

## Σχετικά με το φάσμα τελεστή

**Παρατηρήσεις** Θεωρούμε <sup>1</sup> δυο χώρους Banach  $E$  και  $F$  και μια (μη μηδενική) γραμμική απεικόνιση  $T : E \rightarrow F$ . Αν η  $T$  είναι φραγμένη με φραγμένο αντίστροφο, τότε η εικόνα  $\text{im}(T)$  είναι ίση με  $F$ , ειδικότερα είναι πυκνή στον  $F$  και υπάρχουν θετικοί αριθμοί  $m, M$  ώστε

$$m\|x\| \leq \|Tx\| \leq M\|x\| \quad \text{για κάθε } x \in E. \quad (*)$$

Μπορούμε να πάρουμε  $M = \|T\|$  και  $m = 1/\|T^{-1}\|$ , αφού  $\|x\| = \|T^{-1}(Tx)\| \leq \|T^{-1}\|\|Tx\|$ .

Αντίστροφα, αν η  $T$  έχει πυκνή εικόνα και ικανοποιεί τις ανισότητες (\*), τότε βεβαίως είναι 1-1, όμως είναι και επί, γιατί το σύνολο τιμών της είναι κλειστό:

Πράγματι, αν  $Tx_n \rightarrow y$  τότε η ανισότητα  $m\|x_i - x_j\| \leq \|Tx_i - Tx_j\|$  δείχνει ότι η ακολουθία  $(x_n)$  είναι Cauchy στον  $E$ , οπότε (πληρότητα!) συγκλίνει σε κάποιο  $x$ , και τότε, αφού ο  $T$  είναι φραγμένος (από το  $M$ ), έχουμε  $y = \lim Tx_n = T(\lim x_n) = Tx$ .

Δηλαδή η απεικόνιση  $T^{-1} : Tx \mapsto x : F \rightarrow E$  είναι καλά ορισμένη και γραμμική, και η ανισότητα  $m\|T^{-1}(Tx)\| \leq \|Tx\|$  δείχνει ότι είναι φραγμένη (από  $1/m$ ).

Συμπέρασμα:

**Πρόταση 1.** Ένας φραγμένος τελεστής  $T : E \rightarrow F$  είναι αντιστρέψιμος αν-ν έχει πυκνή εικόνα και υπάρχει  $m > 0$  ώστε  $\|Tx\| \geq m\|x\|$  για κάθε  $x \in E$  (λέμε «ο  $T$  είναι κάτω φραγμένος στη μοναδιαία σφαίρα του  $E$ »).

Έστω  $E$  χώρος Banach.

Το **φάσμα** ενός φραγμένου τελεστή  $A : E \rightarrow E$  είναι το σύνολο

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{o } A - \lambda I \text{ δεν έχει (φραγμ.) αντίστροφο}\}.$$

Ισχύει ότι το φάσμα  $\sigma(A)$  είναι συμπαγές μη κενό (!) υποσύνολο του  $\mathbb{C}$  και ότι

$$\sigma(A) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|A\|\}.$$

**Ορισμός 1.** Έστω  $A \in \mathcal{B}(E)$ . Το **σημειακό φάσμα (point spectrum)**  $\sigma_p(A)$  του  $A$  είναι το σύνολο των ιδιοτιμών του:

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(A - \lambda I) \neq \{0\}\}.$$

Το **προσεγγιστικά σημειακό φάσμα (approximate point spectrum)**  $\sigma_a(A)$  του  $A$  είναι το σύνολο των **προσεγγιστικών ιδιοτιμών (approximate eigenvalues)**, δηλαδή το σύνολο των  $\lambda$  ώστε ο  $A - \lambda I$  να μην είναι κάτω φραγμένος στη μοναδιαία σφαίρα του  $E$ :

$$\sigma_a(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in E : \|(A - \lambda I)x_\varepsilon\| < \varepsilon\|x_\varepsilon\|\}.$$

Το **φάσμα συμπίεσης (compression spectrum)**  $\sigma_c(A)$  του  $A$  είναι το σύνολο

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{(A - \lambda I)(E)} \neq E\}.$$

Ένα  $\lambda \in \mathbb{C}$  είναι προσεγγιστική ιδιοτιμή του  $A$  αν και μόνον αν υπάρχει ακολουθία  $(x_n)$  στον  $E$  με  $\|x_n\| = 1$  ώστε  $\|(A - \lambda I)x_n\| \rightarrow 0$ .

