα ως προς $t \in [0, 2\pi]$ για καθε $z \in \mathbb{D}$ (το συνολο $\{e^{-it}z : t \in [0, 2\pi]\}$ ειναι συμπαγες υποσυνολο του $\mathbb{D}$). Επομενως

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(e^{-it}z) d\mu(e^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-int} z^n d\mu(e^{it}) \\ &\overset{(u)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{2\pi} \int e^{-int} d\mu(e^{it}) \right) z^n \quad z \in \mathbb{D} \end{aligned}$$

(η ισοτητα (u) επεται απο την ομοιομορφη συγκλιση της σειρας). Δηλαδη η F αναπτυσσεται σε δυναμοσειρα στο $\mathbb{D}$, αρα ειναι ολομορφη. ☐

Αποδειξη του Θεωρηματος Herglotz

Βημα 1. Θετω $h_s(z) = h(sz)$, οπου $s \in (0, 1)$. Η h_s ειναι ολομορφη στον ανοικτο δισκο με ακτινα $1/s$, που ειναι μια ανοικτη περιοχη του κλειστου δισκου $\overline{\mathbb{D}}$. Συνεπως ισχυει οτι $h_s \in H^2$, οποτε ο τυπος του Poisson δινει:

$$h_s(re^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{h}_s(e^{ix}) P_r(t - x) dx, \quad re^{it} \in \mathbb{D}.$$

$$\text{Θετω} \quad F(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ix} + z}{e^{ix} - z} \operatorname{Re}(\tilde{h}_s(e^{ix}))\, dx \quad : \text{ειναι ολομορφη στο } \mathbb{D} \text{ (λημμα 5).}$$

$$\begin{aligned} \text{Εχω} \quad \operatorname{Re}(F(z)) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(t - x) \operatorname{Re}(\tilde{h}_s(e^{ix})) dx \quad \text{(απο την (1))} \\ &= \operatorname{Re}(h_s(z)) \end{aligned}$$

οποτε η συναρτηση $h_s(z) - F(z)$ εχει πραγματικο μερος $= 0$ στο ανοικτο και συνεκτικο συνολο $\mathbb{D}$, αρα ειναι σταθερη [1]:

$$h_s(z) - F(z) = h_s(0) - F(0) \overset{(*)}{=} i\, \operatorname{Im}(h_s(0)) - 0 = i\, \operatorname{Im}(h(0))$$

[1] αν $G = h_s - F$, το οριο $\lim_{k \to 0} \frac{G(z+k) - G(z)}{k}$ ειναι μηδεν, γιατι ειναι φανταστικος αριθμος οταν $k \to 0$ στον πραγματικο αξονα ενω ειναι πραγματικος αριθμος οταν $k \to 0$ στον φανταστικο αξονα

(η (*) ισχυει γιατι $F(0) \in \mathbb{R}$).

Έχουμε λοιπον, για καθε $z \in \mathbb{D}$,

$$h_s(z) = F(z) + i\,\mathrm{Im}(h(0)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{ix}+z}{e^{ix}-z}\,\mathrm{Re}(\tilde{h}_s(e^{ix}))\,dx + i\,\mathrm{Im}(h(0)). \tag{**}$$

Τωρα: να στειλω $s \nearrow 1$ και να δειξω οτι $\mathrm{Re}(\tilde{h}_s(e^{ix}))\,dx \to d\mu(e^{ix})$ για καποιο μετρο μ, με την καταλληλη «ασθενη» εννοια συγκλισης.

Βημα 2. [Συντομη προσεγγιση] Για καθε $s \in [0,1)$, θεωρουμε το μετρο

$$\mu_s(\mathrm{E}) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{E}} \mathrm{Re}(\tilde{h}_s(e^{ix}))\,dx, \qquad E \subseteq [0,2\pi] \text{ Borel}$$

(ειναι θετικο μετρο, γιατι απο τη υποθεση εχουμε $\mathrm{Re}(\tilde{h}_s(e^{ix})) > 0$ για καθε x.)

