Διαφορική Γεωμετρία 1
Εξέταση Ιανουαρίου 2023

ΘΕΜΑ 1 (3 μονάδες)

1. Να υπολογίσετε τις ολοκληρωτικές καμπύλες του διανυσματικού πεδίου $V=(x+y)\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial z}$ στον $\mathbb{R}^3$ και να βρείτε την ροή του.

2. Να εξετάσετε αν η απεικόνιση $\phi:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $\phi((x,y,z),t)=(xe^t,ye^t,z+t)$ είναι ολική ροή κάποιου διανυσματικού πεδίου. Αν ναι, να το βρείτε.

3. Έστω M μια διαφορική πολλαπλότητα και $X,Y\in\mathcal{X}(M)$ δύο πεδία που μετατίθενται, με διαφορικές ροές θ,η αντίστοιχα, και $p\in M$. Έστω $\sigma:(-\varepsilon,\varepsilon)\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ με $\sigma(t,s)=\theta_t\circ\eta_s(p)$. Να δείξετε ότι για κάθε $f\in C^\infty(M)$, $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s}(f\circ\sigma)=(XYf)\circ\sigma$.

ΘΕΜΑ 2 (3 μονάδες) Έστω ω η 1-μορφή στον $\mathbb{R}^3$ με

$$\omega_{(x,y,z)}\left(a\,\frac{\partial}{\partial x}\bigg|_{(x,y,z)}+b\,\frac{\partial}{\partial y}\bigg|_{(x,y,z)}+c\,\frac{\partial}{\partial z}\bigg|_{(x,y,z)}\right)=-xa-yb+c.$$

1. Να βρείτε αν υπάρχει $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ ώστε $df=\omega$.

2. Αν f είναι μια C^∞ συνάρτηση με τις ιδιότητες του υποερωτήματος (α'), να εξετάσετε αν τα σύνολα $S_c:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, f(x,y,z)=c\}$ είναι εμφυτευμένες υποπολλαπλότητες του $\mathbb{R}^3$.

3. Να εξετάσετε αν η κατανομή D με $D_{(x,y,z)}=\ker\omega_{(x,y,z)}$ είναι involutive. Αν είναι, να βρείτε τις ολοκληρωτικές υποπολλαπλότητες της D και έναν χάρτη του $\mathbb{R}^3$ επίπεδο ως προς την κατανομή D.

ΘΕΜΑ 3 (2 μονάδες)

1. Έστω M μια διαφορική πολλαπλότητα διάστασης n και ω μια κλειστή 1-μορφή στην M με $\omega_p\neq 0_p\in T_p^*M$ για κάθε $p\in M$. Να δείξετε ότι η κατανομή $D_p=\ker\omega_p$ είναι μια involutive $(n-1)$-κατανομή. Υπόδειξη: δείξτε το πρώτα στην περίπτωση που η ω είναι ακριβής.

2. Έστω M μια διαφορική πολλαπλότητα, $h\in C^\infty(M)$ και $p\in M$ τέτοιο ώστε $dh_p=0$. Να δείξετε ότι η απεικόνιση $L:\mathcal{X}(M)\times\mathcal{X}(M)\to\mathbb{R}$, $L(X,Y)=X_p(Y(h))$ είναι συμμετρική (δηλαδή $L(X,Y)=L(Y,X)$) και C^∞-γραμμική (για κάθε $f,g\in C^\infty(M)$, $L(fX,gY)=fgL(X,Y)$). Δείξτε επίσης ότι η L ορίζει μια συμμετρική διγραμμική απεικόνιση $\tilde{L}:T_pM\times T_pM\to\mathbb{R}$, ώστε αν $X,Y\in\mathcal{X}(M)$, τότε $\tilde{L}(X_p,Y_p)=L(X,Y)$.

ΘΕΜΑ 4 (2 μονάδες) Έστω M μια διαφορική πολλαπλότητα και $V\in\mathcal{X}(M)$ τέτοιο ώστε $V_p\neq 0_p\in T_pM$ για κάθε $p\in M$. Να δείξετε ότι υπάρχει μια 1-μορφή $\omega\in\Gamma(T^*M)$ της M τέτοια ώστε $\omega(V)>0$ στην M. Ως $\omega(V)$ ορίζουμε τη C^∞ συνάρτηση $p\mapsto(\omega(V))(p):=\omega_p(V_p)$. Υπόδειξη: Λύστε το πρόβλημα πρώτα τοπικά, σε ένα σύστημα συντεταγμένων.