Ο χωρος Hilbert του Hardy
και οι τελεστες του

https://eclass.uoa.gr/courses/MATH797/

Χειμερινό Εξάμηνο 2024

Βιβλιογραφια I

- Rubén A. Martínez-Avendaño and Peter Rosenthal.
  An introduction to operators on the Hardy-Hilbert space, volume 237 of *Graduate Texts in Mathematics*.
  Springer, New York, 2007.
- Vern I. Paulsen and Mrinal Raghupathi.
  An introduction to the theory of reproducing kernel Hilbert spaces, volume 152 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*.
  Cambridge University Press, Cambridge, 2016.
- Nikolai K. Nikolski.
  Operators, functions, and systems: an easy reading. Vol. 1, volume 92 of *Mathematical Surveys and Monographs*.
  American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
  Hardy, Hankel, and Toeplitz, Translated from the French by Andreas Hartmann.

Βιβλιογραφια II

- Kenneth Hoffman.
  Banach spaces of analytic functions.
  Reprint of the 1962 original.
  Dover Publications, Inc., New York, 1988.
- William Arveson.
  A short course on spectral theory.
  Graduate Texts in Mathematics, vol. 209,
  Springer-Verlag, New York, 2002.

Πρελουδιο: Η εκθετικη συναρτηση

1. Για κάθε $z \in \mathbb{C}$, οριζουμε

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Η σειρα συγκλινει απολυτα για καθε $z \in \mathbb{C}$ και ομοιομορφα σε καθε φραγμενο υποσυνολο του $\mathbb{C}$. Συνεπως η συναρτηση $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ειναι συνεχης.

2. Αποδεικνυεται απο την απολυτη συγκλιση της σειρας οτι

$$\exp(a)\exp(b) = \exp(a+b) \qquad \forall a, b \in \mathbb{C}.$$

Οριζουμε $e := \exp(1)$.
Εχουμε $e^x = \exp(x)$ για καθε $x \in \mathbb{R}$.

3. Η *μιγαδικη παραγωγος*

$$\exp'(z) := \lim_{h \to 0} \frac{\exp(z+h) - \exp(z)}{h}$$

υπάρχει για καθε $z \in \mathbb{C}$ και ισουται με $\exp(z)$.

Η εκθετικη συναρτηση

4. Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ εχουμε $\exp(z)\exp(-z) = 1$ αρα $\exp(z) \neq 0$.

5. Ο περιορισμος της exp στην ευθεια $\mathbb{R}$ ειναι γνησιως αυξουσα συνάρτηση που απεικονιζει το $\mathbb{R}$ ομοιομορφικα επι του $\mathbb{R}_+$.

6. Για καθε $t \in \mathbb{R}$ εχουμε $|e^{it}| = 1$ δηλαδη $e^{it} \in \mathbb{T}$. Οριζουμε

$$\cos t := \mathrm{Re}(e^{it}), \qquad \sin t := \mathrm{Im}(e^{it}) \quad (t \in \mathbb{R})$$

αρα

$$e^{it} = \cos t + \iota \sin t \quad (t \in \mathbb{R}).$$

και επεται οτι οι cos και sin είναι παραγωγισιμες συναρτησεις $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$\cos' t = -\sin t, \qquad \sin' t = \cos t.$$

Η εκθετικη συναρτηση

7. Υπαρχει θετικος αριθμος π ωστε $e^{i\pi/2} = i$
και $e^z = 1$ αν-ν $\frac{z}{2\pi i} \in \mathbb{Z}$.

8. Η exp ειναι περιοδικη συναρτηση με περιοδο $2\pi i$.

9. Η $y \to e^{iy}$ απεικονιζει το $\mathbb{R}$ επι του $\mathbb{T}$:
για καθε $w \in \mathbb{T}$ υπαρχει $y \in \mathbb{R}$ ώστε $e^{iy} = w$.

10 Η exp απεικονιζει το $\mathbb{C}$ επι του $\mathbb{C} \backslash \{0\}$:
για καθε $w \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ υπαρχει $z \in \mathbb{C}$ ώστε $e^z = w$.

Ο Χωρος H^2 του Hardy

Αν $a_n \in \mathbb{C}$ και $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ τοτε για καθε $r \in (0,1)$ εχουμε $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty$ συνεπως η δυναμοσειρα $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ συγκλινει απολυτα για καθε $z \in \mathbb{D}$ και ομοιομορφα σε καθε δισκο ακτινας $r < 1$, αρα οριζει συναρτηση $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ που μαλιστα εχει μιγαδικη παραγωγο (και καθε ταξης), ειναι δηλαδη ολομορφη στον ανοικτο δισκο $\mathbb{D}$.

Ορισμός

$$H^2 := \left\{ f : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{με} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}$$

Η $(a_n) \mapsto f : \ell^2(\mathbb{Z}_+) \to H^2$ ειναι γραμμικος ισομορφισμος. [1] Αρα, με το εσωτερικο γινομενο $\langle f, g \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{b}_n$, οπου $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ (και νορμα $\|f\| := \langle f, f \rangle^{1/2}$), ο H^2 ειναι χωρος Hilbert.

[1] Εξπλεϊν Χουαϊ!

Υπενθυμιση: Χώροι Hilbert

Ορισμός

Έστω E ένας $\mathbb{K}$-γραμμικός χώρος ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$). Ένα εσωτερικό γινόμενο (inner product ή scalar product) στον E είναι μια απεικόνιση

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{K}$$

τέτοια ώστε

$$\begin{array}{ll}
(i) & \langle x_1 + \lambda x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \lambda \langle x_2, y \rangle \\
(ii) & \overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle \\
(iii) & \langle x, x \rangle \geq 0 \\
(iv) & \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0
\end{array}$$

για κάθε $x, x_1, x_2, y \in E$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.

Η $\|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2}$ ειναι νορμα στον E, αρα η $d(x, y) := \|x - y\|$ ειναι μετρικη. Ο E λεγεται χώρος Hilbert αν ο (E, d) ειναι πληρης μετρικος χωρος.

Υπενθυμιση: Χώροι Hilbert II

Θεώρημα (Ορθογώνια διάσπαση)

Αν M είναι κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H, τότε

$$M \oplus M^{\perp} = H.$$

όπου $M^{\perp} = \{x \in H : \langle x, y \rangle = 0 \text{ για κάθε } y \in M\}$.
Δηλαδή $\forall y \in H$ γράφεται μοναδικά $y = y_M + y_{\perp}$ όπου
$y_M \in M$, $y_{\perp} \in M^{\perp}$.

Πυθαγόρειο: $\|y\|^2 = \|y_M\|^2 + \|y_{\perp}\|^2 \quad \forall y \in H.$

Πόρισμα (Ορθή προβολή)

Έστω M κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H. Η απεικόνιση

$$P_M : H \to H \; : y \to y_M$$

είναι γραμμική και συνεχής.

Ο δυϊκός ενός χώρου Hilbert

Θεώρημα (Riesz)

Έστω H χώρος Hilbert. Για κάθε γραμμική και συνεχή $f : H \to \mathbb{K}$ υπάρχει μοναδικό $x \in H$ ώστε

$$f(y) = \langle y, x \rangle \quad \text{για κάθε} \ \ y \in H.$$

Ο Χωρος H^2 του Hardy II

Ο H^2 ειναι χωρος (ολομορφων) συναρτησεων $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$.
Μεχρι εκει ομως:

Παράδειγμα

Η $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ ανηκει στον H^2, αλλα δεν επεκτεινεται σε μεγαλυτερο δισκο (δεν οριζεται καν οταν $z = 1 \in \overline{\mathbb{D}}$).

Παράδειγμα

Η $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ (οριζεται και) ειναι ολομορφη στο $\mathbb{D}$, αλλα δεν ανηκει στον H^2.

Ο Χωρος H^2 του Hardy III

Θεώρημα

Για καθε $z_0 \in \mathbb{D}$, *η απεικονιση* $f \mapsto f(z_0) : (H^2, \|\cdot\|) \to (\mathbb{C}, |\cdot|)$ *ειναι συνεχης. Μαλιστα,* $f(z_0) = \langle f, k_{z_0} \rangle$ *για καθε* $f \in H^2$, *οπου* $k_{z_0}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{z}_0^n z^n$.

Πρβλ:

Παρατήρηση

Στον χωρο $C([0,1])$ *με εσωτ. γινομενο* $\langle f, g \rangle := \int f(t)\overline{g(t)}dt$ *η απεικονιση* $f \mapsto f(1) : (C([0,1]), \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{C}, |\cdot|)$ *ΔΕΝ ειναι συνεχης.*

Ο Χωρος H^2 του Hardy III

Πρόταση

Αν $\|f_n - f\| \to 0$ *στον* H^2, *τοτε* $f_n(z) \to f(z)$ *ομοιομορφα στα συμπαγη υποσυνολα του* $\mathbb{D}$.

Ορισμός

Η συναρτηση $k(z,w) := k_w(z) = \frac{1}{1-\bar{w}z}$, $(z,w) \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}$ λεγεται πυρηνας του Szegő.

Εχουμε $f(z_0) = \langle f, k_{z_0} \rangle$ για καθε $f \in H^2$.

Reproducing Kernel Hilbert Spaces

Εστω X μη κενο συνολο (συνηθως $X \subseteq \mathbb{C}^d$). Ενας χωρος $\mathcal{H}$ λεγεται Reproducing Kernel Hilbert Space στο X οταν

(α) αποτελειται απο συναρτησεις $X \to \mathbb{C}$ και ειναι γραμμικος χωρος με πραξεις κατα σημειο,

(β) ειναι εφοδιασμενος με ενα εσωτερικο γινομενο ως προς το οποιο ειναι χωρος Hilbert, και

(γ) για καθε $z_0 \in X$ η απεικονιση $f \mapsto f(z_0) : (\mathcal{H}, \|\cdot\|) \to (\mathbb{C}, |\cdot|)$ ειναι συνεχης.

Επεται τοτε (Θεωρημα Riesz) ότι για καθε $z_0 \in X$ υπαρχει $k_{z_0} \in \mathcal{H}$ ωστε $f(z_0) = \langle f, k_{z_0} \rangle$ για καθε $f \in \mathcal{H}$. Η συναρτηση

$$k(z,w) := k_w(z) \qquad (z,w) \in X \times X$$

λεγεται πυρηνας αναπαραγωγης (reproducing kernel) για τον $\mathcal{H}$.

Ο Χωρος $\widetilde{H}^2$ του Hardy στον κυκλο $\mathbb{T}$

Θυμιζουμε τον $L^2(\mathbb{T})$ με εσωτερικο γινομενο
$\langle f, g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\overline{g(e^{it})}dt$ και ορθοκανονικη βαση $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$
οπου $f_n(e^{it}) = e^{int}$. Γραφουμε $\hat{f}(k) = \langle f, f_k\rangle$, $k \in \mathbb{Z}$.
Δηλαδη (a) $\langle f_n f_m\rangle = \delta_{mn}$ και (b) για καθε $f \in L^2(\mathbb{T})$ εχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\left\|f - \sum_{|k|\leq n}\hat{f}(k)f_k\right\|_{L^2} = 0 \quad \text{και} \quad \|f\|_{L^2}^2 \overset{(P)}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(k)|^2 .$$

(P): Parseval

Ο $L^2(\mathbb{T})$ ειναι η $\|\cdot\|_{L^2}$- κλειστη θηκη των *τριγ. πολυωνυμων* $\text{span}\{f_k : k \in \mathbb{Z}\}$.