Αν το οριο $\lim_{s\nearrow 1} \mathrm{Re}(\tilde{h}_s(e^{ix}))$ υπηρχε στη νορμα του $L^1(\mathbb{T})$ θα οριζε μια συναρτηση $k \in L^1(\mathbb{T})$ και θα ειχαμε, για καθε $g \in C(\mathbb{T})$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(e^{ix})k(e^{ix}))\,dx = \lim_{r\nearrow 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(e^{ix})\,\mathrm{Re}(\tilde{h}_s(e^{ix}))\,dx$$

(οπότε, θετοντας $g(z) = \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}$, θα καταληγαμε στην ζητουμενη αναπαρασταση της h - δες πιο κατω).

Ομως το μονο που μπορουμε να βεβαιωσουμε για τις συναρτησεις $\mathrm{Re}(\tilde{h}_s(e^{ix}))$ ειναι οτι οι νορμες τους στον $L^1(\mathbb{T})$ ειναι ομοιομορφα φραγμενες. Πραγματι, αφου οπως ειδαμε η h_s ειναι ολομορφη σε μια περιοχη του $\mathbb{D}$, εφαρμοζεται ο ολοκληρωτικος τυπος του Cauchy (ή ο τυπος μεσης τιμης του Gauss) και εχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{h}_s(e^{ix})\,dx = h_s(0) = h(s0) = h(0)$$

για καθε s, και συνεπως

$$\|\mathrm{Re}(\tilde{h}_s)\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}(\tilde{h}_s(e^{ix}))\,dx = \mathrm{Re}(h(0)) \quad \text{για καθε } s \in (0,1). \tag{*}$$

Αυτο σημαινει οτι τα αντιστοιχα μετρα μ_s ειναι ομοιομορφα φραγμενα στον χωρο $M(\mathbb{T})$ των κανονικων (μιγαδικων) μετρων Borel στον κυκλο $\mathbb{T}$. Ειναι ομως γνωστο (!) οτι τα φραγμενα συνολα στον χωρο $M(\mathbb{T})$ ειναι σχετικα συμπαγη στην «ασθενη-* τοπολογια». Υπαρχει λοιπον ενα κανονικο μετρο Borel μ στον $\mathbb{T}$ με την ιδιοτητα να υπαρχει ακολουθια [2] (s_n) του $[0,1)$ με $s_n \nearrow 1$ ωστε

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(e^{ix})d\mu(x) = \lim_{s\nearrow 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(e^{ix})\,\mathrm{Re}(\tilde{h}_s(e^{ix}))\,dx$$

για καθε $g \in C(\mathbb{T})$.

[2] η ασθενης-* τοπολογια ειναι μετρικοποιησιμη, επειδη ο χωρος $C(\mathbb{T})$ ειναι διαχωρισιμος

Εφαρμοζοντας την τελευταια σχεση στην $g(z) = \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}$ βρισκουμε, για καθε $z \in \mathbb{D}$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{e^{ix}+z}{e^{ix}-z} d\mu(x) &= \lim_n \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{ix}+z}{e^{ix}-z}\,\mathrm{Re}(\tilde{h}_{s_{k_n}}(e^{ix}))\,dx \\
&\overset{(**)}{=} \lim_n h_{s_{k_n}}(z) - i\,\mathrm{Im}(h(0)) \\
&= \lim_n h(s_{k_n} z) - i\,\mathrm{Im}(h(0)) = h(z) - i\,\mathrm{Im}(h(0))
\end{aligned}$$

και το θεωρημα Herglotz αποδειχθηκε. □

Βημα 2. [Δευτερη, στοιχειωδης προσεγγιση] Για καθε $s \in [0,1)$, οριζω τη γραμμικη μορφη

$$\mu_s : C(\mathbb{T}) \to \mathbb{C} : g \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(e^{ix})\,\mathrm{Re}(\tilde{h}_s(e^{ix}))\,dx$$

