ΑΣΚΗΣΕΙΣ 09
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ

Ασκ 1

$(M, \mathcal{A})$ m-διάστ. δ.π., $(U,\varphi), (V,\psi) \in \mathcal{A}$ με $U \cap V \neq \emptyset$, με συντεταγμένες $(x_1, \dots, x_m)$, $(y_1, \dots, y_m)$, αντίστοιχα. Νδο

$$\frac{\partial}{\partial y_j} = \sum_{1 \leq i \leq m} \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Αποδ

κάθε διαν. πεδίο ξ πάνω από ένα χάρτη (U,φ) γράφεται μονοσήμαντα σαν $\xi = \sum \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, όπου $\xi_i = \xi(x_i)$.

Άρα το $\frac{\partial}{\partial y_j}$, πάνω από την τομή $U \cap V$ (όπου ορίζονται και τα $\frac{\partial}{\partial y_j}$, και τα $\frac{\partial}{\partial x_i}$) γράφεται σαν

$$\frac{\partial}{\partial y_j} = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_i \frac{\partial}{\partial x_i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial y_j}(x_i) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Άσκ 2

Με τις υποθέσεις της (1), έστω $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ και (ξ_i), $(\bar{\xi}_j)$ οι συντεταγμένες του ξ ως προς τους (U,φ), (V,ψ). Νδο

$$\bar{\xi}_j = \sum_{1\le i\le m} \xi_i \frac{\partial y_j}{\partial x_i}$$

Αποδ.

Οι συντεταγμένες $\bar{\xi}_j$ του ξ ως προς τον (V,ψ) δίνονται από την ισότητα $\bar{\xi}_j = \xi(y_j)$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι πάνω στην τομή των χαρτών είναι

$$\xi = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

παίρνουμε

$$\bar{\xi}_j = \xi(y_j) = \left(\sum_{i=1}^{m} \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)(y_j) = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \frac{\partial y_j}{\partial x_i}$$

Άσκ 3

Νδο $\xi(c)=0$, $\forall \xi \in \mathfrak{X}(M)$, $\forall c \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ σταθερή.

Αποδ.

Πάνω από κάθε χάρτη (U,φ) είναι

$$\xi(c) = \left(\sum \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)(c) = \sum \xi_i \frac{\partial c}{\partial x_i} = \sum \xi_i \frac{\partial (c\circ\varphi^{-1})}{\partial u_i}\circ\varphi,$$

και η μερική παράγωγος $\frac{\partial (c\circ\varphi^{-1})}{\partial u_i}$ μηδενίζεται, γιατί η $c\circ\varphi^{-1}$ είναι σταθερή.

Άσκ 4

(x_1, x_2, x_3) οι συντεταγμένες του $(\mathbb{R}^3, id_{\mathbb{R}^3})$.

$$\xi = (x_1^2 + x_2^2)\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + (x_1 + x_3)\frac{\partial}{\partial x_3} \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3).$$

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$: $f(x,y,z) = x - 2y$. Υπολογίστε το

$\xi(f)(1,3,-2)$.

Απαντ.

Είναι $x_i = pr_i \circ id_{\mathbb{R}^3} = pr_i$, και $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f \circ id_{\mathbb{R}^3}^{-1}}{\partial u_1} = \frac{\partial f}{\partial x} = 1$,

$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial (f \circ id_{\mathbb{R}^3}^{-1})}{\partial u_2} = \frac{\partial f}{\partial y} = -2$, $\frac{\partial f}{\partial x_3} = \dots = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$.

Άρα

$\xi(f)(1,3,-2) =$

$$= \left[(x_1^2 + x_2^2)\frac{\partial f}{\partial x_1} - x_1 x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + (x_1 + x_3)\frac{\partial f}{\partial x_3}\right](1,3,-2) =$$

$$= (1^2 + 3^2)\cdot 1 - 1\cdot 3\cdot(-2) + (1 + (-2))\cdot 0 = 16$$

Άσκ 5

Έστω $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ και $x_0 \in X$: $\xi(x_0) \neq 0$. Νδο $\exists$ ανοιχτή περιοχή A του x_0 : $\xi(x) \neq 0$, $\forall x \in A$.

Απόδ.

$\exists (U, \varphi) \in \mathcal{A}$ με $x_0 \in U \Rightarrow \xi(x_0) = \sum \xi_i(x_0) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{x_0} \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ τουλάχιστον μια συντεταγμένη, έστω η $\xi_{i_0}(x_0)$ είναι $\neq 0$.

Όμως $\xi_{i_0} : U \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη, άρα συνεχής, και

$t_0 = \xi_{i_0}(x_0) \neq 0 \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 : 0 \notin (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) = I$

Θέτοντας $A = \xi_{i_0}^{-1}(I) \subseteq U$, έχουμε ότι $\forall x \in A$:

$\xi_{i_0}(x) \neq 0 \Rightarrow \sum \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x \neq 0$, αφού $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x\right\}_i$ βάση.

Ασκ 6

Θεωρούμε στην S^1 τους χάρτες (U_N,θ_N) και (U_S,θ_S), και τα βασικά διαν. πεδία $\frac{\partial}{\partial x_N}$, $\frac{\partial}{\partial x_S}$ που τους αντιστοιχούν. Νδο:

(1) $\frac{\partial}{\partial x_N} = \frac{\partial}{\partial x_S}\Big|_{U_N\cap U_S}$

(2) $\exists\, \xi_0 \in \mathcal{X}(S^1) : \forall \xi \in \mathcal{X}(S^1)\ \exists!\, f : S^1 \to \mathbb{R}$ διαφ:

$$\xi = f\,\xi_0 .$$

Απόδ.

(1) Υπενθυμίζουμε ότι:

$$\theta_N(U_N \cap U_S) = (\pi/2, 3\pi/2) \cup (3\pi/2, 5\pi/2)$$

$$\theta_S(U_N \cap U_S) = (-\pi/2, \pi/2) \cup (\pi/2, 3\pi/2)$$

$$\theta_S \circ \theta_N^{-1} : (\pi/2, 3\pi/2) \cup (3\pi/2, 5\pi/2) \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2) \cup (\pi/2, 3\pi/2)$$

$w \mapsto w - 2\pi$

$w \mapsto id(w) = w$

Τώρα παρατηρούμε ότι $\forall (x,y) \in U_N \cap U_S$

$$\frac{\partial}{\partial x_N}\Big|_{(x,y)} = \frac{\partial}{\partial x_S}\Big|_{(x,y)} \iff \bar{\theta}_N^{-1}(1) = \bar{\theta}_S^{-1}(1) \iff$$

$$\iff \bar{\theta}_S \circ \bar{\theta}_N^{-1}(1) = 1 \iff D(\theta_S \circ \theta_N^{-1})(\underbrace{\theta_N(x,y)}_{w})(1) = 1$$

$$\iff (\theta_S \circ \theta_N^{-1})'(w) = 1$$ που ισχύει $\forall w \in \theta_N(U_N \cap U_S)$.

(2) Θέτουμε $\xi_0(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_N}\Big|_{(x,y)}, & \text{αν } (x,y) \in U_N \\ \dfrac{\partial}{\partial x_S}\Big|_{(x,y)}, & \text{αν } (x,y) = N \end{cases}$

Τότε το ξ_0 έχει την ζητούμενη ιδιότητα, αφού $\xi_0 \in \mathfrak{X}(S^1)$ και σε κάθε $(x,y) \in S^1$, το $\xi_0(x,y)$ είναι βάση του $T_{(x,y)} S^1$.