ΑΣΚΗΣΕΙΣ 04
ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

1. Έστω $f : M \to N$ μια αμφιδιαφόριση και έστω $A \subseteq M$ ανοιχτό. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα ανοιχτό $B \subseteq N$, έτσι ώστε $f|_A : A \to B$ να είναι αμφιδιαφόριση ως προς τη διαφορική δομή των ανοιχτών υποπολλαπλοτήτων.

2. Θεωρούμε το $\mathbb{R}$ εφοδιασμένο με τους μέγιστους διαφορικούς άτλαντες $\mathcal{A}'$ και $\mathcal{B}'$, που ορίζονται από τους $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}, id_{\mathbb{R}})\}$ και $\mathcal{B} = \{(\mathbb{R}, \psi)\}$, όπου $\psi(t) = t^3$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Να ελέγξετε την διαφορισιμότητα των απεικονίσεων

$$\begin{gathered}
\mathbf{id}_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \\
\mathbf{id}_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \\
\psi : (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \\
\psi : (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \\
\psi : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \\
\psi : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})
\end{gathered}$$

3. Αποδείξτε ότι κάθε σταθερή απεικόνιση μεταξύ πολλαπλοτήτων είναι διαφορίσιμη.

4. Αποδείξτε ότι η απεικόνιση $\det : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη.

5. Έστω M, N, P διαφορικές πολλαπλότητες και $f : P \to M \times N$ απεικόνιση. Αποδείξτε ότι η f είναι διαφορίσιμη αν και μόνον αν οι συνθέσεις

$$\begin{gathered}
f_M := p_M \circ f : P \longrightarrow M \\
f_N := p_N \circ f : P \longrightarrow N
\end{gathered}$$

είναι διαφορίσιμες.

6. Έστω M, N μη κενά σύνολα και $f : M \to N$ μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση. Αν ένα από τα σύνολα έχει διαφορική δομή, δείξτε ότι το άλλο δέχεται διαφορική δομή που κάνει την f αμφιδιαφόριση.

7. Έστω M_i, N_i διαφορικές πολλαπλότητες ($i = 1, 2$) και $f_i : M_i \to N_i$. Αποδείξτε ότι

$$\begin{gathered}
f_1 \times f_2 : M_1 \times M_2 \longrightarrow N_1 \times N_2 : \\
(x_1, x_2) \longmapsto (f_1(x_1), f_2(x_2))
\end{gathered}$$

είναι διαφορίσιμη, αν και μόνον αν και οι δύο f_i είναι διαφορίσιμες.

8. Έστω $(M,\mathcal{A})$, $(N,\mathcal{B})$, $(P,\mathcal{C})$ διαφορικές πολλαπλότητες. Θεωρούμε στο γινόμενο $M \times N$ την διαφορική δομή που ορίζεται από τον άτλαντα $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ και μια διαφορίσιμη απεικόνιση $f : M \times N \to P$. Για ένα σταθεροποιημένο $(x,y) \in M \times N$ δείξτε ότι οι μερικές απεικονίσεις

$$
\begin{aligned}
f_x &: N \longrightarrow P : y \longmapsto f(x,y)\\
f_y &: M \longrightarrow P : x \longmapsto f(x,y)
\end{aligned}
$$

είναι διαφορίσιμες.

9. Θεωρούμε την διαφορική πολλαπλότητα $(S^1, \mathcal{C}')$, όπου $\mathcal{C}'$ είναι ο μέγιστος άτλαντας του Παραδείγματος 1.2(Δ), στο Μάθημα 02, και το γινόμενο $S^1 \times S^1$ με τη δομή της πολλαπλότητας–γινόμενου, δηλ. με τον άτλαντα $(\mathcal{C} \times \mathcal{C})'$. Έστω

$$
\begin{gathered}
\gamma : S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1 :\\
((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \longmapsto (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).
\end{gathered}
$$

Αν τα ζεύγη (x_1,y_1), (x_2,y_2) θεωρούνται σαν μιγαδικοί αριθμοί, τότε η γ είναι ο περιορισμός στο S^1 του πολλαπλασιασμού του $\mathbb{C}$. Να ελέγξετε αν η γ είναι διαφορίσιμη σαν απεικόνιση μεταξύ των ανωτέρω πολλαπλοτήτων.

10. Αποδείξτε ότι το σύνολο $Diff(M)$ όλων των αμφιδιαφορίσεων $f : M \to M$ εφοδιασμένο με τη σύνθεση των απεικονίσεων είναι μια μη αβελιανή ομάδα.

11. Για κάθε $A \subseteq M$ ανοιχτό, δείξτε ότι $\mathcal{C}^\infty(A,\mathbb{R})$ είναι μια μεταθετική προσεταιριστική άλγεβρα με μονάδα. Ισχύουν τα ίδια για $\mathcal{C}^\infty_x(M,\mathbb{R})$;

12. Εξηγείστε γιατί δεν μπορούμε να ορίσουμε $\mathcal{C}^r$–διαφορίσιμες απεικονίσεις μεταξύ $\mathcal{C}^k$–διαφορικών πολλαπλοτήτων, με $r > k$.

13. Έστω M, N διαφορικές πολλαπλότητες και $f : M \to N$ απεικόνιση. Για κάθε $x \in M$, δείξτε ότι οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(i) Η απεικόνιση f είναι $\mathcal{C}^\infty$ στο x.

(ii) Η απεικόνιση f είναι συνεχής στο x και, για κάθε ζεύγος των χαρτών (U,ϕ) του M και (V,ψ) του N με $x \in U$ και $f(x) \in V$, η απεικόνιση

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap f^{-1}(V)) \to \psi(V)$$

είναι $\mathcal{C}^\infty$ στο $\phi(x)$.

14. Αποδείξτε ότι η απεικόνιση

$$f : S^2 \longrightarrow S^2 : f(u) = -u, \quad \forall\, u \in S^2$$

είναι διαφορίσιμη.

15. (α) Έστω

$$\pi : S^2 \longrightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) : (x,y,z) \longmapsto [(x,y,z)].$$

Αποδείξτε ότι η π είναι διαφορίσιμη. Είναι αμφιδιαφόριση;

(β) Αποδείξτε ότι ο προβολικός χώρος $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ είναι συμπαγής και συνεκτικός.

16. Να ελέγξετε αν η απεικόνιση

$$\pi : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \longrightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) : (x,y,z) \longmapsto [(x,y,z)]$$

είναι διαφορίσιμη.

17. Έστω $i : S^1 \to \mathbb{R}^2$ η κανονική εμφύτευση. Να δείξετε ότι είναι διαφορίσιμη.

18. Να εξετάσετε αν η απεικόνιση

$$f : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} : [(x,y,z)] \longmapsto \frac{xz}{x^2+y^2+z^2}$$

είναι καλά ορισμένη και διαφορίσιμη.