ΑΣΚΗΣΕΙΣ 10
Αγκύλη Lie - Συσχετισμένα Πεδία

1. Αποδείξτε την ισότητα

$$[f\xi, g\eta] = fg[\xi,\eta] + f\xi(g)\eta - g\eta(f)\xi,$$

για κάθε $\xi, \eta \in \mathcal{X}(M)$ και $f, g, h \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$.

2. Δείξτε ότι τα βασικά διανυσματικά πεδία ενός χάρτη (U,ϕ), με συντεταγμένες $(x_i)_{1\le i\le m}$, ικανοποιούν την ισότητα

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0; \qquad i,j = 1,\dots,m.$$

3. Αν (x,y) είναι οι συντεταγμένες του ταυτοτικού χάρτη του $\mathbb{R}^2$, υπολογίστε τις αγκύλες Lie

$$X = \left[\frac{\partial}{\partial x},\ x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right],\ \ Y = \left[x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y},\ e^{-y}\frac{\partial}{\partial y}\right]$$

με δύο τρόπους: α) υπολογίζοντας τις συνιστώσες των αγκυλών, και β) χρησιμοποιώντας τον τύπο της Άσκησης 1.

4. Αν (U,ϕ) χάρτης της M και $f, h \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$, δείξτε ότι

$$\left[f\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right](h) = -\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial h}{\partial x_i}.$$

5. Έστω $(M,\mathcal{A})$, $(N,\mathcal{B})$ διαφορικές πολλαπλότητες, $\xi \in \mathcal{X}(M)$ και $\eta \in \mathcal{X}(N)$. Θεωρούμε τις απεικονίσεις

$$\widetilde{\xi} : M \times N \longrightarrow TM \times TN : \widetilde{\xi}(x,y) = (\xi_x, 0_y),$$
$$\widetilde{\eta} : M \times N \longrightarrow TM \times TN : \widetilde{\eta}(x,y) = (0_x, \eta_y).$$

Χρησιμοποιώντας την ταύτιση $T(M\times N) = TM \times TN$, δείξτε ότι $\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta} \in \mathcal{X}(M\times N)$ με $[\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}] = 0$.

6. Έστω $\alpha : J \to M$ ($J \subseteq \mathbb{R}$ ανοιχτό διάστημα) μια διαφορίσιμη καμπύλη και $\xi \in \mathcal{X}(M)$. Να δείξετε ότι το βασικό διανυσματικό πεδίο $\dfrac{d}{dt}$ του $\mathbb{R}$ είναι α-συσχετισμένο με το $\xi \in \mathcal{X}(M)$ αν και μόνον αν

$$\dot{\alpha}(t) = \xi(\alpha(t)), \qquad t \in J.$$

7. Έστω $f : M \to N$ διαφορίσιμη. Υποθέτουμε ότι (U,ϕ) και (V,ψ) είναι χάρτες των M και N, αντίστοιχα, με $f(U) \subseteq V$. Αν $(x_i)_{1\le i\le m}$ και $(y_j)_{1\le j\le n}$ είναι οι συναρτήσεις συντεταγμένων των ανωτέρω χαρτών, να βρείτε ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε $\dfrac{\partial}{\partial x_1}$ να είναι f-συσχετισμένο με το $\dfrac{\partial}{\partial y_n}$.

8. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ η συνάρτηση $f(t) = (\sin t, \cos t)$. Αν $\eta \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^2)$ είναι το διανυσματικό πεδίο $\eta = y\dfrac{\partial}{\partial x} - x\dfrac{\partial}{\partial y}$, δείξτε ότι $\dfrac{d}{dt}$ και η είναι f-συσχετισμένα.