<sup>1</sup>specS245, 13 Οκτωβρίου 2024

Τα σύνολα  $\sigma_a(A)$  και  $\sigma_c(A)$  σε χώρους πεπερασμένης διάστασης είναι ίσα και ταυτίζονται με το (σημειακό) φάσμα. Σε απειροδιάστατους χώρους μπορεί να μην ταυτίζονται.<sup>2</sup> Πάντοτε όμως,

**Πρόταση 2.** Η ένωση  $\sigma_a(A) \cup \sigma_c(A)$  ισούται με  $\sigma(A)$ .

*Απόδειξη.* Εφαρμόζουμε την Πρόταση 1 στον τελεστή  $T_\lambda = A - \lambda I : E \rightarrow E$ :

Έχουμε  $\lambda \notin \sigma_a(A)$  αν-ν ο  $T_\lambda$  είναι κάτω φραγμένος στη μοναδιαία σφαίρα του  $E$ , και έχουμε  $\lambda \notin \sigma_c(A)$  αν-ν το σύνολο τιμών του  $T_\lambda$  είναι πυκνό στον  $E$ . Συνεπώς, από την Πρόταση 1, έχουμε  $\lambda \notin \sigma_a(A) \cup \sigma_c(A)$  αν-ν ο  $T_\lambda$  είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή αν-ν  $\lambda \notin \sigma(A)$ .  $\square$

Το φάσμα συμπίεσης είναι κατά κάποιον τρόπο δυϊκό προς το σημειακό φάσμα. Αυτό φαίνεται πιο εύκολα σε χώρους Hilbert. Θα χρειασθεί ένα Λήμμα:

**Λήμμα 3.** Έστω  $\mathcal{H}$  χώρος Hilbert και  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ . Τότε

$$\ker T = (T^*(\mathcal{H}))^\perp \quad \text{και} \quad \overline{T(\mathcal{H})} = (\ker T^*)^\perp.$$

Επομένως ο  $T$  είναι 1-1 αν και μόνον αν το σύνολο τιμών του  $T^*$  είναι πυκνό.

*Απόδειξη.* Έχουμε  $Tx = 0$  αν και μόνον αν  $\langle Tx, y \rangle = 0$  για κάθε  $y \in \mathcal{H}$ , αν και μόνον αν  $\langle x, T^*y \rangle = 0$  για κάθε  $y \in \mathcal{H}$ , αν και μόνον αν το  $x$  είναι κάθετο στο σύνολο τιμών του  $T^*$ , αν και μόνον αν το σύνολο τιμών του  $T^*$  δεν είναι πυκνό.

Για την δεύτερη ισότητα, εφαρμόζοντας την πρώτη στον  $T^*$  έχουμε  $(\ker T^*)^\perp = (T(\mathcal{H}))^{\perp\perp} = \overline{T(\mathcal{H})}$ .  $\square$

**Λήμμα 4.** Έστω  $\mathcal{H}$  χώρος Hilbert και  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ . Τότε

$$(i) \sigma(T^*) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma(T)\}$$

$$(ii) \sigma_p(T) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma_c(T^*)\} \text{ και } \sigma_c(T) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma_p(T^*)\}.$$

*Απόδειξη.* Οι σχέσεις  $AB = I = BA$  και  $B^*A^* = I = A^*B^*$  είναι ισοδύναμες. Επομένως ο  $A$  είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν ο  $A^*$  είναι αντιστρέψιμος και μάλιστα  $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ . Η (i) έπεται θέτοντας  $A = T - \lambda I$ .

Για την (ii), εφαρμόζουμε το προηγούμενο Λήμμα: έχουμε  $\ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$  αν και μόνον αν το  $(T^* - \bar{\lambda}I)(\mathcal{H})$  δεν είναι πυκνό.  $\square$

---

<sup>2</sup>Για παράδειγμα, όπως θα δούμε στο Παράδειγμα 5, για τον τελεστή της μετατόπισης  $S$ , το  $\sigma_a(S)$  είναι η μοναδιαία περιφέρεια  $\mathbb{T}$ , ενώ το  $\sigma_c(S)$  είναι ο ανοικτός μοναδιαίος δίσκος  $\mathbb{D}$ , οπότε  $\sigma_c(S) \cap \sigma_a(S) = \emptyset$ .

**Παράδειγμα 5.** Αν  $S \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}_+))$  είναι ο τελεστής της μετατόπισης  $S : e_n \mapsto e_{n+1}$  για κάθε  $n \geq 0$ , τότε

$$\sigma_p(S) = \emptyset, \quad \sigma_a(S) = \mathbb{T}, \quad \sigma_c(S) = \mathbb{D} \text{ και } \sigma(S) = \overline{\mathbb{D}}$$

(όπου  $\mathbb{D}$  ο ανοικτός μοναδιαίος δίσκος και  $\mathbb{T}$  η μοναδιαία περιφέρεια).