Ορισμός

$$\widetilde{H}^2 := \left\{\tilde{f} \in L^2(\mathbb{T}) : \langle\tilde{f}, f_n\rangle = 0 \ \forall n < 0\right\}.$$

Ο $\widetilde{H}^2$ ειναι κλειστος γραμμ. υποχωρος του $L^2(\mathbb{T})$. Ειναι η $\|\cdot\|_{L^2}$-
κλειστη θηκη των *αναλυτικων τριγ. πολυωνυμων* $\text{span}\{f_k : k \in \mathbb{Z}_+\}$.

Ο Χωρος $\widetilde{H}^2$ και ο χωρος H^2

$\widetilde{H}^2$: αποτελειται από (σχ. παντου ορισμενες) συναρτησεις $\mathbb{T} \to \mathbb{C}$ (mod. ισοτητα σχεδον παντου).

H^2: αποτελειται απο συναρτησεις $\mathbb{D} \to \mathbb{C}$.
Ειναι η $\|\cdot\|_{H^2}$- κλειστη θηκη των *πολυωνυμων* $\operatorname{span}\{\zeta_k : k \in \mathbb{Z}_+\}$ οπου $\zeta_k(z) = z^k$, $z \in \mathbb{D}$.

Ισομορφισμοι: [2]

$$\color{blue}{f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n} \quad \longleftrightarrow \quad (a_n) \quad \longleftrightarrow \quad \color{red}{\tilde{f} \sim \sum_{n\geq 0} a_n f_n}$$

$$H^2 \quad \longleftrightarrow \quad \ell^2 \quad \longleftrightarrow \quad \widetilde{H}^2$$

$$\color{blue}{a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}} \qquad\qquad \color{red}{a_n = \langle \tilde{f}, f_n \rangle}$$

[2] Εξπλεΐν Χουαΐ!

Ο Χωρος $\widetilde{H}^2$ και ο χωρος H^2

Θεώρημα

Αν $f \in H^2$ *με* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *οριζουμε για* $r \in (0,1)$

$$f_r(e^{it}) = f(re^{it}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{int}, \;\; e^{it} \in \mathbb{T}.$$

Τοτε $f_r \in \widetilde{H}^2$ *και υπαρχει το*

$$\lim_{r \nearrow 1} f_r := \tilde{f} \quad \text{ως προς τη νορμα του } \widetilde{H}^2$$

οπου $\tilde{f} \in \widetilde{H}^2$ *με* $\langle \tilde{f}, f_n \rangle = a_n \; \forall n \geq 0.$

Ο Χωρος $\widetilde{H}^2$ και ο χωρος H^2

Πόρισμα

Αν $f \in H^2$ *υπαρχει* (r_n) *με* $0 \le r_n \nearrow 1$ *ώστε*

$$\lim_n f(r_n e^{it}) = \tilde{f}(e^{it})$$

σχεδον για καθε $e^{it} \in \mathbb{T}$.

(Θα δειξουμε σε λιγο κατι πολυ ισχυροτερο, το Θεωρημα Fatou.)

Παρατήρηση

Αν μια f *οριζεται και ειναι συνεχης στον* κλειστο *δισκο* $\overline{\mathbb{D}}$ *(πχ αν ειναι ολομορφη σε μια περιοχη του* $\overline{\mathbb{D}}$*) τοτε* $\tilde{f}(e^{it}) = f(e^{it})$ *σχεδον για καθε* $e^{it} \in \mathbb{T}$.

Ο Χωρος H^2 του Hardy: εναλλακτικος ορισμος

Θεώρημα

Εστω $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ *ολομορφη. Εχουμε*

$$f \in H^2 \iff \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})|^2 dt < \infty .$$

Μαλιστα

$$f \in H^2 \Rightarrow \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})|^2 dt = \|f\|^2 .$$

Πόρισμα

Εστω $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ *ολομορφη. Η συναρτηση*

$$r \mapsto M(r) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})|^2 dt$$

ειναι αυξουσα στο $(0,1)$*. Η* f *ανηκει στον* H^2 *αν-ν η* $r \mapsto M(r)$ *ειναι φραγμενη, και τοτε* $\|f\|^2 = \lim_{r \nearrow 1} M(r)$.

Ο Χωρος H^2 του Hardy V

Θεώρημα (Ολοκληρωτικος τυπος Cauchy)

Αν f ειναι ολομορφη σε ανοικτο συνολο που περιεχει τον κλειστο δισκο $\overline{\mathbb{D}}$, τοτε για καθε $z_0 \in \mathbb{D}$ εχουμε

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{f(w)}{w - z_0} dw.$$

Θεώρημα (Ολοκληρωτικος τυπος Poisson)

Αν $f \in H^2$ με αντιστοιχη $\tilde{f} \in \widetilde{H}^2$ τοτε για καθε $re^{it} \in \mathbb{D}$ εχουμε

$$f(re^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(e^{is}) P_r(s-t) ds$$

οπου P_r ο πυρηνας Poisson

$$P_r(\theta) := \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2}, \quad r \in [0,1),\ \theta \in [-\pi, \pi].$$

Αποδειξη στο poissonn.pdf.

Το Θεωρημα του Fatou για τον H^2

Θεώρημα

Αν $f \in H^2$, υπαρχει συνολο $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ με μηδενικο μετρο Lebesgue ωστε για καθε $t \notin \Delta$,

$$\lim_{r \nearrow 1} f(re^{it}) = \tilde{f}(e^{it}).$$

Αποδειξη στο fatou.pdf.

Σχολιο Το θεωρημα Fatou δινει μια εκφραση για την απεικονιση $H^2 \to \widetilde{H}^2 : f \mapsto \tilde{f}$ (και αιτιολογει την ονομασια «συνοριακη συναρτηση» για την $\tilde{f}$).

Ο ολοκληρωτικος τυπος Poisson δινει μια εκφραση για την αντιστροφη απεικονιση $\widetilde{H}^2 \to H^2 : \tilde{f} \mapsto f$.

Υπενθυμιση: Φραγμενοι τελεστες

Έστω $(E, \|\cdot\|_E)$ και $(F, \|\cdot\|_F)$ χώροι με νόρμα.

Παρατήρηση. Καμμιά γραμμική συνάρτηση (εκτός απ' την 0) δεν είναι φραγμένη με τη συνήθη έννοια σε όλον το χώρο.

Ορισμός

Μία *γραμμική* απεικόνιση $T : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$ λέγεται φραγμένη ή φραγμένος τελεστής (bounded operator) αν

(είναι φραγμένος στην ball(E), δηλ.)

$$\|T\| := \sup\{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\} < +\infty.$$

$\mathcal{B}(E,F)$: ο χώρος των φραγμένων τελεστών.

... ισοδύναμα, αν υπάρχει M ώστε για κάθε $x \in E$ να ισχύει $\|Tx\|_F \leq M\|x\|_E$.

$$\|Tx - Tx'\|_F \overset{\text{γρ.}}{=} \|T(x-x')\|_F \overset{\text{φρ.}}{\leq} \|T\| \, \|x - x'\|_E$$

Αν T γραμμική,

φραγμένη $\iff$ συνεχής $\iff$ ομοιόμορφα συνεχής.

Το Φασμα τελεστη

Ορισμός

Το φάσμα ενός φραγμένου τελεστή $A : E \to E$ σ' έναν χώρο Banach E είναι το σύνολο

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{ο } A - \lambda I \text{ δεν έχει (φραγμ.) αντίστροφο } \}.$$

Ισχύει ότι το φάσμα $\sigma(A)$ είναι συμπαγές μη κενό (!) υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και οτι

$$\sigma(A) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|A\|\}.$$

Σχετικά με το φάσμα (δειτε και το specS245.pdf.)

Πρόταση

Ένας φραγμένος τελεστής $T : E \to F$ μεταξυ χωρων Banach είναι αντιστρέψιμος αν-ν έχει πυκνή εικόνα και υπάρχει $m > 0$ ώστε $\|Tx\| \geq m\|x\|$ για κάθε $x \in E$ (λέμε «ο T είναι κάτω φραγμένος στη μοναδιαία σφαίρα του E»).

Ορισμός

Έστω $A \in \mathcal{B}(E)$ (E: Banach). Το σημειακό φάσμα:

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(A - \lambda I) \neq \{0\}\}.$$

Το προσεγγιστικά σημειακό φάσμα $\sigma_a(A)$ είναι το σύνολο των λ ώστε ο $A - \lambda I$ να μην είναι κάτω φραγμένος στη μοναδιαία σφαίρα του E:

$$\sigma_a(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \forall \varepsilon > 0\, \exists x_\varepsilon \in E : \|(A - \lambda I)x_\varepsilon\| < \varepsilon\|x_\varepsilon\|\}.$$

Το φάσμα συμπίεσης (compression spectrum) είναι το σύνολο

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{(A - \lambda I)(E)} \neq E\}.$$

Σχετικά με το φάσμα

Πρόταση

Η ένωση $\sigma_a(A) \cup \sigma_c(A)$ ισούται με $\sigma(A)$.

Υπενθυμιση: Ο συζυγης τελεστης.
Αν $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ (H_i: Hilbert), υπαρχει μοναδικος $A^* \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$ ωστε

$$\langle Ax, y\rangle_2 = \langle x, A^* y\rangle_1 \quad \forall x \in H_1, y \in H_2\,.$$

Λήμμα

Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Τότε

$$\ker T = (T^*(\mathcal{H}))^\perp \qquad \textit{και} \qquad \overline{T(\mathcal{H})} = (\ker T^*)^\perp.$$

Σχετικά με το φάσμα

Λήμμα

Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Τότε
(i) $\sigma(T^*) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma(T)\}$
(ii) Αν $\exists A^{-1}$, *τοτε* $\sigma(A^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(A)\}$.
(ii) $\sigma_p(T) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma_c(T^*)\}$ *και* $\sigma_c(T) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma_p(T^*)\}$.

- Αν $\dim H < \infty$ τοτε $\sigma(A) = \sigma_p(A)$. Αλλιως, μπορει $\sigma_p(A) = \emptyset$.
- Ο αριθμος λ ΔΕΝ ειναι στο $\sigma_a(A)$ αν-ν υπαρχει $m > 0$ ωστε $\|(A - \lambda I)x\| \geq m\|x\|$ για καθε $x \in H$, αν-ν ο $A - \lambda I$ ειναι 1-1 και εχει κλειστο συνολο τιμων.

Παράδειγμα

Αν $S \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}_+))$ είναι ο τελεστής της μετατόπισης $Se_n = e_{n+1}$, τότε

$$\sigma_p(S) = \emptyset, \quad \sigma_a(S) = \mathbb{T}, \quad \sigma_c(S) = \mathbb{D} \text{ και άρα } \sigma(S) = \overline{\mathbb{D}}.$$

Μερικες αποδειξεις στο specS245.pdf.

Υπενθύμιση: χώροι L^p

Αν $p \in [1, \infty)$, με το σύμβολο $\mathcal{L}^p(\mathbb{T})$ εννοούμε το σύνολο των μετρήσιμων *συναρτήσεων* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ που ικανοποιούν

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dm(t) < \infty \qquad \text{(μέτρο Lebesgue).}$$

Γράφουμε

$$\|f\|_p := \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \frac{dm(t)}{2\pi} \right)^{1/p}.$$

Παρατηρούμε ότι $\|f\|_p = 0$ αν και μόνον αν $f(t) = 0$ m-σχεδόν για κάθε t.

Υπενθύμιση: χώροι L^p (II)

Με $L^p(\mathbb{T})$ συμβολίζουμε τον χώρο των κλάσεων ισοδυναμίας $[f]$, των $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{T})$, modulo ισότητα σχεδόν παντού.

