Διαφορική Γεωμετρία 1
Εξέταση Σεπτεμβρίου 2023

ΘΕΜΑ 1 (3 μονάδες)

1. Να υπολογίσετε τις ολοκληρωτικές καμπύλες του διανυσματικού πεδίου $V = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$ στον $\mathbb{R}^3$ και να βρείτε την ροή του. Επίσης, να βρείτε ένα χάρτη $\psi = (u^1, u_2, u^3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με την ιδιότητα $\frac{\partial}{\partial u^3} = V$.

2. Να εξετάσετε αν η απεικόνιση $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $\phi((x,y,z),t) = (x+t, y+2t, z+t^2)$ είναι ολική ροή κάποιου διανυσματικού πεδίου.

3. Έστω M μια διαφορική πολλαπλότητα, $V \in \mathcal{X}(M)$ και έστω $\phi : M \times \mathbb{R} \to M$ η ροή του V. Έστω $p \in M$ και $\gamma_p : \mathbb{R} \to M$ η καμπύλη $\gamma_p(t) = \phi(p,t)$. Να δείξετε ότι η γ_p είναι ολοκληρωτική καμπύλη του V.

ΘΕΜΑ 2 (3 μονάδες) Έστω ω η 1-μορφή στον $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ με

$$\omega_{(x,y,z)}\left(a\,\frac{\partial}{\partial x}\bigg|_{(x,y,z)} + b\,\frac{\partial}{\partial y}\bigg|_{(x,y,z)} + c\,\frac{\partial}{\partial z}\bigg|_{(x,y,z)}\right) = xa + yb + zc.$$

1. Να βρείτε $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ώστε $df = \omega$.

2. Αν f είναι μια C^∞ συνάρτηση με τις ιδιότητες του υποερωτήματος (α'), να δείξετε ότι τα σύνολα $S_c := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2+z^2 = c^2\}$, $c > 0$, είναι εμφυτευμένες υποπολλαπλότητες του $\mathbb{R}^3$.

3. Να βρείτε τις ολοκληρωτικές υποπολλαπλότητες της D, αν και όπου υπάρχουν, και έναν χάρτη της πολλαπλότητας $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ επίπεδο ως προς την κατανομή D.

ΘΕΜΑ 3 (2 μονάδες)

1. Έστω $F : M \to N$ μια ομαλή εμφύτευση, και έστω $V, W \in \mathcal{X}(N)$ τέτοια ώστε για κάθε $p \in M$, $V_{F(p)}, W_{F(p)} \in F_*(T_pM)$. Να δείξετε ότι $[V,W]_{F(p)} \in F_*(T_pM)$.

2. Έστω M μια διαφορική πολλαπλότητα και $V, W \in \mathcal{X}(M)$. Να δείξετε ότι $\mathcal{L}_V W = [V,W]$.

ΘΕΜΑ 4 (2 μονάδες)

1. Έστω M, N δύο διαφορικές πολλαπλότητες και $F : M \to N$ μια C^∞ απεικόνιση. Να δείξετε ότι αν η ω είναι μια C^∞ ακριβής 1-μορφή στην N, τότε και η $F^*\omega$ είναι μια C^∞ ακριβής 1-μορφή στην M.

2. Έστω M μια συμπαγής διαφορική πολλαπλότητα και ω μια C^∞ 1-μορφή στην M. Έστω επίσης ότι υπάρχει $V \in \mathcal{X}(M)$ με $\omega_p(V_p) > 0$, για κάθε $p \in M$. Να δείξετε ότι ότι η ω δεν είναι ακριβής.