

Διαφορική Γεωμετρία 1  
Εξέταση Σεπτεμβρίου 2021

**ΘΕΜΑ 1** (5 μονάδες)

Θεωρήστε τα παρακάτω διανυσματικά πεδία στην πολλαπλότητα  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z > 0\}$ :

$$V = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{x}{z} \frac{\partial}{\partial z}, \quad W = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{y}{z} \frac{\partial}{\partial z}.$$

1. (1.5 μονάδες) Να υπολογίσετε τις διαφορικές ροές  $\Phi$  και  $\Psi$  των  $V$  και  $W$  αντίστοιχα. Είναι τα  $V, W$  πλήρη;
2. (1 μονάδα) Να υπολογίσετε την αγκύλη  $\text{Lie}[V, W]$ .
3. (1.5 μονάδες) Έστω  $p = (c_1, c_2, c_3) \in U$ . Να βρείτε σύστημα συντεταγμένων  $(U, \varphi)$  της  $M$  γύρω από το  $p$ , με  $\varphi(q) = (x_1(q), x_2(q), x_3(q))$ , ώστε

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = V, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = W$$

στο  $U$ .

4. (1 μονάδα) Έστω  $D$  η κατανομή διάστασης 2 της  $M$  με  $D_{(x,y,z)} = \text{span}(V, W)$ .  
(α') Είναι η  $D$  involutive;  
(β') Έστω  $p = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ . Υπάρχει ολοκληρωτική υποπολλαπλότητα της  $D$  που να περιέχει το  $p$ ; Αν ναι, να την βρείτε.

**ΘΕΜΑ 2** (2.5 μονάδες) Έστω  $M, N$  δύο διαφορικές πολλαπλότητες και  $F: M \rightarrow N$  μια ομαλή απεικόνιση. Θεωρήστε διανυσματικά πεδία  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ ,  $V, W \in \mathcal{X}(N)$  ώστε τα  $X, V$  και αντίστοιχα τα  $Y, W$  να είναι  $F$ -συσχετισμένα. Να αποδείξετε ότι για κάθε  $p \in M$ ,  $F_*[X, Y]_p = [V, W]_{F(p)}$ .

**ΘΕΜΑ 3** (2.5 μονάδες) Να ορίσετε πότε μια 1-μορφή είναι συντηρητική και πότε ακριβής. Να αποδείξετε ότι μια 1-μορφή είναι συντηρητική αν και μόνο αν είναι ακριβής.

**ΘΕΜΑ 4** (2.5 μονάδες) Θεωρήστε την 1-μορφή  $\omega = \frac{1}{x} \cos \log(xy) dx + \frac{1}{y} \cos \log(xy) dy$  στο

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x, y > 0\}.$$

1. Να εξετάσετε αν η  $\omega$  είναι κλειστή.
2. Να βρείτε, αν υπάρχει, ομαλή συνάρτηση  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  ώστε  $\omega = df$ .
3. Αν  $\gamma: [1, 2] \rightarrow U$ ,  $\gamma(t) = (t, t)$ , να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $\int_\gamma \omega$ .
4. Αν  $\sigma: [1, 2] \rightarrow U$ ,  $\sigma(t) = (t, 1/t)$  να υπολογίσετε τη μορφή  $\sigma^* \omega$