Ο $L^p(\mathbb{T})$ είναι γραμμικός χώρος και η $\|\cdot\|_p$ είναι νόρμα στον $L^p(\mathbb{T})$ ως προς την οποία ο $L^p(\mathbb{T})$ είναι χώρος Banach (Θεώρημα Riesz-Fisher).

Αν $1 \leq p \leq q < \infty$ και f μετρήσιμη, έχουμε

$$\|f\|_p \leq \|f\|_q \leq \|f\|_\infty, \text{ άρα } C(\mathbb{T}) \subseteq L^q(\mathbb{T}) \subseteq L^p(\mathbb{T}) \subseteq L^1(\mathbb{T}).$$

Αν $g \in L^1(\mathbb{T})$ γράφω $\hat{g}(k) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(e^{it})e^{-ikt}dm(t)$ $(k \in \mathbb{Z})$.
Ο μετασχηματισμός Fourier $L^1(\mathbb{T}) \to c_0(\mathbb{Z}) : g \mapsto (\hat{g}(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ ειναι γραμμική, 1-1 και συνεχής (όχι επί). [3]
Ο περιορισμός του, $\mathcal{F}$, στον $L^2(\mathbb{T})$ ικανοποιεί $\|g\|_{L^2} = \|\hat{g}\|_{\ell^2}$ και απεικονίζει την $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$ στην $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$, άρα απεικονίζει τον $L^2(\mathbb{T})$ ισομετρικά και επί του $\ell^2(\mathbb{Z})$.

[3] ℓ^1 is separable, L^∞ is not.

Υπενθύμιση: Ο $L^\infty(X,\mathcal{S},\mu)$

Αν $(X,\mathcal{S},\mu)$ είναι χώρος μέτρου, μία $f : X \to \mathbb{C}$ ανήκει στον $\mathcal{L}^\infty(X,\mathcal{S},\mu)$ αν (α) είναι $\mathcal{S}$-μετρήσιμη και
(β) είναι ουσιωδώς φραγμένη (essentially bounded),
δηλ. υπάρχει $M < +\infty$ ώστε $|f(x)| \le M$ σχεδόν παντού,
δηλ. $\mu(\{x \in X : |f(x)| > M\}) = 0$.

Ο μικρότερος τέτοιος M (υπάρχει και) λέγεται το ουσιώδες φράγμα (essential supremum) της $|f|$.
Δηλ. ορίζουμε
$\|f\|_\infty := \text{esssup}|f| := \min\{M : \mu(\{x \in X : |f(x)| > M\}) = 0\}$.
Αν $f \in \mathcal{L}^\infty(X,\mathcal{S},\mu)$, τότε
$\|f\|_\infty = 0$ ανν $f(x) = 0$ μ-σχεδόν για κάθε $x \in X$.
Ο $L^\infty(X,\mathcal{S},\mu)$ είναι ο χώρος των κλάσεων ισοδυναμίας, modulo ισότητα μ-σχεδόν παντού, συναρτήσεων του $\mathcal{L}^\infty(X,\mathcal{S},\mu)$.

Η $\|\cdot\|_\infty$ είναι νόρμα στον $L^\infty(X,\mathcal{S},\mu)$, που γίνεται χωρος Banach με τις πράξεις κατά σημείο. Μαλιστα $\|fg\|_\infty \le \|f\|_\infty \|g\|_\infty$ (άλγεβρα Banach).

Πολλαπλασιαστικοι τελεστες στον L^2

Εστω $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Για καθε $f \in L^2(\mathbb{T})$, η συναρτηση ϕf ειναι μετρησιμη και $\|\phi f\|_2 \leq \|\phi\|_\infty \|f\|_2$. Συνεπως:

Πρόταση

Καθε $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ *οριζει φραγμενο τελεστη*

$$M_\phi : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T}) : f \mapsto \phi f\,.$$

Μαλιστα $\left\|M_\phi\right\| = \|\phi\|_\infty = \operatorname{esssup}|\phi|$.

Τελεστές μετατόπισης (shift operators)

- Στον $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{Z}_+) = \{x : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{K} : \sum_{k=0}^{\infty} |x(k)|^2 < \infty\}$:

Για $x = (x(0), x(1), x(2), \dots) \in \ell^2$
ορίζω S και S':

$$S(x(0), x(1), x(2), \dots) = (0, x(0), x(1), \dots)$$
$$S'(x(0), x(1), x(2), \dots) = (x(1), x(2), x(3), \dots)$$

δηλαδή $(Sx)(n) = \begin{cases} 0 & \text{αν } n = 0 \\ x(n-1) & \text{αν } n > 0 \end{cases}$ και
$(S'x)(n) = x(n+1)$ για κάθε $n \geq 0$.

Προφανώς $S, S' : \ell^2(\mathbb{Z}_+) \to \ell^2(\mathbb{Z}_+)$, γραμμικοί και φραγμενοι.
Δειχνουμε οτι $\langle Sx, y\rangle = \langle x, S'y\rangle$ για καθε $x, y \in \ell^2(\mathbb{Z}_+)$, δηλ. οτι ο συζυγής του S είναι ο S'.

Τελεστές μετατόπισης (shift operators)

- Στον $\ell^2(\mathbb{Z}) = \{x : \mathbb{Z} \to \mathbb{K} : \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2 < \infty\}$:

Για $x = (\dots, x(-1), x(0), x(1), x(2), \dots) \in \ell^2(\mathbb{Z})$
ορίζω W και W':

$$Wx = (\dots, x(-2), x(-1), x(0), x(1), \dots)$$
$$W'x = (\dots, x(0), x(1), x(2), x(3), \dots)$$

δηλαδή $(Wx)(n) = x(n-1)$ και $(W'x)(n) = x(n+1)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.
Προφανώς $W, W' : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$, γραμμικοί, ισομετρίες και επί, διότι $WW' = W'W = I$, δηλ. $W^{-1} = W'$.
Ο συζυγής του W είναι ο W'. Άρα $WW^* = W^*W = I$.

Τελεστές μετατόπισης (shift operators)

- Τελεστές μετατόπισης (α) Στον $\ell^2(\mathbb{Z})$ (αλλιώς):

$$\begin{aligned} We_n &:= e_{n+1} \quad \text{(μετατόπιση δεξιά)} \\ \text{και } W'e_n &:= e_{n-1} \quad \text{(μετατόπιση αριστερά)} \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Επεκτείνω γραμμικά στον $c_{00}(\mathbb{Z})$, παρατηρώ ότι είναι $\|\cdot\|_2$-ισομετρίες, άρα επεκτείνονται σε ισομετρίες $\ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$. Δείχνουμε ότι $\langle W'e_n, e_m\rangle = \langle e_n, We_m\rangle$ για κάθε $n, m \in \mathbb{Z}$, άρα $W' = W^*$ (γιατί;).

- (β) Στον $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$:

$$Se_n := e_{n+1} \quad \text{(μετατόπιση δεξιά)} \;\; (n \in \mathbb{Z}_+)$$

$$\text{και } S'e_n := \begin{cases} e_{n-1} & \text{όταν } n \geq 1 \\ 0 & \text{όταν } n = 0 \end{cases} \quad \text{(μετατόπιση αριστερά)}$$

Επεκτείνω γραμμικά στον $c_{00}(\mathbb{Z}_+)$, παρατηρώ ότι είναι $\|\cdot\|_2$-συστολές (δηλ. $\|Sx\|_2 \leq \|x\|_2$ για κάθε $x \in c_{00}(\mathbb{Z}_+)$), άρα επεκτείνονται σε συστολές $\ell^2(\mathbb{Z}_+) \to \ell^2(\mathbb{Z}_+)$). Δείχνω $S' = S^*$.
(Μάλιστα ο S είναι ισομετρία. Ο S^*;)

Τελεστές μετατόπισης (shift operators)

Συμπέρασμα

$$
\begin{aligned}
\text{Στον } \ell^2(\mathbb{Z}): \ & We_n = e_{n+1} \quad (\text{μετατόπιση δεξιά}) \\
& W^*e_n = e_{n-1} \quad (\text{μετατόπιση αριστερά}) \quad (n \in \mathbb{Z}) \\
\text{Στον } \ell^2(\mathbb{Z}_+): \ & Se_n = e_{n+1} \quad (\text{μετατόπιση δεξιά}) \ (n \in \mathbb{Z}_+) \\
& S^*e_n = \begin{cases} e_{n-1} & \text{όταν } n \geq 1 \\ 0 & \text{όταν } n = 0 \end{cases} \qquad (\text{μετατόπιση αριστερά})
\end{aligned}
$$

• Ο W ειναι ισομετρια και επι.
Ισχυει $W(\ell^2(\mathbb{Z}_+)) \subseteq \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ αλλα $W^*(\ell^2(\mathbb{Z}_+)) \nsubseteq \ell^2(\mathbb{Z}_+)$
• Ο S ειναι ισομετρια, οχι επι. Ο S^* ειναι επι, οχι 1-1.

Το φάσμα των τελεστών μετατόπισης

$S : \ell^2(\mathbb{Z}_+) \to \ell^2(\mathbb{Z}_+)$:

Αφου $\|S^*\| = 1$, εχω $\sigma(S^*) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$.

Δειχνω οτι

• $\sigma_p(S^*) = \mathbb{D}$: για καθε $\lambda \in \mathbb{D}$, αν $x_\lambda := (1, \lambda, \lambda^2, \dots)$, εχω $\in \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ και $S^* x_\lambda = \lambda x_\lambda$.
Επεται οτι

• $\sigma(S^*) = \overline{\mathbb{D}} = \sigma(S)$.

Ομως

• $\sigma_p(S) = \emptyset$.

Το φάσμα των τελεστών μετατόπισης

$W : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$:

Παλι $\sigma(W^*) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$. Ομως $\sigma(W^*) = \sigma(W^{-1}) = \{\frac{1}{\lambda} : \lambda \in \sigma(W)\}$.
Συνεπως αν $\lambda \in \sigma(W^*)$ πρεπει $|\lambda| \leq 1$ και $\frac{1}{|\lambda|} \leq 1$ αφου $\sigma(W) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$.
Αρα $|\lambda| = 1$. Δηλαδη $\sigma(W^*) \subseteq \mathbb{T}$.

Ασκηση: $\sigma(W) = \sigma(W^*) = \mathbb{T}$.

Ασκηση: $\sigma_p(W) = \emptyset$.

Αναλλοίωτοι υπόχωροι

Ένας γραμμικός υπόχωρος $E \subseteq H$ είναι αναλλοίωτος (invariant) από έναν φραγμένο τελεστή $A \in \mathcal{B}(H)$ αν $A(E) \subseteq E$, δηλ. αν $Ax \in E$ για κάθε $x \in E$. Τότε ο *κλειστός* υπόχωρος $\overline{E}$ είναι και αυτός A-αναλλοίωτος. Όταν και ο E και ο $E^\perp$ είναι A-αναλλοίωτοι, θα λέμε ότι ο υπόχωρος E ανάγει (reduces) τον A.

Λήμμα

Ένας κλειστός υπόχωρος E είναι A-αναλλοίωτος αν και μόνον αν $AP = PAP$ (όπου $P = P_E$, η ορθη προβολη στον E (4)).
Ο E ανάγει τον A αν και μόνον αν $A(E) \subseteq E$ και $A^*(E) \subseteq E$, ισοδύναμα αν και μόνον αν $AP = PA$.

