Διαφορική Γεωμετρία 1
Εξέταση Σεπτεμβρίου 2022

ΘΕΜΑ 1

1. (2 μονάδες) Έστω M, N δύο διαφορικές πολλαπλότητες, $F : M \to N$ μια λεία απεικόνιση, και $V_1, V_2 \in \mathcal{X}(M)$, $W_1, W_2 \in X(N)$ διανυσματικά πεδία ώστε για κάθε $i = 1, 2$ τα V_i, W_i να είναι F-συσχετισμένα. Να δείξετε ότι για κάθε $p \in M$, ισχύει η σχέση $F_*[V_1, V_2]_p = [W_1, W_2]_{F(p)}$.

2. (2 μονάδες) Θεωρήστε τα διανυσματικά πεδία $V = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}, W = \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}$ στον $\mathbb{R}^3$ και να βρείτε, αν υπάρχει, σύστημα συντεταγμένων (U, φ), $\varphi(p) = (x^1(p), x^2(p), x^3(p))$ του $\mathbb{R}^3$ ώστε $V|_U = \frac{\partial}{\partial x^1}$ και $W|_U = \frac{\partial}{\partial x^2}$. Να δείξετε επίσης ότι η επιφάνεια $z = xy$ είναι μια ολοκληρωτική υποπολλαπλότητα της κατανομής που παράγεται από τα V και W.

ΘΕΜΑ 2 (2 μονάδες) Έστω M μια διαφορική πολλαπλότητα, $p \in M$ και $V_p \in T_pM$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει λείο διανυσματικό πεδίο $X \in \mathcal{X}(M)$ ώστε $X_p = V_p$.

ΘΕΜΑ 3 (2 μονάδες) Έστω M μια συμπαγής διαφορική πολλαπλότητα και $f : M \to \mathbb{R}$ μια λεία συνάρτηση.

1. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει διανυσματικό πεδίο $X \in \mathcal{X}(M)$ το οποίο να είναι f-συσχετισμένο με το διανυσματικό πεδρίο $\frac{\partial}{\partial t} \in \mathcal{X}(\mathbb{R})$.

2. Να υπολογίστε την 1-μορφή $\omega = f^*dt$ της M.

ΘΕΜΑ 4 (3 μονάδες) Έστω M μια διαφορική πολλαπλότητα $V \in \mathcal{X}(M)$ ένα πλήρες διανυσματικό πεδίο με διαφορική ροή $\varphi_t : M \to M$, $t \in \mathbb{R}$, και ω μια 1-μορφή στην M. Να αποδείξετε τα παρακάτω:

1. Να αποδείξετε ότι η αντιστοιχία, για κάθε $p \in M$ και $W_p \in T_pM$,
$$W_p \longmapsto \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\varphi_t^*\omega)(W_p) = \lim_{t\to 0} \frac{(\varphi_t^*\omega)(W_p) - \omega_p(W_p)}{t} \in \mathbb{R}$$
ορίζει μια λεία 1-μορφή στην M. Αυτή την 1-μορφή τη συμβολίζουμε ως $L_X\omega$ και την αποκαλούμε "παράγωγο Lie" της ω ως προς το X.

2. Να δείξετε ότι αν η ω είναι μια κλειστή 1-μορφή, τότε $L_X\omega = d(\omega(X))$.
Υπόδειξη: Δείξτε το πρώτα για τα σημεία $p \in M$ όπου $X_p \neq 0$, επιλέγοντας ένα σύστημα συντεταγμένων γύρω από το p που ικανοποιεί $X = \frac{\partial}{\partial x^1}$.

3. Να αποδείξετε ότι αν η ω είναι κλειστή, και $\gamma : [0, 1] \to M$ είναι μια λεία καμπύλη στην M, $\gamma_t = \varphi_t \circ \gamma$, τότε
$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_{\gamma_t} \omega = \omega_{\gamma(1)}(X_{\gamma(1)}) - \omega_{\gamma(0)}(X_{\gamma(0)}).$$