που ειναι *θετικη* (δηλ. στελνει μη αρνητικες συναρτησεις σε μη αρνητικους αριθμους, αφου $\mathrm{Re}(\tilde{h}_s(e^{ix})) > 0$ για καθε x) και συνεχης στον $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$, αφου

$$\begin{aligned}
|\mu_s(g)| &\le \|g\|_\infty \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}(\tilde{h}_s(e^{ix}))\,dx \\
\text{αρα} \quad \|\mu_s\| &\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}(\tilde{h}_s(e^{ix}))\,dx\,.
\end{aligned}$$

Ειδαμε οτι η h_s ειναι ολομορφη σε μια περιοχη του $\mathbb{D}$, οπότε εφαρμοζεται ο ολοκληρωτικος τυπος του Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{h}_s(e^{ix})\,dx = h_s(0) = h(s0) = h(0)$$

και συνεπως

$$\|\mu_s\| \le 2\pi\,\mathrm{Re}(h(0)) \quad \text{για καθε } s \in (0,1). \tag{*}$$

Μπορουμε τωρα να χρησιμιποιησουμε το ακολουθο επιχειρημα συμπαγειας:

Πρόταση 6. *Για καθε ακολουθια $s_n \nearrow 1$, η $\{\mu_{s_n}\}$ εχει μια υπακολουθια $\{\mu_{s_{k_n}}\}$ που ειναι «w*-συγκλινουσα», δηλαδη υπαρχει μια συνεχης θετικη γραμμικη μορφη $\nu : C(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ ωστε $\lim_n \mu_{s_{k_n}}(g) = \nu(g)$ για καθε $g \in C(\mathbb{T})$.*[3]

Απόδειξη. Υπενθυμιζουμε οτι το αριθμησιμο συνολο $\{f_k : k \in \mathbb{Z}\} \subseteq C(\mathbb{T})$ (οπου $f_k(e^{it}) = e^{ikt}$) εχει γραμμικη θηκη (τα τριγωνομετρικα πολυωνυμα) $\|\cdot\|_\infty$-πυκνη στον $C(\mathbb{T})$. Καθε μ_s ικανοποιει

$$|\mu_s(f_k)| \le \lambda \|f_k\|_\infty$$

[3] Το συμπερασμα επεται αμεσως, αν χρησιμοποιησουμε το Θεωρημα Αλαογλου-Bourbaki για την ασθενη-* συμπαγεια της μπαλας του δυικου του χωρου Banach $C(\mathbb{T})$ (η οποια μπαλα ειναι ασθενως-* μετρικοποιησιμη, αφου ο $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$ ειναι διαχωρισιμος), καθως η οικογενεια $\{\mu_s : s \in (0,1)\}$ ειναι ομοιομορφα φραγμενη, αρα εχει σημεια συσσωρευσης στην ασθενη-* τοπολογια. Δινουμε μια αυτοδυναμη αποδειξη.

(οπου $\lambda = 2\pi\,\mathrm{Re}(h(0))$ και συνεπως, γραφοντας $x_s(k) := \mu_s(f_k)$,

$$x_s := (x_s(k))_k \in \prod_{k\in\mathbb{Z}} \overline{\mathbb{D}(0,\lambda\|f_k\|)}\,.$$

Το $X := \prod_{k\in\mathbb{Z}} \overline{\mathbb{D}(0,\lambda\|f_k\|)}$ ειναι αριθμησιμο γινομενο συμπαγων δισκων, αρα ειναι συμπαγης μετρικος χωρος! Επομενως, για καθε ακολουθια (s_n) του $[0,1)$ με $s_n \nearrow 1$, η αντιστοιχη ακολουθια (x_n) του X οπου $x_n := (x_{s_n}(k))_k$ εχει συγκλινουσα υπακολουθια (x_{m_n}): υπαρχει $x \in X$ ωστε $\lim_n x_{m_n} = x$, δηλαδη $\lim_n x_{s_{m_n}}(k) = x(k)$ για καθε $k \in \mathbb{Z}$.