Ενημερωτικα, το ακολουθο ειναι ανοικτο:

Το πρόβλημα του αναλλοίωτου υπόχωρου:

Είναι αλήθεια ότι κάθε φραγμένος τελεστής A σε έναν (διαχωρίσιμο, απειροδιάστατο, μιγαδικό) χώρο Hilbert H (ισοδύναμα, στον ℓ^2) έχει μη τετριμμένο κλειστό αναλλοίωτο υπόχωρο;

Αναλλοίωτοι υπόχωροι του shift S

Για καθε $n \in \mathbb{N}$, θετουμε

$$\begin{aligned} E_n &:= \{x \in \ell^2(\mathbb{Z}_+) : x = (0, \dots, 0, x(n), \dots)\} = \overline{\operatorname{span}}\{e_k : k \geq n\} \\ &= \{e_k : 0 \leq k < n\}^\perp = \{e_0, S(e_0), \dots, S^{n-1}(e_0)\}^\perp. \end{aligned}$$

Ο E_n ειναι (γνησιος) S-αναλλοιωτος υποχωρος.
Επισης για καθε $\lambda \in \mathbb{D}$ ο υποχωρος

$$E(\lambda) := \{x_\lambda\}^\perp \quad \text{οπου } x_\lambda = (1, \lambda, \lambda^2, \dots)$$

ειναι S-αναλλοιωτος. Ασκηση: Το ιδιο και ο

$$E_n(\lambda) := \{x_\lambda, S(x_\lambda), \dots, S^{n-1}(x_\lambda)\}^\perp.$$

The (unilateral) shift S on ℓ^2 and T_1 on H^2

$$S : \ell^2 \to \ell^2 : \ S(a_0, a_1 \ldots) := (0, a_0, a_1 \ldots), \qquad (a_0, a_1 \ldots) \in \ell^2(\mathbb{Z}_+)$$
$$T_1 : H^2 \to H^2 : (T_1 f)(z) := z f(z), \qquad f \in H^2$$

$$\begin{tikzcd} \ell^2(\mathbb{Z}_+) \arrow[r, "S"] \arrow[d, tail, two heads, "V"] & \ell^2(\mathbb{Z}_+) \arrow[d, tail, two heads, "V"] \\ H^2 \arrow[r, "T_1"'] & H^2 \end{tikzcd} \qquad : \ T_1 = VSV^{-1}$$

οπου $V : \ell^2(\mathbb{Z}_+) \to H^2 : e_n \mapsto \zeta_n$ (εδω $\zeta_n(z) = z^n, z \in \mathbb{D}$).

T_1-Αναλλοιωτοι υποχωροι

Αν $E_m = \overline{\mathrm{span}}\{e_n : n \geq m\}$,
ο $V(E_m)$ ειναι T_1-αναλλοιωτος και

$$V(E_m) = \{f \in H^2 : f^{(k)}(0) = 0,\ 0 \leq k < m\} = \{\zeta_m f : f \in H^2\}.$$

Επισης αν $\lambda \in \mathbb{D}$ και $E(\bar{\lambda}) = \{x_{\bar{\lambda}}\}^{\perp}$, ο υποχωρος

$$V(E(\bar{\lambda})) = \{k_\lambda\}^{\perp} = \{f \in H^2 : f(\lambda) = 0\}$$

ειναι T_1-αναλλοιωτος.

Ασκησεις Για καθε $\lambda \in \mathbb{D}$, τα διανυσματα $\{x_\lambda, S(x_\lambda), S^2(x_\lambda), \dots,\}$ ειναι γραμμικα ανεξαρτητα, και η κλειστη γραμμικη τους θηκη ισουται με $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$.

The (bilateral) shift W on $\ell^2(\mathbb{Z})$ and M_1 on $L^2(\mathbb{T})$

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z}) : f \mapsto (\hat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}}$$
$$f_n \mapsto e_n \ (n \in \mathbb{Z}).$$

$$\begin{tikzcd} \ell^2(\mathbb{Z}) \arrow[r, "W"] & \ell^2(\mathbb{Z}) \\ L^2(\mathbb{T}) \arrow[u, tail, two heads, "\mathcal{F}"] \arrow[r, "M_1"'] & L^2(\mathbb{T}) \arrow[u, tail, two heads, "\mathcal{F}"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \ell^2(\mathbb{Z}_+) \arrow[r, "S"] & \ell^2(\mathbb{Z}_+) \\ \tilde{H}^2 \arrow[u, tail, two heads, "\mathcal{F}|"] \arrow[r, "T_1"'] & \tilde{H}^2 \arrow[u, tail, two heads, "\mathcal{F}|"'] \end{tikzcd}$$

$$(M_1 f)(e^{it}) = e^{it} f(e^{it}), \qquad T_1 = M_1|_{\tilde{H}^2}$$

Αναγοντες (reducing) υποχωροι των shifts

Πρόταση

Οι μονοι κλειστοι υποχωροι του $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ που αναγουν τον S ειναι ο $\{0\}$ και ο $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$.

Πρόταση

Ενας κλειστος υποχωρος E του $\ell^2(\mathbb{Z})$ αναγει τον W αν-ν υπαρχει μετρησιμο $\Omega \subseteq \mathbb{T}$ ωστε

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}(E) &= \{f \in L^2(\mathbb{T}) : f(e^{it}) = 0 \text{ σχεδον για καθε } e^{it} \notin \Omega\} \\ &= \{\chi_\Omega g : g \in L^2(\mathbb{T})\}.\end{aligned}$$

Αλλιως: Ενας κλειστος υποχωρος του $L^2(\mathbb{T})$ αναγει τον M_1 αν-ν ειναι της μορφης

$$E_\Omega := \{\chi_\Omega g : g \in L^2(\mathbb{T})\}$$

οπου $\Omega \subseteq \mathbb{T}$ μετρησιμο.

Η αποδειξη της Προτασης για τον W θα χρειασθει προετοιμασια.

Ο μεταθετης (commutant) του W

Να βρουμε ολους τους τελεστες στον $\ell^2(\mathbb{Z})$ που μετατιθενται με τον W. Ισοδυναμα, να βρουμε ολους τους τελεστες στον $L^2(\mathbb{T})$ που μετατιθενται με τον $M_1 = \mathcal{F}^{-1} W \mathcal{F}$.
Καθε πολλαπλασιαστικος τελεστης M_ϕ με $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ μετατιθεται με τον (πολλαπλασιαστικο τελεστη) M_1. Δεν υπαρχουν αλλοι:

Θεώρημα

Το συνολο των τελεστων στον $L^2(\mathbb{T})$ που μετατιθενται με τον M_1 ειναι το

$$\{M_\phi : \phi \in L^\infty(\mathbb{T})\}.$$

Οι Αναλλοιωτοι υποχωροι του M_1

Πρόταση

Ενας κλειστος υποχωρος του $L^2(\mathbb{T})$ αναγει τον M_1 αν-ν ειναι της μορφης

$$E_\Omega := \{\chi_\Omega g : g \in L^2(\mathbb{T})\} = \chi_\Omega L^2(\mathbb{T})$$

οπου $\Omega \subseteq \mathbb{T}$ μετρησιμο.

Θεώρημα

Ενας κλειστος υποχωρος E του $L^2(\mathbb{T})$ ειναι M_1-αναλλοιωτος αλλα δεν αναγει τον M_1 αν-ν ειναι της μορφης

$$E = \{\phi g : g \in \tilde{H}^2\} = \phi \widetilde{H}^2$$

οπου $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ με $|\phi(e^{it})| = 1$ σχεδον για καθε $e^{it} \in \mathbb{T}$.

Καθοριζεται μοναδικα η ϕ απο τον E;

Οι Αναλλοιωτοι υποχωροι του M_1 και του S

Πρόταση («Μοναδικοτητα»)

Αν $\phi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$ *με* $|\phi(e^{it})| = 1 = |\psi(e^{it})|$ *σχεδον για καθε* $e^{it} \in \mathbb{T}$, *τοτε*

$$\phi\widetilde{H}^2 = \psi\widetilde{H}^2 \iff \exists c \in \mathbb{T} : \phi = c\psi\,.$$

Ορισμός

Μια $\phi \in H^\infty$ λεγεται εσωτερικη (inner function) αν $|\tilde{\phi}(e^{it})| = 1$ σχεδον για καθε $e^{it} \in \mathbb{T}$.

Πρόταση

Εστω $\phi \in H^2$. *Αν* $|\tilde{\phi}(e^{it})| = 1$ *σχεδον για καθε* $e^{it} \in \mathbb{T}$, *τοτε η* ϕ *ειναι εσωτερικη.*

Θεώρημα (A. Beurling)

Καθε μη μηδενικος T_1*-αναλλοιωτος κλειστος υποχωρος* E *του* $\widetilde{H}^2$ *ειναι της μορφης* $E = \tilde{\phi}\widetilde{H}^2$ *οπου* ϕ *εσωτερικη.*

Οι Αναλλοιωτοι υποχωροι του S

Ορισμός

Μια $\phi \in H^\infty$ λεγεται εσωτερικη (inner function) αν $|\tilde{\phi}(e^{it})| = 1$ σχεδον για καθε $e^{it} \in \mathbb{T}$.

Θεώρημα (A. Beurling)

Καθε μη μηδενικος T_1-αναλλοιωτος κλειστος υποχωρος E του $\widetilde{H}^2$ ειναι της μορφης $E = \tilde{\phi}\widetilde{H}^2$ οπου ϕ εσωτερικη.
Αν $\phi H^2 = \psi H^2$ με ψ εσωτερικη, τοτε υπαρχει $c \in \mathbb{T}$ ωστε $\psi = c\phi$.

Συνηθως λεμε «*καθε μη μηδενικος S-αναλλοιωτος κλειστος υποχωρος του H^2 ειναι της μορφης ϕH^2 οπου ϕ εσωτερικη*». :

Οι Αναλλοιωτοι υποχωροι του S

$$S : \ell^2 \to \ell^2 : \; S(a_0, a_1 \dots) := (0, a_0, a_1 \dots), \qquad (a_0, a_1 \dots) \in \ell^2(\mathbb{Z}_+)$$
$$T_1 : H^2 \to H^2 : (T_1 f)(z) := z f(z), \qquad f \in H^2 .$$

$$V : \ell^2(\mathbb{Z}_+) \to H^2 : e_n \mapsto \zeta_n \;\; (\text{εδω } \; \zeta_n(z) = z^n, z \in \mathbb{D}).$$

$$\begin{tikzcd}
\ell^2(\mathbb{Z}_+) \arrow[r, "S"] \arrow[d, tail, two heads, "V"] & \ell^2(\mathbb{Z}_+) \arrow[d, tail, two heads, "V"] \\
H^2 \arrow[r, "T_1"'] & H^2
\end{tikzcd}$$

Αν $\{0\} \neq E \subseteq \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ κλειστος υποχωρος,

$$S(E) \subseteq E \iff T_1(V(E)) \subseteq V(E) \iff V(E) = \phi H^2, \; \phi \text{ εσωτ.}$$

Εσωτερικές και εξωτερικες συναρτησεις

Πρόταση

Καθε T_1-αναλλοιωτος κλειστος υποχωρος E του H^2 ειναι *T_1-κυκλικος, δηλ. υπαρχει $\phi \in E$ ωστε*

$$E = \overline{\mathrm{span}}\{T_1^n(\phi) : n \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Ορισμός

Μια $\phi \in H^\infty$ λεγεται εσωτερικη (inner function) αν

$$|\tilde{\phi}(e^{it})| = 1 \quad \text{σχεδον για καθε } \ e^{it} \in \mathbb{T}.$$

Μια $F \in H^2$ λεγεται εξωτερικη (outer function) αν

$$\overline{\mathrm{span}}\{T_1^n(F) : n \in \mathbb{Z}_+\} = H^2\,.$$

Πρόταση

Μια εξωτερικη συναρτηση δεν εχει καμμια ριζα στον $\mathbb{D}$.