*Απόδειξη.* (i) Η σχέση  $\|Sx\| = \|x\|$  για κάθε  $x \in \ell^2$  δείχνει ότι  $\|S\| = 1$ , άρα  $\sigma(S) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$ .

(ii) Έστω  $\lambda \in \mathbb{C}$  και  $x = (x_n) \in \ell^2$  ώστε  $Sx = \lambda x$ , δηλαδή

$$(0, x_0, x_1, \dots) = (\lambda x_0, \lambda x_1, \dots).$$

Αν  $\lambda = 0$  τότε η σχέση αυτή δείχνει ότι  $x = 0$ . Αν  $\lambda \neq 0$  τότε από την σχέση  $\lambda x_0 = 0$  έχουμε  $x_0 = 0$ , από την σχέση  $\lambda x_1 = x_0$  έχουμε  $x_1 = 0$  και ούτω καθεξής, άρα πάλι  $x = 0$ . Επομένως  $\sigma_p(S) = \emptyset$ .

(iii) Ισχυρίζομαι ότι  $\sigma_p(S^*) = \mathbb{D}$ .

Πράγματι, έστω  $\lambda \in \mathbb{C}$  και  $x = (x_n) \in \ell^2, x \neq 0$  τέτοιο ώστε  $S^*x = \lambda x$ , δηλαδή

$$(x_1, x_2, \dots) = (\lambda x_0, \lambda x_1, \dots).$$

Τότε  $x_1 = \lambda x_0, x_2 = \lambda x_1 = \lambda^2 x_0$  και γενικά  $x_n = \lambda^n x_0$ . Επειδή  $x \in \ell^2$ , έπεται ότι  $\sum_n |\lambda|^{2n} < \infty$  (διότι  $x_0 \neq 0$  αφού  $x \neq 0$ ) άρα  $|\lambda| < 1$ .

Αντίστροφα αν  $\lambda \in \mathbb{D}$  τότε το διάνυσμα  $x_\lambda := (1, \lambda, \lambda^2, \dots)$  είναι μη μηδενικό στοιχείο του  $\ell^2$  και ικανοποιεί  $S^*x = \lambda x$ , άρα  $\lambda \in \sigma_p(S^*)$ .

(iv) Έπεται τώρα ότι  $\sigma(S) = \overline{\mathbb{D}}$ .

Πράγματι, έχουμε  $\mathbb{D} = \sigma_p(S^*) \subseteq \sigma(S^*) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$  άρα  $\sigma(S^*) = \overline{\mathbb{D}}$  εφόσον το  $\sigma(S^*)$  είναι κλειστό. Επομένως  $\sigma(S) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma(S^*)\} = \overline{\mathbb{D}}$ .

(v) Εφόσον  $\sigma_a(S) \subseteq \sigma(S) = \overline{\mathbb{D}}$ , για να δείξουμε ότι  $\sigma_a(S) \subseteq \mathbb{T}$ , αρκεί να δειχθεί ότι αν  $\lambda \in \mathbb{D}$  τότε  $\lambda \notin \sigma_a(S)$ , δηλαδή ότι ο  $S - \lambda I$  είναι κάτω φραγμένος στη μοναδιαία σφαίρα. Πράγματι για κάθε  $x \in \ell^2$  έχουμε

$$\|(S - \lambda I)x\| \geq \|Sx\| - \|\lambda x\| = \|\|x\| - \|\lambda x\|\| = (1 - |\lambda|) \|x\|.$$

Τέλος, αν  $\lambda \in \mathbb{T}$ , δείχνουμε ότι  $\lambda \in \sigma_a(S)$ :

Εφόσον  $\lambda \in \overline{\mathbb{D}} = \sigma(S)$ , έχουμε ότι  $\lambda \in \sigma(S) = \sigma_a(S) \cup \sigma_c(S)$ . Όμως  $\sigma_c(S) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma_p(S^*)\}$  (Λήμμα 4) και ξέρουμε ότι  $\sigma_p(S^*) = \mathbb{D}$ , οπότε  $\sigma_c(S) = \mathbb{D}$ , άρα  $\lambda \notin \sigma_c(S)$ , και συνεπώς  $\lambda \in \sigma_a(S)$ .  $\square$

*Παρατήρηση* Στο (iii) δείξαμε ότι κάθε  $\lambda \in \mathbb{D}$  είναι ιδιοτιμή του  $S^*$  και επιπλέον ότι ο αντιστοιχος ιδιοχωρος είναι μονοδιαστατος, είναι ο χωρος που παραγεται απο το διανυσμα  $\lambda x$ .