Τωρα, η απεικονιση $f_k \mapsto x(k)$ οριζει μια γραμμικη απεικονιση

$$\mu_\infty : \mathrm{span}\{f_k : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{C} : \sum_k c_k f_k \mapsto \sum_k c_k x(k)$$

και, εφοσον καθε μ_s ικανοποιει την $|\mu_s(\sum_k c_k f_k)| \le \lambda \left\|\sum_k c_k f_k\right\|_\infty$ (απο την (*)), το οριο επισης θα την ικανοποιει: $|\mu_\infty(\sum_k c_k f_k)| \le \lambda \left\|\sum_k c_k f_k\right\|_\infty$. Δηλαδη η μ_∞ ειναι συνεχης γραμμικη μορφη ορισμενη στον πυκνο υποχωρο $\mathrm{span}\{f_k : k \in \mathbb{Z}\}$ του $C(\mathbb{T})$.

Επομενως η μ_∞ επεκτεινεται (λογω συνεχειας) σε συνεχη γραμμικη μορφη $\nu : C(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ με $\|\nu\| \le \lambda$ που ικανοποιει $\nu(f_k) = x(k) = \lim_n \mu_{s_{m_n}}(f_k)$ για καθε $k \in \mathbb{Z}$ και συνεπως (απο γραμμικοτητα και συνεχεια)

$$\nu(g) = \lim_n \mu_{s_{m_n}}(g) \quad \text{για καθε } g \in C(\mathbb{T}).$$

Παρατηρουμε οτι η γραμμικη μορφη ν ειναι *θετικη* (δηλ $\nu(g) \ge 0$ οταν $g \ge 0$) ως κατα σημειο οριο των γραμμικων μορφων $\mu_{s_{m_n}}$ που ειναι θετικες.

Απο το *θεωρημα αναπαραστασης του Riesz* (!) [Rud87, Θεωρημα 2.14] υπαρχει ενα (μοναδικο) κανονικο θετικο μετρο Borel μ στον $\mathbb{T}$ ωστε

$$\nu(g) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} g d\mu \quad \text{για καθε } \; g \in C(\mathbb{T})$$

οποτε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} g(e^{ix}) d\mu(e^{ix}) = \lim_n \mu_{s_{m_n}}(g) = \lim_n \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(e^{ix})\,\mathrm{Re}(\tilde{h}_{s_{m_n}}(e^{ix}))\,dx\,.$$

Εφαρμοζοντας την τελευταια σχεση στην $g(z) = \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}$ βρισκουμε, για καθε $z \in \mathbb{D}$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{e^{ix}+z}{e^{ix}-z} d\mu(e^{ix}) &= \lim_n \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{ix}+z}{e^{ix}-z}\,\mathrm{Re}(\tilde{h}_{s_{k_n}}(e^{ix}))\,dx \\ &\overset{(**)}{=} \lim_n h_{s_{k_n}}(z) - i\,\mathrm{Im}(h(0)) \\ &= \lim_n h(s_{k_n} z) - i\,\mathrm{Im}(h(0)) = h(z) - i\,\mathrm{Im}(h(0))\end{aligned}$$

και το θεωρημα Herglotz αποδειχθηκε. □

Παρατήρηση 7. *Στη θεση των εκθετικων f_k θα μπορουσε να χρησιμοποιηθει οποιοδηποτε αριθμησιμο συνολο που η γραμμικη του θηκη ειναι $\|\cdot\|_\infty$-πυκνη στον $C(\mathbb{T})$: η μεθοδος αποδειξης που ακολουθησαμε λειτουργει σε οποιονδηποτε διαχωρισιμο χωρο Banach.*
Στη συγκεκριμενη περιπτωση οι συντελεστες $\|f_k\|$ δεν χρειαζονται, αφου ειναι ολοι ισοι με 1.