Εσωτερικές και εξωτερικες συναρτησεις

Υπενθ: Οι ριζες μιας $\neq 0$ ολομορφης συναρτησης στον $\mathbb{D}$ αποτελουν «μικρο» συνολο: δεν εχουν σημεια συσσωρευσης στο $\mathbb{D}$.

Θεώρημα (F. και M. Riesz)

Αν $f \in H^2$ μη μηδενικη, το συνολο $\{e^{i\theta} : \tilde{f}(e^{i\theta}) = 0\}$ εχει μετρο (Lebesgue) μηδεν.

Θεώρημα (Inner-Outer factorization)

Αν $f \in H^2$ μη μηδενικη, υπαρχει εσωτερικη φ και εξωτερικη F ωστε $f = \varphi F$.

Αν επισης $f = \varphi' F'$ με φ' εσωτερικη και F' εξωτερικη τοτε $\varphi' = c\varphi$ οπου $c \in \mathbb{T}$ (και αρα $F = cF'$).

• Επομενως οι ριζες μιας μη μηδενικης $f \in H^2$ ειναι ακριβως οι ριζες του εσωτερικου της παραγοντα.

Εσωτερικές συναρτησεις: Γινομενα Blaschke

Υπενθ. Για καθε $z_0 \in \mathbb{D}$, ο υποχωρος

$$E_{z_0} := \{f \in H^2 : f(z_0) = 0\} = \{k_{z_0}\}^\perp$$

του H^2 ειναι T_1-αναλλοιωστος .

Πρόταση

Για καθε $z_0 \in \mathbb{D}$ η συναρτηση

$$\psi(z) = \frac{z_0 - z}{1 - \overline{z_0} z}$$

ειναι εσωτερικη και $E_{z_0} = \psi H^2$.

Πρόταση

Αν $z_1, \dots z_n \in \mathbb{D}$ η συναρτηση

$$\psi(z) = \prod_{i=1}^{n} \frac{z_i - z}{1 - \overline{z_i} z}$$

ειναι εσωτερικη και

$$\psi H^2 = \{f \in H^2 : f(z_1) = f(z_2) = \cdots = f(z_n) = 0\}.$$

Εσωτερικές συναρτησεις: Γινομενα Blaschke

Πόρισμα

Εστω ϕ *εσωτερικη συναρτηση που εχει ριζες στα* $\{0, z_1 \ldots, z_n\} \subseteq \mathbb{D}$ *οπου το* 0 *ειναι ριζα με πολλαπλοτητα* $s \geq 0$. *Αν*

$$\psi(z) := z^s \prod_{i=1}^{n} \frac{z_i - z}{1 - \overline{z_i} z}$$

τοτε

$$\phi(z) = \psi(z) S(z), \;\; z \in \mathbb{D}$$

οπου η S *ειναι εσωτερικη συναρτηση (οπως και η* ψ*).*

Υπενθυμισεις Μιγαδικης Αναλυσης

Θεώρημα

Εστω $G \subseteq \mathbb{C}$ *ανοικτο και συνεκτικο (:τοπος (region)) και* $f : G \to \mathbb{C}$ *ολομορφη. Τα ακολουθα ειναι ισοδυναμα:*
(a) $f = 0$.
(b) Υπαρχει $a \in G$ *ωστε* $f^{(n)}(a) = 0$ *για καθε* $n \in \mathbb{Z}_+$.
(c) Το συνολο $Z(f) = \{a \in G : f(a) = 0\}$ *εχει σημεια συσσωρευσης μεσα στο* G.

Ενα συνολο $G \subseteq \mathbb{C}$ λεγεται συνεκτικο αν δεν περιεχει μη τετριμενα (σχετικα) ανοικτο-κλειστα (clopen) υποσυνολα. Αν G ανοικτο, ειναι συνεκτικο αν-ν καθε δυο σημεια του συνδεονται με συνεχη καμπυλη που δεν βγαινει απ το G. Παραδειγμα, ο δισκος $\mathbb{D}$. Μη παραδειγμα: η ενωση δυο ξενων ανοικτων δισκων, πχ $\mathbb{D} \cup B(3,1)$.

Πόρισμα (Αρχη της ταυτοτητας)

Εστω $G \subseteq \mathbb{C}$ *ανοικτο και συνεκτικο και* $f, g : G \to \mathbb{C}$ *ολομορφες. Εστω* $S := \{z \in G : f(z) = g(z)\}$. *Αν το* S *εχει σημεια συσσωρευσης μεσα στο* G, *τοτε* $f = g$.

Υπενθυμισεις Μιγαδικης Αναλυσης

Παρατήρηση (Τοπος: αναγκαιο)

Εστω $G = D_1 \cup D_2 \subseteq \mathbb{C}$ *η ενωση δυο ξενων ανοικτων δισκων και* $f : G \to \mathbb{C} : z \mapsto \begin{cases} 1, & z \in D_1 \\ 0, & z \in D_2 \end{cases}$ *η χαρακτηριστικη του* D_1*. Η* f *ειναι ολομορφη, μη σταθερη, παιρνει πραγματικες μονο τιμες, εχει υπεραριθμησιμο συνολο ριζων.*

Πόρισμα

Εστω $G \subseteq \mathbb{C}$ *ανοικτο και συνεκτικο και* $f : G \to \mathbb{C}$ *ολομορφη και μη μηδενικη. Τοτε οι ριζες της ειναι μεμονωμενες: δηλ. γυρω απο καθε ριζα* a *υπαρχει μια περιοχη* $B(a,r)$ *ωστε η* f *να μην μηδενιζεται πουθενα στο* $B(a,r)\setminus\{a\}$*.*
Επισης οι ριζες εχουν πεπερασμενη πολλαπλοτητα: υπαρχει $m \in \mathbb{N}$ *ωστε* $f(z) = (z-a)^m g(z)$ *οπου* g *ολομορφη στο* G *και* $g(a) \neq 0$*.*

Υπενθυμισεις Μιγαδικης Αναλυσης

Θεώρημα (Αρχη μεγιστου)

Εστω $G \subseteq \mathbb{C}$ *ανοικτο και συνεκτικο και* $f : G \to \mathbb{C}$ *ολομορφη. Αν υπαρχει* $a \in G$ *ωστε* $|f(a)| \geq |f(z)|$ *για καθε* $z \in G$*, τοτε η* f *ειναι σταθερη.*

Πόρισμα

Αν $\phi \in H^\infty$ *ειναι εσωτερικη συναρτηση, μη σταθερη, τοτε* $|\phi(z)| < 1$ *για καθε* $z \in \mathbb{D}$*.*

Απόδειξη.

Απο τον τυπο του Poisson (19) εχουμε $|\phi(z)| \leq 1$ για καθε $z \in \mathbb{D}$ (γιατι $\|P_r\|_1 = 1$). Αν υπηρχε z στον $\mathbb{D}$ ωστε $|\phi(z)| = 1$ τοτε η ϕ θα ηταν σταθερη απο την αρχη του μεγιστου. $\square$

Θα χρειασθει το

Θεώρημα (Hurwitz)

Εστω $G \subseteq \mathbb{C}$ *ανοικτο και συνεκτικο και* $g_n : G \to \mathbb{C}$ *ολομορφες* $(n \in \mathbb{N})$*. Υποθετουμε οτι* $g_n(z) \to g(z)$ *ομοιομορφα ως προς* z *στα συμπαγη υποσυνολα του* G*. Αν καθε* g_n *δεν εχει καμμια ριζα στο* G *τοτε ή η* g *δεν εχει καμμια ριζα στο* G*, ή αλλιως ειναι η μηδενικη συναρτηση.*

Ριζες Εσωτερικων συναρτησεων

Πρόταση

Εστω ϕ *εσωτερικη συναρτηση με* $\phi(0) \neq 0$. *Υποθετουμε οτι η* ϕ *μηδενιζεται στα σημεια* $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$. *Τοτε*

$$|\phi(0)| \leq \prod_{i=1}^{n} |z_i| \ \textit{για καθε} \ \ n \in \mathbb{N}.$$

Πότε μια απειρη ακολουθια (z_n) σημειων του δισκου μπορει να αποτελειται απο ριζες μιας $f \in H^2$; Αναγκαια συνθηκη (αρχη μεγιστου) ειναι η $\lim_n |z|_n = 1$. Αρκει;

Παράδειγμα

Δεν υπαρχει $f \in H^2$ με συνολο ριζων $Z(f) = \{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$.

Ριζες Εσωτερικων συναρτησεων

Ορισμός (Συγκλιση απειρογινομενων)

- Εστω $\{w_k\} \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Αν τα μερικα γινόμενα $p_n := \prod_{i=1}^{n} w_i$ συγκλινουν σε ενα $p \neq 0$ λεμε οτι το $\prod_{i=1}^{\infty} w_i$ συγκλινει (στο p).
- Εστω $\{w_k\} \subseteq \mathbb{C}$. Αν καποια w_k μηδενιζονται, και υπαρχει N ωστε $w_n \neq 0$ για καθε $n \geq N$ και το $\prod_{i=N}^{\infty} w_i$ συγκλινει (σε καποιο $p \neq 0$), τοτε λεμε οτι το $\prod_{i=1}^{\infty} w_i$ συγκλινει στο 0.

Πρόταση

Εστω $f \in H^2$ μη μηδενικη συναρτηση. Αν $z_n \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ και η f μηδενιζεται (τουλαχιστον) στα σημεια $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$, τοτε το $\prod_{i=1}^{\infty} |z_i|$ συγκλινει (σε ενα $p \neq 0$).

Ριζες Εσωτερικων συναρτησεων

Παρατήρηση

Αν $r_k \in (0,1)$ *για καθε* $k \in \mathbb{N}$, *το απειρογινομενο* $\prod_{i=1}^{\infty} r_i$ *συγκλινει (σε* $p > 0$*) αν-ν η σειρα* $\sum_{i=1}^{\infty}(1-r_i)$ *συγκλινει.*

Πόρισμα

Εστω $f \in H^2$ *μη μηδενικη συναρτηση. Αν* $z_n \in \mathbb{D}$ *και η* f *μηδενιζεται (τουλαχιστον) στα σημεια* $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$, *τοτε* $\sum_{i=1}^{\infty}(1-|z_i|) < \infty$.

Θα δουμε οτι αντιστροφα, αν $\{z_n\} \subseteq \mathbb{D}$ με $\sum_{i=1}^{\infty}(1-|z_i|) < \infty$ τοτε υπαρχει $f \in H^2$ (μαλιστα, εσωτερικη) που εχει ακριβως αυτες τις ριζες.

Θεώρημα

Εστω (z_k) *ακολουθια στο* $\mathbb{D}\setminus\{0\}$ *με* $\sum_{i=1}^{\infty}(1-|z_i|)<\infty$. *Τοτε υπαρχει μια εσωτερικη συναρτηση* B_0 *που εχει συνολο ριζων* $Z(B_0)=\{z_k : k\in\mathbb{N}\}$. *Για καθε* $z\in\mathbb{D}$, *εχουμε*

$$B_0(z)=\prod_{i=1}^{\infty}\frac{\bar{z}_i}{|z_i|}\frac{z_i-z}{1-\bar{z}_i z}\,.$$

οπου το απειρογινομενο συγκλινει ομοιομορφα στα συμπαγη του $\mathbb{D}$.

