Διαφορική Γεωμετρία 1
Εξέταση 21 Ιανουαρίου 2022

ΘΕΜΑ 1

1. (2 μονάδες) Θεωρήστε τα διανυσματικά πεδία $V = \frac{\partial}{\partial x} + 3x^2 \frac{\partial}{\partial z}, W = \frac{\partial}{\partial y}$ στον $\mathbb{R}^3$ και να βρείτε, αν υπάρχει, σύστημα συντεταγμένων (U, φ), $\varphi(p) = (x^1(p), x^2(p), x^3(p))$ του $\mathbb{R}^3$ ώστε $V|_U = \frac{\partial}{\partial x^1}$ και $W|_U = \frac{\partial}{\partial x^2}$. Να δείξετε επίσης ότι η επιφάνεια $z = x^3$ είναι μια ολοκληρωτική υποπολλαπλότητα της κατανομής που παράγεται από τα V και W.

2. (1 μονάδα) Έστω M, N δύο διαφορικές πολλαπλότητες διάστασης $n > 0$, $X \in \mathcal{X}(M), Y \in \mathcal{X}(N)$. Έστω ότι $p \in M$, $q \in N$ ικανοποιούν $X_p \neq 0$ και $Y_q \neq 0$. Να δείξτε ότι υπάρχουν ανοιχτά $U \subset M$, $V \subset N$ με $p \in U$, $q \in V$ και αμφιδιαφόριση $F : U \to V$ ώστε τα $X|_U, Y|_V$ να είναι F-συσχετισμένα.

ΘΕΜΑ 2 (2.5 μονάδες) Έστω M μια διαφορική πολλαπλότητα και $V, W \in \mathcal{X}(M)$ δύο C^∞ διανυσματικά πεδία στην M. Να απαντήσετε στα παρακάτω:

1. Να ορίσετε την αγκύλη Lie $[V, W]$ των δύο διανυσματικών πεδίων, και να αποδείξετε ότι ορίζει ένα C^∞ διανυσματικό πεδίο στην M.

2. Να ορίσετε την παράγωγο Lie $L_V W$ των δύο διανυσματικών πεδίων και να αποδείξετε ότι
$$L_V W = [V, W].$$

3. Να αποδείξετε ότι αν $[V, W] = 0$ και $\phi : \mathcal{D} \to M$ είναι η ροή του V, τότε για κάθε $(p, t) \in \mathcal{D}$ ισχύει ότι $(\phi_t)_* W_p = W_{\phi_t(p)}$.

ΘΕΜΑ 3 (1.5 μονάδες) Έστω M, N δύο διαφορικές πολλαπλότητες διάστασης m και n αντίστοιχα, $0 < n < m$ και $F : M \to N$ μια C^∞ submersion. Να δείξετε ότι η αντιστοιχία
$$p \mapsto D_p = \ker(F_* : T_p M \to T_{F(p)} N)$$
ορίζει μια ομαλή $(m - n)$-κατανομή D στην M η οποία είναι involutive.

ΘΕΜΑ 4 (1 μονάδα) Έστω M μια διαφορική πολλαπλότητα και $f : M \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Έστω $x_1, x_2 \in M$ και ότι $|f(x) - f(x_i)| \leq 1$ για κάθε $x \in M$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει C^∞ συνάρτηση $\tilde{f} : M \to \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $i = 1, 2$, $\tilde{f}(x_i) = f(x_i)$ και για κάθε $x \in M$, $|\tilde{f}(x) - f(x)| \leq 1$.

ΘΕΜΑ 5 (2 μονάδες) Έστω $\omega = 2xydx + x^2dy$ μια 1-μορφή στον $\mathbb{R}^2$, όπου x, y είναι οι συνηθισμένες συντεταγμένες του. Να εξετάσετε αν η ω είναι κλειστή και αν είναι ακριβής. Αν είναι ακριβής, να βρείτε συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ώστε $\omega = df$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_\gamma \omega$, όπου $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ είναι μια C^∞ καμπύλη με $\gamma(0) = (0, 0)$ και $\gamma(1) = (1, 1)$.