Εργαλεια για την αποδειξη του Θεωρηματος 3

Παρατήρηση 8. *Αν*

$$S(z) = c\exp\left(-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{e^{ix}+z}{e^{ix}-z}\, d\mu(e^{ix})\right), \quad z \in \mathbb{D}$$

οπου $c \in \mathbb{T}$ και μ ειναι θετικο πεπερασμενο μετρο Borel στον $\mathbb{T}$, τοτε

$$|S(re^{it})| = \exp\left(-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} P_r(t-x)d\mu(e^{ix})\right).$$

Απόδειξη. Υπενθυμιζουμε οτι αν $u = e^w$ τοτε [4] $|u| = e^{\operatorname{Re} w}$. Συνεπως, αφου $|c| = 1$, εχουμε

$$\begin{aligned}|S(re^{it})| &= \exp\left(-\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{e^{ix}+re^{it}}{e^{ix}-re^{it}}\, d\mu(e^{ix})\right)\right)\\ &= \exp\left(-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \operatorname{Re}\left(\frac{e^{ix}+re^{it}}{e^{ix}-re^{it}}\right) d\mu(e^{ix})\right)\\ &= \exp\left(-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} P_r(t-x)\, d\mu(e^{ix})\right) \quad \text{(απο την (1)).}\end{aligned}$$ □

Θεώρημα 9. *Αν ν ειναι θετικο πεπερασμενο μετρο Borel στον κυκλο $\mathbb{T}$, τοτε γραφεται*

$$\nu = \nu_s + \nu_a$$

οπου

- *$\nu_s \perp m$, δηλαδη υπαρχει συνολο Borel $A \subseteq \mathbb{T}$ με $m(A) = 0$ και $\nu_s(A^c) = 0$ και*
- *το ν_a ειναι της μορφης*

$$\nu_a(E) = \int_E \nu' dm,$$

για καθε Borel $E \subseteq \mathbb{T}$, οπου ν' ειναι μετρησιμη μη αρνητικη συναρτηση στον κυκλο $\mathbb{T}$.

Απόδειξη. Η ισοτητα $\nu = \nu_s + \nu_a$ ειναι η λεγομενη «διασπαση Lebesgue» του μετρου ν. Η υπαρξη συναρτησης ν' ωστε $d\nu_a = \nu' dm$ ειναι το Θεωρημα Radon-Nikodym. Μια αποδειξη και των δυο συγχρονως υπαρχει στο [Fol99, Θεωρημα 3.8]. □

Θεώρημα 10 (Θεωρημα Fatou). *Αν μ ειναι θετικο πεπερασμενο μετρο Borel στον $\mathbb{T}$, τοτε υπαρχει m-σχεδον για καθε $e^{it} \in \mathbb{T}$ το οριο*

$$\lim_{r\nearrow 1} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} P_r(t-x)d\mu(e^{ix})$$

και ισουται με $\mu'(e^{it})$. [5]

Απόδειξη. [Rud87, Θεωρημα 11.24].

Ερχομαστε τωρα στην αποδειξη του Θεωρηματος 3:

[4] $|u|^2 = \bar{u}u = e^{\bar{w}}e^w = e^{2\operatorname{Re} w}$, αρα

[5] Σημειωσε οτι η συναρτηση P_r ειναι 2π-περιοδικη, οποτε η $P_r(t-x)$ στην πραγματικοτητα εξαρταται απ το $e^{i(t-x)}$.

Theorem. *Μια $S : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ ειναι ιδιαζουσα εσωτερικη συναρτηση αν-ν ειναι της μορφης*

$$S(z) = c \exp\left(-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, d\mu(e^{it})\right), \quad z \in \mathbb{D}$$

οπου $c \in \mathbb{T}$ και μ ειναι κανονικο θετικο μη μηδενικο μετρο Borel στον $\mathbb{T}$ που ειναι ιδιαζον ως προς το μετρο Lebesgue.