Σχολιο. Η συγκλιση του απειρογινομενου σημαινει οτι, για καθε συμπαγες υποσυνολο K του $\mathbb{D}$, μονον πεπερασμενο πληθος ορων του απειρογινομενου εχει ριζες στο K και οτι το απειρογινομενο που αποτελειται απο τους υπολοιπους ορους συγκλινει ομοιομορφα στο συμπαγες K σε μια ολομορφη συναρτηση που δεν εχει καμμια ριζα στο K.

Ριζες Εσωτερικων συναρτησεων

Ορισμός

Εστω $\{z_k\} \subseteq \mathbb{D}\setminus\{0\}$ με $\sum_{i=1}^{\infty}(1-|z_i|) < \infty$ και $s \in \mathbb{Z}_+$. Το γινόμενο Blaschke με ριζες στα $\{z_k\}$ και ριζα πολλαπλοτητας s στο $z = 0$ ειναι η συναρτηση

$$B(z) := z^s \prod_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{z}_i}{|z_i|} \frac{z_i - z}{1 - \bar{z}_i z} \ .$$

Παρατήρηση

• *Το απειρογινομενο συγκλινει για καθε* $z \in \mathbb{D}$.

• *Η* B *ειναι εσωτερικη συναρτηση.*

• *Οι ριζες της* B *ειναι ακριβως τα σημεια* $\{z_k\}$ *(με τις πολλαπλοτητες που εμφανιζονται) καθως και το* 0 *με πολλαπλοτητα* s.

Αποδειξεις στο blaschke.pdf

Ριζες Εσωτερικων συναρτησεων

Σημειωση: Αν $Z(B)$ το συνολο των ριζων της B και s_w η πολλαπλοτητα της ριζας w

$$B(z) = z^s \prod_{w \in Z(B) \setminus \{0\}} \left(\frac{\bar{w}}{|w|} \frac{w - z}{1 - \bar{w} z} \right)^{s_w} .$$

Παράδειγμα

Υπάρχει $f \in H^2$ (μαλιστα, εσωτερικη) που δεν επεκτεινεται σε κανενα σημειο της περιφερειας $\mathbb{T}$ σε ολομορφη συναρτηση.

Παρατηρηση [Δ.Ε.] Μαλιστα, δεν επεκτεινεται καν σε συνεχη συναρτηση.

Singular inner functions (δειτε και το singinner24.pdf)

Ορισμός

Μια εσωτερικη συναρτηση $\varphi \in H^\infty$ λεγεται ιδιαζουσα εσωτερικη συναρτηση (singular inner function) αν δεν ειναι σταθερη και δεν εχει ριζες στον $\mathbb{D}$.

Παράδειγμα

$\varphi(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right), \quad z \in \mathbb{D}\,.$

Παράδειγμα

$\varphi(z) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{z+e^{i\theta_k}}{z-e^{i\theta_k}} a_k\right), \quad z \in \mathbb{D}$ οπου $a_k > 0$ και $\theta_k \in [0, 2\pi]$.

Singular inner functions

Θεώρημα

Μια $S : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ *ειναι ιδιαζουσα εσωτερικη συναρτηση αν-ν ειναι της μορφης*

$$S(z) = c \exp\left(-\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \, d\mu(e^{it}) \right), \quad z \in \mathbb{D}$$

οπου $c \in \mathbb{T}$ *και* μ *ειναι κανονικο θετικο μη μηδενικο μετρο Borel στον* $\mathbb{T}$ *που ειναι* καθετο ή ιδιαζον *ως προς το μετρο Lebesgue.*

(Ενα θετικο μετρο Borel στον $\mathbb{T}$ λεγεται *καθετο ή ιδιαζον* ως προς το μετρο Lebesgue m αν ειναι συγκεντρωμενο σε ενα m-μηδενικο συνολο $A \subseteq \mathbb{T}$, αν δηλαδη $\mu(A^c) = 0$ και $m(A) = 0$.)

Singular inner functions

Θα χρειασθει το ακολουθο Θεωρημα αναπαραστασης:

Θεώρημα (Herglotz)

Εστω $h : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ *ολομορφη ωστε* $\mathrm{Re}\, h(z) > 0$ *για καθε* $z \in \mathbb{D}$. *Τοτε υπαρχει κανονικο θετικο μετρο Borel* μ *στον* $\mathbb{T}$ *ωστε*

$$h(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\, d\mu(e^{it}) + i\, \mathrm{Im}(h(0)), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Λήμμα

Εστω μ *κανονικο θετικο μετρο Borel στον* $\mathbb{T}$. *Οριζουμε*

$$F(z) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\, d\mu(e^{it}) \quad z \in \mathbb{D}.$$

Τοτε η F *ειναι ολομορφη στο* $\mathbb{D}$.

Αποδειξεις στο singinner24.pdf

Παραγοντοποιηση εσωτερικων συναρησεων

Πρόταση

Καθε εσωτερικη συναρτηση $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ *παραγοντοποιειται ως* $\phi = BS$*, οπου* B *ειναι το γινόμενο Blaschke*

$$B(z) = z^s \prod_{w \in Z(\phi) \setminus \{0\}} \left(\frac{\bar{w}}{|w|} \frac{w - z}{1 - \bar{w}z} \right)^{s_w}, \quad z \in \mathbb{D}$$

που οριζεται απο το συνολο $Z(\phi)$ *των ριζων της* ϕ *(με την πολλαπλοτητα* s_w *της καθεμιας) και* S *ειναι ιδιαζουσα εσωτερικη συναρτηση της μορφης*

$$S(z) = c \exp\left(-\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \, d\mu(e^{it}) \right), \quad z \in \mathbb{D}$$

οπου $c \in \mathbb{T}$ *και* μ *ειναι κανονικο θετικο μετρο Borel στον* $\mathbb{T}$ *που ειναι* καθετο (ή ιδιαζον) *ως προς το μετρο Lebesgue.*

Συνεπειες για τους αναλλοιωτους υποχωρους του shift

Υπενθυμιση (Θ. Beurling): $\mathrm{Lat}(S) = \{\phi H^2 : \phi \text{ εσωτερικη } \} \cup \{0\}$.

Παράδειγμα

Για $a \in [0,1]$ θετουμε $\phi_a(z) := \exp\left((1-a)\frac{z+1}{z-1}\right)$. Εχουμε

$$0 \leq a \leq b \leq 1 \ \Rightarrow \ \phi_0 H^2 \subseteq \phi_a H^2 \subseteq \phi_b H^2 \subseteq \phi_1 H^2 = H^2 .$$

Δηλαδη η απεικονιση $[0,1] \to \mathrm{Lat}(S) : a \mapsto \phi_a$ (ειναι 1-1 και) διατηρει τη διαταξη.

Θα δουμε σε λιγο οτι η συνεπαγωγη $\Rightarrow$ ειναι στην πραγματικοτητα ισοδυναμια $\Leftrightarrow$.

Δηλαδη ο συνδεσμος $\mathrm{Lat}(S)$ εχει υποσυνδεσμους ισομορφους ως προς τη διαταξη με το $[0,1]$ (με τη φυσιολογικη του διαταξη).

Συνεπειες για τους αναλλοιωτους υποχωρους του shift

Πρόταση

Θεωρουμε δυο εσωτερικες συναρτησεις ϕ_1 *και* ϕ_2*. Τοτε εχουμε* $\phi_1 H^2 \subseteq \phi_2 H^2$ *αν-ν η* ϕ_1/ϕ_2 *ειναι εσωτερικη συναρτηση.*
Αυτο συμβαινει αν-ν

- *καθε ριζα* z *της* ϕ_2 *ειναι ριζα της* ϕ_1 *με την ιδια ή μεγαλυτερη πολλαπλοτητα* ($\mathrm{mult}_1(z) \geq \mathrm{mult}_2(z)$) και
- *εχουμε* $\mu_2(E) \leq \mu_1(E)$ *για καθε Borel* $E \subseteq \mathbb{T}$*, οπου* μ_i *ειναι το ιδιαζον μετρο που αντιστοιχει στην* ϕ_i*.*

Λήμμα

Αν μ *και* ν *ειναι θετικα πεπερασμενα μετρα Borel στο* $[0, 2\pi]$ *και*

$$\exp\left(-\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, d\mu(t)\right) = \exp\left(-\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, d\nu(t)\right)$$

για καθε $z \in \mathbb{D}$*, τοτε* $\mu = \nu$*.*

Συνεπειες για τους αναλλοιωτους υποχωρους του shift

Πρόταση

Εστω ϕ εσωτερικη συναρτηση. Ο υποχωρος ϕH^2 του H^2 εχει πεπερασμενη συνδιασταση (δηλαδη $\dim(\phi H^2)^\perp = m < \infty$) αν-ν η ϕ ειναι γινομενο Blaschke με πεπερασμενο πληθος ($= m$) παραγοντων (επι μια σταθερα).

Παρατηρηση

Για $a \in [0,1]$ θετουμε $\phi_a := BS_{\mu_a}$ οπου B γινομενο Blaschke και S_{μ_a} ιδιαζουσα εσωτερικη συναρτηση με μετρο $\mu_a := (1-a)\mu$ οπου μ θετικο μετρο. Εχουμε

$$0 \leq a \leq b \leq 1 \iff \phi_0 H^2 \subseteq \phi_a H^2 \subseteq \phi_b H^2 \subseteq \phi_1 H^2 = BH^2 .$$

Αν $\mu \neq 0$, οι υποχωροι $\phi_a H^2$ ειναι διαφορετικοι ανα δυο: σχηματιζουν απειρη αλυσιδα (ισομορφη με το $[0,1]$) μεταξυ των $\phi_0 H^2$ και $\phi_1 H^2$. Επισης, αν το B ειναι απειρογινομενο, οι υποχωροι $BH^2 \subseteq B_1 H^2 \subseteq \ldots$ του H^2 οπου $\frac{B_n}{B_{n+1}}$ πρωτοβαθμιος παραγοντας Blaschke, ειναι απειρη αλυσιδα (ισομορφη με το $\mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$) μεταξυ των $\phi_1 H^2$ και H^2.

Συνεπειες για τους αναλλοιωτους υποχωρους του shift

Ορισμός

Αν ϕ_1, ϕ_2 ειναι εσωτερικες συναρτησεις, λεμε οτι η ϕ_2 διαιρει την ϕ_1 αν υπαρχει ϕ_3 εσωτερικη ωστε $\phi_1 = \phi_2\phi_3$.
Εστω $\{\phi_i, i \in I\}$ οικογενεια εσωτερικων συναρτησεων. Λεμε οτι η εσωτερικη συναρτηση ϕ_M ειναι ο μεγιστος κοινος διαιρετης της $\{\phi_i, i \in I\}$ αν (α) η ϕ_M διαιρει καθε ϕ_i, $i \in I$ και (β) καθε αλλη εσωτερικη συναρτηση ϕ που διαιρει την $\{\phi_i, i \in I\}$, διαιρει και την ϕ_M.
Λεμε οτι η εσωτερικη συναρτηση ϕ_E ειναι το ελαχιστο κοινο πολλαπλασιο της $\{\phi_i, i \in I\}$ αν (α) καθε ϕ_i, $i \in I$ διαιρει την ϕ_E και (β) αν μια εσωτερικη συναρτηση ϕ διαιρειται απο ολες τις ϕ_i τοτε διαιρειται και απο την ϕ_E.

