

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ 08

### Εφαπτόμενη Δέσμη και Ολικό Διαφορικό

1. Αποδείξτε ότι η απεικόνιση  $\rho : \mathbb{R} \times TM \rightarrow TM$  με  $\rho(\lambda, u) = \lambda u$  είναι διαφορίσιμη.
2. Αποδείξτε ότι αν  $M$  είναι Hausdorff, τότε  $TM$  είναι επίσης Hausdorff.
3. Αν  $f : (M, \mathcal{A}) \rightarrow (N, \mathcal{B})$  είναι αμφιδιαφόριση, να δείξετε ότι η  $Tf : TM \rightarrow TN$  είναι αμφιδιαφόριση με  $(Tf)^{-1} = T(f^{-1})$ .
4. Έστω  $(M, \mathcal{A})$  και  $(N, \mathcal{B})$  διαφορικές πολλαπλότητες, διαστάσεων  $m$  και  $n$ , αντίστοιχα. Να δείξετε ότι υπάρχει αμφιδιαφόριση  $F : T(M \times N) \rightarrow TM \times TN$ .
5. Έστω  $(M, \mathcal{A})$  μια  $C^r$ -πολλαπλότητα και  $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ . Τότε η τοπική παράσταση  $\Phi \circ \pi \circ \phi^{-1}$  της προβολής  $\pi$  της  $TM$  είναι  $C^\infty$ -διαφορίσιμη. Είναι η  $\pi$   $C^\infty$ -απεικόνιση ή όχι, και γιατί;