Απόδειξη. • Εστω

$$S(z) = c \exp\left(-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{e^{ix}+z}{e^{ix}-z}\, d\mu(e^{ix})\right), \quad z \in \mathbb{D}$$

οπου $c \in \mathbb{T}$ και μ ειναι κανονικο θετικο μετρο Borel στον $\mathbb{T}$ που ειναι ιδιαζον ως προς το μετρο Lebesgue.

Να δειξουμε οτι η S ειναι εσωτερικη συναρτηση. Ξερουμε ηδη οτι η S ειναι ολομορφη στον $\mathbb{D}$ (Λημμα 5).

Για καθε $z = re^{it} \in \mathbb{D}$ εχουμε

$$|S(re^{it})| = \exp\left(-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} P_r(t-x)d\mu(e^{ix})\right).$$

απο την Παρατηρηση (8). Επειδη η P_r καθως και το μ παιρνουν μη αρνητικες τιμες, επεται οτι

$$|S(re^{it})| \leq 1$$

αρα $S \in H^\infty$ και $\|S\|_\infty \leq 1$. Συνεπως οριζεται η συνοριακη συναρτηση και ικανοποιει $|\tilde{S}(e^{it})| \leq 1$, m-σχεδον παντου.

Ομως: Δεν ειναι παντα αληθεια οτι $|\tilde{S}(e^{it})| \leq 1$, m-σχεδον παντου. Αν για παραδειγμα το μετρο μ ηταν το μετρο Lebesgue, τοτε θα ειχαμε $\int_{\mathbb{T}} P_r(t-x)d\mu(e^{ix}) = 2\pi$ αρα $|S(re^{it})| = \frac{1}{e}$ για καθε r και καθε t, οπότε $|\tilde{S}(e^{it})| = \frac{1}{e}$ m-σχεδον για καθε t.

Αλλα το μετρο μ ειναι καθετο στο μετρο Lebesgue. Δηλαδη στη διασπαση $\mu = \mu_s + \mu_a$, το απολυτα συνεχες μερος μ_a ειναι μηδεν, επομενως η παραγωγος Radon Nikodym μ' μηδενιζεται m-σχεδον παντου. Επομενως, απο το Θεωρημα Fatou έχουμε

$$\lim_{r\nearrow 1} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} P_r(t-x)d\mu(e^{ix}) = \mu'(e^{it}) = 0$$

m-σχεδον για καθε $e^{it} \in \mathbb{T}$. Συνεπως, m-σχεδον για καθε $e^{it} \in \mathbb{T}$, το οριο

$$\lim_{r\nearrow 1} |S(re^{it})| = \lim_{r\nearrow 1} \exp\left(-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} P_r(t-x)d\mu(e^{ix})\right)$$

υπαρχει και ισουται με $e^0 = 1$. Ξερουμε ομως οτι $\lim_{r\nearrow 1} S(re^{it}) = \tilde{S}(e^{it})$, m-σχεδον παντου. Εχουμε λοιπον $|\tilde{S}(e^{it})| = 1$ m-σχεδον παντου, δηλαδη η S ειναι εσωτερικη συναρτηση.

Τελος, η S ειναι ιδιαζουσα, γιατι δεν ειναι σταθερη (αφου $\mu \neq 0$) και δεν εχει ριζες στο $\mathbb{D}$ (αφου ειναι της μορφης $S(z) = e^{g(z)}$).