Συνεπειες για τους αναλλοιωτους υποχωρους του shift

Πρόταση

Καθε οικογενεια $\{\phi_i, i \in I\}$ *εσωτερικων συναρτησεων εχει μεγιστο κοινο διαιρετη.*
Καθε πεπερασμενη οικογενεια $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ *εσωτερικων συναρτησεων εχει ελαχιστο κοινο πολλαπλασιο.*

Παράδειγμα

Οικογενεια εσωτερικων συναρτησεων που δεν εχει ελαχιστο κοινο πολλαπλασιο;

Πρόταση

Αν E *ειναι μη μηδενικος κλειστος* S*-αναλλοιωτος υποχωρος του* H^2*, τοτε* $E = \phi H^2$ *οπου η* ϕ *ειναι ο μεγιστος κοινος διαιρετης των εσωτερικων μερων ολων των* $f \in E$*.*

Πινακες Toeplitz

Υπενθυμιση Αν $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ ορθοκανονικη βαση χωρου Hilbert H, σε καθε $A \in \mathcal{B}(H)$ αντιστοιχει πινακας $[a_{nm}]$ οπου $[a_{nm}] = \langle Ae_m, e_n \rangle$.

Αν $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$, ο πινακας του τελεστη M_ϕ ως προς τη συνηθισμενη ο/κ βαση $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$ του $L^2(\mathbb{T})$ ειναι

$$\begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \dots & \hat{\phi}(0) & \hat{\phi}(-1) & \hat{\phi}(-2) & \hat{\phi}(-3) & \hat{\phi}(-4) & \dots \\ \dots & \hat{\phi}(1) & \hat{\phi}(0) & \hat{\phi}(-1) & \hat{\phi}(-2) & \hat{\phi}(-3) & \dots \\ \dots & \hat{\phi}(2) & \hat{\phi}(1) & \color{red}{\hat{\phi}(0)} & \hat{\phi}(-1) & \hat{\phi}(-2) & \dots \\ \dots & \hat{\phi}(3) & \hat{\phi}(2) & \hat{\phi}(1) & \hat{\phi}(0) & \hat{\phi}(-1) & \dots \\ \dots & \hat{\phi}(4) & \hat{\phi}(3) & \hat{\phi}(2) & \hat{\phi}(1) & \hat{\phi}(0) & \dots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = [\hat{\phi}(n-m)].$$

Πινακες Toeplitz

Πρόταση

Αν $A \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T}))$ *εχει* $[a_{nm}] = [u(m-n)]$ *στη συνηθισμενη ο/κ βαση, τοτε υπαρχει* $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ *ωστε* $A = M_\phi$.

Ορισμός

Ενας πινακας (ειτε $n \times n$ ειτε $\infty \times \infty$) λεγεται πινακας Toeplitz αν εχει «σταθερες διαγωνιους», δηλ. αν $m-n = j-i \Rightarrow a_{nm} = a_{ij}$ (ισοδυναμα, $a_{n,m} = a_{n+1,m+1}$ $\forall n, m$).

Πινακες Toeplitz

Υπενθυμιση: Το συνολο τιμων μιας $\phi \in C(\mathbb{T})$:

$$\mathrm{ran}(\phi) := \phi(\mathbb{T}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \{e^{it} \in \mathbb{T} : |\phi(e^{it}) - \lambda| = 0\} \neq \emptyset\}.$$

Αν $M_\phi : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T}) : f \mapsto \phi f$, τοτε

$$\sigma(M_\phi) = \sigma_a(M_\phi) = \mathrm{ran}(\phi).$$

Γενικευση:

Ορισμός

Το ουσιωδες συνολο τιμων (essential range) μιας $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$:

$$\mathrm{essran}(\phi) := \{\lambda \in \mathbb{C} : m(\{e^{it} \in \mathbb{T} : |\phi(e^{it}) - \lambda| < \varepsilon\}) > 0 \ \forall \varepsilon > 0\}.$$

Ειναι συμπαγες υποσυνολο του $\mathbb{C}$.

Πρόταση

Αν $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$,

$$\sigma(M_\phi) = \sigma_a(M_\phi) = \mathrm{essran}(\phi).$$

Τελεστες Toeplitz

Ορισμός

Η προβολη του Riesz $P \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T}))$ οριζεται απο τον τυπο

$$P\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k) f_k\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \hat{f}(n) f_n, \quad f \in L^2(\mathbb{T})$$

ισοδυναμα

$$P(f_n) = \begin{cases} f_n\,, & \text{αν } n \geq 0 \\ 0\,, & \text{αν } n < 0 \end{cases}$$

ειναι δηλαδη η ορθη προβολη του $L^2(\mathbb{T})$ επι του $\widetilde{H}^2$.

Ορισμός

Αν $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ οριζουμε τον τελεστη Toeplitz T_ϕ

$$T_\phi := PM_\phi|_{\widetilde{H}^2} : \widetilde{H}^2 \to \widetilde{H}^2 : f \mapsto M_\phi f \mapsto PM_\phi f\,.$$

Πινακες Toeplitz

Η $\{f_n : n \geq 0\}$ ειναι ορθοκανονικη βαση του $\widetilde{H}^2$ και η $\{f_n : n < 0\}$ ειναι ο/κ βαση του $(\widetilde{H}^2)^{\perp}$. Εστω $\phi \in L^{\infty}(\mathbb{T})$. Ως προς τη διασπαση $L^2(\mathbb{T}) = (\widetilde{H}^2)^{\perp} \oplus \widetilde{H}^2$ ο πινακας του τελεστη M_ϕ γινεται

$$M_\phi \simeq \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots \\ \dots & \hat{\phi}(0) & \hat{\phi}(-1) \\ \dots & \hat{\phi}(1) & \hat{\phi}(0) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \\ \hat{\phi}(-2) & \hat{\phi}(-3) & \hat{\phi}(-4) & \dots \\ \hat{\phi}(-1) & \hat{\phi}(-2) & \hat{\phi}(-3) & \dots \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dots & \hat{\phi}(2) & \hat{\phi}(1) \\ \dots & \hat{\phi}(3) & \hat{\phi}(2) \\ \dots & \hat{\phi}(4) & \hat{\phi}(3) \\ & \vdots & \vdots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \hat{\phi}(0) & \hat{\phi}(-1) & \hat{\phi}(-2) & \dots \\ \hat{\phi}(1) & \hat{\phi}(0) & \hat{\phi}(-1) & \dots \\ \hat{\phi}(2) & \hat{\phi}(1) & \hat{\phi}(0) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

Πινακες Toeplitz

Αρα

$$T_\phi = PM_\phi|_{\widetilde{H}^2} \simeq \begin{bmatrix} \hat{\phi}(0) & \hat{\phi}(-1) & \hat{\phi}(-2) & \hat{\phi}(-3) & \dots \\ \hat{\phi}(1) & \hat{\phi}(0) & \hat{\phi}(-1) & \hat{\phi}(-2) & \dots \\ \hat{\phi}(2) & \hat{\phi}(1) & \hat{\phi}(0) & \hat{\phi}(-1) & \dots \\ \hat{\phi}(3) & \hat{\phi}(2) & \hat{\phi}(1) & \hat{\phi}(0) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Ορισμός

Ενας τελεστης Toeplitz T_ϕ λεγεται αναλυτικος τελεστης Toeplitz αν $\phi \in \widetilde{H}^\infty$ (οποτε $T_\phi = M_\phi|_{\widetilde{H}^2} : \widetilde{H}^2 \to \widetilde{H}^2 : f \mapsto \phi f$).

$$T_\phi = M_\phi|_{\widetilde{H}^2} \simeq \begin{bmatrix} \hat{\phi}(0) & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \hat{\phi}(1) & \hat{\phi}(0) & 0 & 0 & \dots \\ \hat{\phi}(2) & \hat{\phi}(1) & \hat{\phi}(0) & 0 & \dots \\ \hat{\phi}(3) & \hat{\phi}(2) & \hat{\phi}(1) & \hat{\phi}(0) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Υπενθυμιση

Θεώρημα

Το συνολο των τελεστων στον $L^2(\mathbb{T})$ που μετατιθενται με τον M_1 ειναι το

$$\{M_\phi : \phi \in L^\infty(\mathbb{T})\}.$$

Πρόταση

Ο μεταθετης του unilateral shift T_1 στον $\widetilde{H}^2$ ειναι το συνολο των αναλυτικων τελεστων Toeplitz: Αν $A \in \mathcal{B}(\widetilde{H}^2)$, τοτε

$$AT_1 = T_1 A \iff A = T_\phi \text{ για καποιο } \phi \in \widetilde{H}^\infty.$$

Reminder: The (bilateral) shift W on $\ell^2(\mathbb{Z})$ and M_1 on $L^2(\mathbb{T})$

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z}) : f \mapsto (\hat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}}$$

$$f_n \mapsto e_n \; (n \in \mathbb{Z}).$$

$$\mathcal{F}_r := \mathcal{F}|_{\tilde{H}^2}$$

$$\begin{tikzcd}
\ell^2(\mathbb{Z}) \arrow[r, "W"] & \ell^2(\mathbb{Z}) \\
L^2(\mathbb{T}) \arrow[u, tail, two heads, "\mathcal{F}"] \arrow[r, "M_1"'] & L^2(\mathbb{T}) \arrow[u, tail, two heads, "\mathcal{F}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\ell^2(\mathbb{Z}_+) \arrow[r, "S"] & \ell^2(\mathbb{Z}_+) \\
\tilde{H}^2 \arrow[u, tail, two heads, "\mathcal{F}_r"] \arrow[r, "\tilde{T}_1"'] & \tilde{H}^2 \arrow[u, tail, two heads, "\mathcal{F}_r"']
\end{tikzcd}$$

$$(M_1 f)(e^{it}) = e^{it} f(e^{it}), \qquad \tilde{T}_1 = M_1|_{\tilde{H}^2}$$

Multiplication operators and Toeplitz operators

Εστω $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ και $M_\phi : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T}) : g \mapsto \phi g$.

$$\begin{tikzcd} \ell^2(\mathbb{Z}) \arrow[r, "\hat{M}_\phi"] & \ell^2(\mathbb{Z}) \\ L^2(\mathbb{T}) \arrow[u, "\mathcal{F}"] \arrow[r, "M_\phi"'] & L^2(\mathbb{T}) \arrow[u, "\mathcal{F}"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \ell^2(\mathbb{Z}_+) \arrow[r, "\hat{T}_\phi"] & \ell^2(\mathbb{Z}_+) \\ \tilde{H}^2 \arrow[u, "\mathcal{F}_r"] \arrow[r, "\tilde{T}_\phi"'] & \tilde{H}^2 \arrow[u, "\mathcal{F}_r"'] \end{tikzcd}$$

$$\hat{M}_\phi := \mathcal{F} M_\phi \mathcal{F}^*, \qquad \tilde{T}_\phi = P M_\phi|_{\tilde{H}^2}, \rightsquigarrow \hat{T}_\phi := \mathcal{F}_r \tilde{T}_\phi \mathcal{F}_r^*$$

$$\{W\}' = \{\hat{M}_\phi : \phi \in L^\infty(\mathbb{T})\} \subseteq \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T}))$$

$$\{\tilde{T}_1\}' = \{\tilde{T}_\phi : \phi \in \tilde{H}^\infty\} \subseteq \mathcal{B}(\tilde{H}^2)$$

$$\rightsquigarrow \{S\}' = \{\hat{T}_\phi : \phi \in \tilde{H}^\infty\} \subseteq \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}_+)).$$

Τελεστες Toeplitz

Πρόταση

Ενας φραγμενος τελεστης $A \in \mathcal{B}(\widetilde{H}^2)$ *ειναι τελεστης Toeplitz αν-ν εχει πινακα Toeplitz ως προς την ο/κ βαση* $\{f_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$.

