

Διαφορική Γεωμετρία 1
Εξέταση Φεβρουαρίου 2021

ΘΕΜΑ 1 (5 μονάδες) Θεωρήστε τα παρακάτω διανυσματικά πεδία στον \mathbb{R}^3

$$V = \frac{\partial}{\partial x} + 2x \frac{\partial}{\partial z},$$
$$W = \frac{\partial}{\partial y} + 2y \frac{\partial}{\partial z}.$$

- (1.5 μονάδες) Να υπολογίσετε τις διαφορικές ροές Φ και Ψ των V και W αντίστοιχα. Είναι τα V, W πλήρη;
- (1 μονάδα) Να υπολογίσετε την αγκύλη $\text{Lie}[V, W]$.
- (1.5 μονάδες) Υπάρχει σύστημα συντεταγμένων (U, φ) , $\varphi(p) = (x^1(p), x^2(p), x^3(p))$ του \mathbb{R}^3 ώστε

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = V, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = W$$

στο U ; Αν ναι, να το βρείτε.

- (1 μονάδα) Έστω D η κατανομή διάστασης 2 του \mathbb{R}^3 με

$$D_{(x,y,z)} = \text{span}(V, W).$$

(α') Είναι η D involutive;

(β') Έστω $p = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$. Υπάρχει ολοκληρωτική υποπολλαπλότητα της D που να περιέχει το p ; Αν ναι, να την βρείτε.

ΘΕΜΑ 2 (2.5 μονάδες) Έστω M, N διαφορικές πολλαπλότητες και $F : M \rightarrow N$ μια ομαλή απεικόνιση. Έστω X, Y ομαλά διανυσματικά πεδία στην M και N αντίστοιχα, και ότι το Y είναι F -συσχετισμένο με το X . Αν Φ_t, Ψ_s είναι οι διαφορικές ροές των X και Y αντίστοιχα να δείξετε ότι

$$\Psi_t \circ F = F \circ \Phi_t.$$

ΘΕΜΑ 3 (2.5 μονάδες) Έστω E μια διανυσματική δέσμη πάνω από την διαφορική πολλαπλότητα M , και $\pi : E \rightarrow M$ η αντίστοιχη απεικόνιση προβολής. Να αποδείξετε ότι η π είναι submersion.

ΘΕΜΑ 4 (2.5 μονάδες) Θεωρήστε την 1-μορφή $\omega = \frac{1}{x}dx + dy$ στο $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$.

- Να εξετάσετε αν η ω είναι κλειστή.
- Αν $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow U$ και $\sigma : [0, 1] \rightarrow U$ είναι οι καμπύλες

$$\gamma(t) = (2 + \cos t, \sin t),$$
$$\sigma(t) = (2 + t, t)$$

να υπολογίσετε τα ολοκλήρωμα $\int_\sigma \omega$ και $\int_\gamma \omega$.