• Για το αντιστροφο, υποθετουμε οτι η $S : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ ειναι ιδιαζουσα εσωτερικη συναρτηση. Εφοσον δεν μηδενιζεται πουθενα στον $\mathbb{D}$, υπαρχει μια ολομορφη συναρτηση $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ ωστε

$$S(z) = e^{g(z)} \qquad \text{για καθε } \; z \in \mathbb{D}\,.$$[6]

Τωρα, αφου η S ειναι εσωτερικη και μη σταθερη, εχουμε $|S(z)| < 1$ για καθε $z \in \mathbb{D}$ οποτε

$$\operatorname{Re} g(z) < 0 \qquad \text{για καθε } z \in \mathbb{D}\,.$$

Επεται απο το Θεωρημα του Herglotz (4) οτι υπαρχει θετικο κανονικο μετρο Borel μ στον $\mathbb{T}$ ωστε

$$g(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\, d\mu(e^{it}) + i \operatorname{Im}(g(0)), \quad z \in \mathbb{D}$$

και συνεπως

$$S(z) = c \exp\left(-\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\, d\mu(e^{it})\right)$$

οπου $c := \exp(i \operatorname{Im}(g(0))) \in \mathbb{T}$.

Εχουμε λοιπον

$$\begin{aligned} |S(re^{it})| &= |\exp(g(re^{it}))| = \exp(\operatorname{Re} g(re^{it})) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(t-x) d\mu(e^{ix})\right) \end{aligned}$$

το οποιο, απο το Θεωρημα Fatou, συγκλινει στο $\exp(-\mu'(e^{it}))$ καθως $r \nearrow 1$, m-σχεδον για καθε $e^{it} \in \mathbb{T}$. Δηλαδη

$$\lim_{r \nearrow 1} |S(re^{it})| = \exp(-\mu'(e^{it})) \quad m\text{-σχεδον για καθε } \; e^{it}$$

και αρα

$$|\tilde{S}(re^{it})| = \exp(-\mu'(e^{it}))$$

m-σχεδον παντου. Ομως $|\tilde{S}(e^{it})| = 1$ m-σχεδον παντου, αφου η S ειναι εσωτερικη. Εχουμε λοιπον

$$\exp(-\mu'(e^{it})) = 1 \;\; m\text{-σ.π.}$$

οποτε, αφου $\mu'(e^{it}) \in \mathbb{R}$, επεται οτι $\mu'(e^{it}) = 0$, m-σ.π. Δηλαδη στη διασπαση $\mu = \mu_s + \mu_a$, το απολυτα συνεχες μερος μ_a ειναι μηδεν, πραγμα που σημαινει οτι το $\mu = \mu_s$ ειναι ιδιαζον, οπως θελαμε. $\square$

---

[6] *Αποδειξη* Η συναρτηση $z \mapsto \frac{S'(z)}{S(z)}$ οριζεται και ειναι ολομορφη στο $\mathbb{D}$, το οποιο ειναι ανοικτο και κυρτο συνολο. Συνεπως, απο το τοπικο θεωρημα Cauchy, η S'/S εχει παραγουσα: υπαρχει ολομορφη συναρτηση $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ ωστε $g'(z) = \frac{S'(z)}{S(z)}$. Αν $\phi := e^g$, εχουμε $\phi' = g'\phi = \frac{S'}{S}\phi$ και αρα $\left(\frac{\phi}{S}\right)' = 0$ στο ανοικτο και συνεκτικο συνολο $\mathbb{D}$. Επεται οτι η $\frac{\phi}{S}$ ειναι σταθερη στον $\mathbb{D}$, αρα $\frac{\phi(z)}{S(z)} = \frac{\phi(0)}{S(0)}$ για καθε $z \in \mathbb{D}$. Επιλεγοντας λοιπον $\phi(0) = S(0)$, εχουμε $\phi = S$, δηλαδη $e^{g(z)} = S(z)$ στον $\mathbb{D}$ οπως θελαμε. $\square$

Αναφορές

[Fol99] Gerald B. Folland, *Real analysis*, second ed., Pure and Applied Mathematics (New York), John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999, Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication. MR 1681462

[Rud87] Walter Rudin, *Real and complex analysis*, third ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1987. MR 924157