Συνεπεια για $T \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}_+))$:

Πόρισμα

Ενας φραγμενος τελεστης $T \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}_+))$ *ειναι τελεστης Toeplitz, δηλαδη υπαρχει* $\phi \in \widetilde{H}^\infty$ *ωστε* $\langle Te_m, e_n \rangle = \hat{\phi}(n-m)$, *αν-ν*

$$S^*TS = T.$$

Τελεστες Toeplitz

Παρατηρηση Η απεικονιση $L^\infty(\mathbb{T}) \to \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T})) : \phi \mapsto M_\phi$

- Ειναι γραμμικη: $M_{\phi+\lambda\psi} = M_\phi + \lambda M_\psi$
- Διατηρει τη μοναδα: $M_1 = I$
- Διατηρει την ενελιξη: $M_{\bar\phi} = M_\phi^*$
- Ειναι συστολη (μαλιστα ισομετρια): $\|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty$
- Διατηρει το γινομενο: $M_{\phi\psi} = M_\phi M_\psi$

Πρόταση

Η απεικονιση $L^\infty(\mathbb{T}) \to \mathcal{B}(\widetilde{H}^2) : \phi \mapsto T_\phi = PM_\phi|_{\widetilde{H}^2}$

- *Ειναι γραμμικη:* $T_{\phi+\lambda\psi} = T_\phi + \lambda T_\psi$
- *Διατηρει τη μοναδα:* $T_1 = I$
- *Διατηρει την ενελιξη:* $T_{\bar\phi} = T_\phi^*$
- *Ειναι συστολη:* $\|T_\phi\| \leq \|\phi\|_\infty$ *και 1-1 (αργοτερα θα δειχθει ισομετρια)*
- *Δεν διατηρει το γινομενο*

(πχ. $f_{-1}f_1 = f_1 f_{-1}$ *ενω* $T_{f_{-1}}T_{f_1} \neq T_{f_1}T_{f_{-1}}$*).*

Τελεστες Toeplitz

Πρόταση

Αν $\phi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$*, ο τελεστης* $T_\psi T_\phi$ *ειναι Toeplitz αν-ν ειτε* $\phi \in \widetilde{H}^\infty$ *ειτε* $\bar{\psi} \in \widetilde{H}^\infty$*. Τοτε εχουμε* $T_\psi T_\phi = T_{\psi\phi}$*.*

Θα χρειασθουν

Συμβολισμος Αν H Hilbert και $f, g \in H$ ο τελεστης $fg^* \in \mathcal{B}(H)$ οριζεται ως εξης:

$$fg^* : h \mapsto \langle h, g \rangle f, \ f \in H.$$

Αν $A, B \in \mathcal{B}(H)$ τοτε $A(fg^*)B = (Af)(B^*g)^*$.

Λήμμα

Αν $\phi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$*,*

$$T_1^*(T_\psi T_\phi)T_1 - (T_\psi T_\phi) = fg^*$$

οπου $f = P(f_{-1}\psi)$ *και* $g = P(f_{-1}\bar{\phi})$*.*

Τελεστες Toeplitz

Πόρισμα

Αν $\phi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$*, εχουμε* $T_\psi T_\phi = 0$ *αν-ν ειτε* $T_\psi = 0$ *ειτε* $T_\phi = 0$*.*

Ποτε μετατιθενται; Ελεγχουμε οτι αν και οι δυο $\phi, \psi \in \widetilde{H}^\infty$, ή και οι δυο $\bar{\phi}, \bar{\psi} \in \widetilde{H}^\infty$, ή $\exists a, b \in \mathbb{C}$ ωστε $a\psi + b\phi = f_0 = 1$, τοτε μετατιθενται.

Πρόταση

Εστω $\phi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$*. Εχουμε* $T_\psi T_\phi = T_\phi T_\psi$ *αν-ν ισχυει (τουλαχιστο) ενα απο τα ακολουθα*

- *οι* ϕ *και* ψ *ανηκουν στον* $\widetilde{H}^\infty$*,*
- *οι* $\bar{\phi}$ *και* $\bar{\psi}$ *ανηκουν στον* $\widetilde{H}^\infty$*,*
- *υπαρχουν* $a, b \in \mathbb{C}$ *με* $|a| + |b| \neq 0$ *ωστε* $a\psi + b\phi = c1$ *οπου* $c \in \mathbb{C}$*.*

Πόρισμα

Αν $\phi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$ *και εχουμε* $T_\psi T_\phi = T_\phi T_\psi$*, τοτε ειτε ο* $T_\psi T_\phi$ *ειναι Toeplitz ή μια απ τις* ϕ, ψ *ειναι γραμμ. συνδυασμος της αλλης και της* 1*.*

Τελεστες Toeplitz

Παρατήρηση

Ενας τελεστης Toeplitz T_ϕ *ειναι αυτοσυζυγης αν-ν η* ϕ *παιρνει σ.π. πραγματικες τιμες (γιατι* $T_\phi^* = T_{\bar{\phi}}$*).*

Πόρισμα

Ενας τελεστης Toeplitz T_ϕ *ειναι φυσιολογικος αν-ν υπαρχουν* $c, d \in \mathbb{C}$ *και* $\psi \in L^\infty(\mathbb{T})$ *πραγματικη ωστε* $\phi = c\psi + d$ *σ.π.*

Το φασμα τελεστων Toeplitz

Ορισμός (Υπενθυμιση)

Το ουσιωδες συνολο τιμων (essential range) μιας $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$:

$$\operatorname{essran}(\phi) := \{\lambda \in \mathbb{C} : m(\{e^{it} \in \mathbb{T} : |\phi(e^{it}) - \lambda| < \varepsilon\}) > 0 \ \forall \varepsilon > 0\}.$$

Δηλ. $\lambda \notin \operatorname{essran}(\phi) \iff \exists \varepsilon > 0 : m(B(\lambda, \varepsilon) \cap \operatorname{ran}(\phi)) = 0.$

Πρόταση (Υπενθυμιση)

Αν $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$,

$$\sigma(M_\phi) = \sigma_a(M_\phi) = \operatorname{essran}(\phi).$$

Θεώρημα

Αν $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$, *τοτε* $\sigma(M_\phi) \subseteq \sigma(T_\phi)$. *Μαλιστα*

$$\sigma(M_\phi) = \sigma_a(M_\phi) \subseteq \sigma_a(T_\phi) \subseteq \sigma(T_\phi).$$

Το φασμα τελεστων Toeplitz

Παρατήρηση

Ο εγκλεισμος $\sigma(M_\phi) \subseteq \sigma(T_\phi)$ *ειναι συνηθως γνησιος. Για παραδειγμα, αν* $\phi = f_1$ *τοτε* $\sigma(M_\phi) = \sigma(W) = \mathbb{T}$ *ενω* $\sigma(T_\phi) = \sigma(S) = \overline{\mathbb{D}}$ *(οπως εχουμε δειξει).*

Πόρισμα

Για καθε $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$*,*

$$\|\phi\|_\infty = \|M_\phi\| = \|T_\phi\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T_\phi)\}.$$

Ειδικοτερα η $\phi \mapsto T_\phi$ *ειναι ισομετρια.*

Το φασμα τελεστων Toeplitz

Πρόταση

Αν $\phi \in H^\infty$ *τοτε*

$$\sigma(T_\phi) = \overline{\phi(\mathbb{D})}\,.$$

Εστω $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$.

Θεώρημα (Coburn alternative)

Αν $T_\phi \neq 0$ *τοτε ή ο* T_ϕ *ειναι 1-1 ή ο* T_ϕ^* *ειναι 1-1.*

Πόρισμα

Αν $T_\phi \neq 0$ *και δεν ειναι 1-1 τοτε εχει πυκνο συνολο τιμων.*

Πόρισμα

Εστω $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ *μη σταθερα. Αν* $\lambda \in \sigma_p(T_\phi)$ *τοτε* $\bar{\lambda} \notin \sigma_p(T_\phi^*)$.
Ειδικοτερα, αν η ϕ *παιρνει σ.π. πραγματικες τιμες, τοτε* $\sigma_p(T_\phi) = \emptyset$.

Ο δεικτης στροφης

Υπενθυμιση Εστω $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ κλειστη κατα τμηματα συνεχως διαφορισιμη καμπυλη στο $\mathbb{C}$ και $\lambda \notin [\gamma]$ οπου $[\gamma] := \{\gamma(t) : t \in [0,1]\} \subseteq \mathbb{C}$.
Ο δεικτης στροφης $\mathrm{wind}(\gamma;\lambda) = n(\gamma;\lambda)$ οριζεται απο το επικαμπυλιο ολοκληρωμα

$$\mathrm{wind}(\gamma;\lambda) = n(\gamma;\lambda) := \frac{1}{2\pi i}\int_{[\gamma]} \frac{1}{z-\lambda}\,dz\,.$$

Θα δειξουμε οτι ο δεικτης στροφης επεκτεινεται σε ολες τις συνεχεις κλειστες καμπυλες $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$. Αν $f \in C(\mathbb{T})$, γραφουμε $n(f;\lambda)$ για τον δεικτη στροφης της $\gamma_f(t) := f(e^{2\pi i t})$, $t \in [0,1]$.
Ο δεικτης αυτος οριζεται ως εξης: $\rightsquigarrow$

Ο δεικτης στροφης

Ορισμός

Αν $f \in C(\mathbb{T})$ και $0 \notin f(\mathbb{T})$, οριζουμε

$$\mathrm{wind}(f;0) = n(f;0) := g_f(1) - g_f(0)$$

οπου $g_f : [0,1] \to \mathbb{C}$ ειναι οποιαδηποτε συνεχης συναρτηση που ικανοποιει $f(e^{2\pi it}) = e^{2\pi i g_f(t)}$, $t \in [0,1]$.
Αν $f \in C(\mathbb{T})$ και $\lambda \in \mathbb{C} \setminus f(\mathbb{T})$, οριζουμε

$$\mathrm{wind}(f;\lambda) = n(f;\lambda) := n(f_\lambda;0)$$

οπου $f_\lambda = f - \lambda 1$.

Τετοια g_f υπαρχει:

Πρόταση

Αν η $\gamma \in C([0,1])$ δεν μηδενιζεται πουθενα *(ισοδυναμα, αν ειναι αντιστρεψιμο στοιχειο της αλγεβρας* $C([0,1])$*), τοτε υπαρχει (μη μοναδικη)* $g \in C([0,1])$ *ωστε* $\gamma = e^g$.

Ο δεικτης στροφης

Πρόταση

Ο δεικτης στροφης εχει τις ακολουθες ιδιοτητες:
αν οι $f, h \in C(\mathbb{T})$ *δεν μηδενιζονται πουθενα,*

1. $n(fh;0) = n(f;0) + n(h;0)$
2. $n(f;0) = n \in \mathbb{Z} \iff \exists\, u \in C(\mathbb{T})$ *ωστε* $f = f_n e^u$ *(οπου* $f_n(e^{it}) = e^{int}$, $e^{it} \in \mathbb{T}$*)*
3. *αν επιπλεον η* f *ειναι συνεχως παραγωγισιμη,*

$$n(f;0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_f} \frac{1}{z} dz$$

οπου $\gamma_f(t) = f(e^{2\pi i t})$, $t \in [0,1]$.

Αποδειξεις στο Ind24.pdf.

Το φασμα τελεστων Toeplitz

Θεώρημα

Αν $\phi \in C(\mathbb{T})$,

$$\sigma(T_\phi) = \mathrm{ran}(\phi) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \notin \mathrm{ran}(\phi) \ \wedge \ n(\phi;\lambda) \neq 0\}.$$

Αποδειξη στο specTf.pdf.